

**НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МАШИНОБУДУВАННЯ
ім. А. М. ПІДГОРНОГО**

Тимченко Галина Миколаївна

УДК 539.3

**ЛІНІЙНІ ТА ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНІ ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ
БАГАТОШАРОВИХ ПЛАСТИН ТА ПОЛОГИХ ОБОЛОНОК
ЗІ СКЛАДНОЮ ФОРМОЮ ПЛАНУ**

01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата технічних наук

Харків 2008

Дисертацією є рукопис

Робота виконана на кафедрі прикладної математики Національного технічного університету „Харківський політехнічний інститут”, м. Харків

Науковий керівник – доктор технічних наук, професор

Курпа Лідія Василівна,

Національний технічний університет „ХПІ”,

завідувач кафедри прикладної математики

Офіційні опоненти – доктор технічних наук, професор

Шупіков Олександр Миколайович,

Інститут проблем машинобудування ім. А.М.Підгорного НАН України,

завідувач відділу

доктор фізико-математичних наук, професор

Григоренко Олександр Ярославович,

Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, завідувач відділу

Захист відбудеться „18” грудня 2008 р. о 14⁰⁰ годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 64.180.01 в Інституті проблем машинобудування ім. А.М.Підгорного НАН України за адресою: 61046, м. Харків, вул. Дм. Пожарського, 2/10.

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці Інституту проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України за адресою: 61046, м. Харків, вул. Дм. Пожарського, 2/10.

Автореферат розісланий „14” листопада 2008 р.

Вчений секретар

спеціалізованої вченої ради

д.т.н.

О.О.Стрельнікова

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. В сучасній техніці – цивільному будівництві, авіабудівництві, ракетобудуванні і т. ін. – як конструктивні елементи широко застосовуються багатошарові пластини та оболонки, виготовлені з композитних матеріалів. Це пояснюється тим, що подібні елементи є достатньо міцними та при цьому мають відносно малу масу, що відповідає вимогам будівництва та промисловості. Звичайно, що розрахунки на міцність таких елементів складають головну проблему при проектуванні сучасних конструкцій. Внаслідок експлуатації тонкостінних конструкцій при статичних та динамічних навантаженнях часто виникають нелінійні ефекти, які пов'язані з появою великих переміщень, деформацій і т.п. Отже, розрахунки таких елементів необхідно виконувати з урахуванням нелінійних факторів, особливо це важливо при дослідженні динамічної поведінки конструкцій. Математичні моделі, які описують нелінійні коливання багатошарових пластин та оболонок, являють собою нелінійні системи диференціальних рівнянь з частинними похідними в областях довільної геометрії. Проблема розв'язку цих систем є однією із важливих і складних задач нелінійної динаміки. Тому розробка ефективних методів розв'язання задач про лінійні та геометрично нелінійні коливання багатошарових пологих оболонок і пластин є актуальною проблемою, про що свідчить велика кількість сучасних наукових публікацій, присвячених цій проблемі. Слід зазначити, що майже у всіх роботах використовується чисельний метод скінченних елементів. Дана робота присвячена створенню нового чисельно-аналітичного методу, який базується на теорії R-функцій та варіаційних методах і дозволяє аналізувати геометрично нелінійні коливання багатошарових пластин та оболонок практично довільної форми плану.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана на кафедрі прикладної математики Національного технічного університету "Харківський політехнічний інститут" (НТУ "ХПІ") відповідно до:

- держбюджетної теми "Розробка методів для розв'язання нелінійних диференціальних рівнянь, які моделюють статичні та динамічні процеси деформування в елементах тонкостінних конструкцій складної форми" за координаційним планом Міністерства освіти і науки України (№205-II, від 11.02.2002), № ДР0102U000980 (в період з 2002 р. по 2004 р.);
- держбюджетної теми "Розробка чисельно-аналітичних методів дослідження лінійних і нелінійних задач механіки для композитних пластин і пологих оболонок" за наказом Міністерства освіти і науки України (№960 від 22.12.2004), №ДР0105U000573 (в період з 2005 р. по 2007 р.).

Мета та основні задачі дослідження. Метою даної роботи є розробка ефективного методу дослідження лінійних та геометрично нелінійних вільних коливань елементів тонкостінних конструкцій, які моделюються багатошаровими композитними пластинами та пологими оболонками довільної форми в плані з різними умовами закріплення.

Реалізація цієї мети полягає у вирішенні таких задач:

- розробка алгоритмів та варіаційних постановок для розв'язання лінійних задач: а) про власні коливання пластин та пологих оболонок, що мають складну форму плану, в рамках класичної та уточненої теорій типу Тимошенка; б) плоскої задачі теорії пружності для анізотропного середовища;
- розвиток конструктивних засобів теорії R-функцій у вигляді побудованих систем базисних функцій для розв'язання лінійних та нелінійних задач про власні коливання шаруватих пластин та оболонок;
- розробка методу зведення задачі про геометрично нелінійні коливання багатошарових пластин та пологих оболонок до задачі Коші в рамках класичної та уточненої теорій; виведення формул для обчислення коефіцієнтів нелінійного звичайного диференціального рівняння, до якого зведено вихідну задачу;
- створення та тестування програмного забезпечення, яке реалізує запропонований метод, в рамках програмуючої системи POLE-RL;
- розв'язання нових задач про лінійні та нелінійні коливання шаруватих пластин та пологих оболонок, що мають складну форму плану і різні способи закріплення;
- вивчення впливу геометричних та механічних характеристик на частоти та скелетні криві;
- впровадження розробленого методу для розв'язання практичних задач.

Об'єкт дослідження – нелінійні пружні механічні системи, елементами яких є багатошарові пологі оболонки і пластини довільної форми плану.

Предмет дослідження – лінійні та геометрично нелінійні вільні коливання багатошарових пластин і пологих оболонок складної форми в плані при різних способах закріплення.

Методи дослідження – комплексне застосування варіаційних методів та теорії R-функцій (RFM), у тому числі варіаційного методу Рітца, процедури Гальоркіна, методу Рунге-Кутта.

Наукова новизна отриманих результатів полягає в тому, що:

- вперше на базі теорії R- функцій і варіаційних методів розроблено ефективний метод дослідження лінійних та геометрично нелінійних вільних коливань багатошарових пологих оболонок і пластин складної форми в плані в рамках класичної теорії та уточненої теорії типу Тимошенка;
- узагальнено метод зведення до задачі Коші системи нелінійних диференціальних рівнянь руху композитних оболонок, з довільною формою плану;
- розвинуто конструктивні засоби теорії R-функцій у вигляді побудованих систем базисних функцій для розглянутого класу задач;
- розв'язано нові задачі про лінійні та геометрично нелінійні власні коливання багатошарових пологих оболонок з метою вивчення впливу геометричних та механічних параметрів, способу закріплення та способу укладки шарів на частоти та амплітудно-частотні характеристики;

- запропонований метод вперше застосовано для дослідження динамічної поведінки кіля літака та сформульовано практичні рекомендації щодо проектування подібних елементів, які виготовляються з композитних матеріалів.

Практична цінність роботи полягає у тому, що розроблені алгоритми та одержані чисельні результати можуть бути використані інженерами при проектуванні реальних конструкцій для розрахунку динамічних характеристик оболонок, виготовлених з композитних матеріалів.

Результати дисертаційної роботи були використані на кафедрі прикладної математики НТУ "ХП" у навчальному процесі при викладанні курсу "Рівняння математичної фізики" для спеціальності динаміка і міцність, а також курсу "Диференціальні рівняння" для спеціальності прикладна математика, про що свідчить акт використання результатів дисертаційної роботи в учбовому процесі.

Особистий внесок здобувача. Основний зміст дисертаційної роботи опубліковано в 19 працях [1-19]. Результати дисертаційної роботи, що винесені на захист, отримано особисто здобувачем. У працях, опублікованих у співавторстві, особистий внесок здобувача полягає у такому: у статті [1] здобувачем розв'язані задачі про лінійні вільні коливання анізотропних пластин у рамках класичної теорії; у роботах [3, 4, 8,] отримані нові результати досліджень вільних коливань багатошарових пластин та оболонок складної форми у рамках уточненої теорії в залежності від глибини вирізу; у роботах [7, 10, 14] досліджено вплив геометричних умов на значення власних частот та форм коливань тришарових пластин із заповнювачем; у роботах [5, 6, 9, 11] запропоновано аналітично-чисельний метод дослідження нелінійних вільних коливань багатошарових пластин складної геометрії; у роботах [15 - 17, 19] проведено дослідження нелінійних вільних коливань багатошарових оболонок та пластин, отримано амплітудно-частотні характеристики.

Апробація результатів дисертації. Основні положення і результати дисертаційної роботи доповідались та обговорювались на: XII-XV міжнародних науково-практичних конференціях MicroCad'2004, 2005, 2006, 2007, 2008 (Харків, Україна, травень 2004-2007рр., червень 2008р.); 7-му та 8-му Міжнародних симпозиумах українських інженерів-механіків (Львів, Україна, 2005р., 2007р.); міжнародній конференції "Dynamical system modeling and stability investigation" (Київ, Україна, 2005р., 2007р.); 8-й міжнародній конференції "Shell Structures Theory and Applications" (Гданськ– Юрата, Польща, 2005г.); VII міжнародній конференції "Математичні проблеми механіки неоднорідних структур" (Львів, Україна, 2006р.); міжнародній конференції "Актуальні проблеми механіки деформованого твердого тіла" (Донецьк, Україна, 2006 р.); 77-му щорічному з'їзді спілки математиків і механіків (Берлін, Німеччина, 2006 р.); міжнародній конференції "Пятое Окуневские чтения" (Санкт-Петербург, Росія, 2006р.); IX всеросійському з'їзді з теоретичної та прикладної механіки (Нижній Новгород, Росія, 2006р.); міжнародній конференції "Актуальні проблеми прикладної математики і

механіки» (Харків, Україна, 2006р.); міжнародній конференції «Nonlinear Dynamics» (Харків, Україна, 2007р.); міжнародній конференції «Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій» (Дніпропетровськ, Україна, 2007); міжнародній конференції «Сучасні проблеми механіки та математики» (Львів, Україна, 2008р.); засіданнях наукового семінару кафедри прикладної математики НТУ „ХП”.

Публікації. Основні результати опубліковано у 19 працях [1-19], з них 9-у наукових журналах та збірниках, 10 - у тезах доповідей на наукових конференціях.

Структура і обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, одного додатку, списку використаних джерел із 185 найменувань (на 19 стор.). Загальний обсяг роботи складає 145 сторінок, включаючи 45 рисунків та 26 таблиць.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обґрунтовано актуальність теми дослідження, визначено об'єкт та предмет дослідження, сформульовано мету і основні задачі роботи, визначено наукову новизну, практичне значення отриманих результатів.

У першому розділі проведено аналіз стану проблеми лінійних та геометрично нелінійних коливань багатошарових пластин та оболонок, а також існуючих методів для їх розв'язання. Розробці конкретних моделей та методів дослідження динамічної поведінки пластин та оболонок присвячені роботи А.Я. Александрова, М.А. Алфутова, С.О. Амбарцумяна, В.В. Болотіна, А.Т. Василенка, В. З. Власова, А.С. Вольміра, Ю.С. Воробйова, І.І. Воровича, К.З. Галімова, Е.І. Григолюка, Я.М. Григоренка, О.Я. Григоренка, В. З. Грищака, О.М. Гузя, В.І. Гуляєва, С.О. Калюєрова, Б.Я. Кантора, Г.С. Кіта, М.С. Корнішина, В.Д.Кубенка, Р.М. Кушніра, С.Г. Лехницького, Л. Лібреску, А. І. Маневича, А. А. Мартинюка, М. В. Марчука, В.В. Мелешка, Ю.М. Новічкова, Х.М. Муштарі, Я.Г. Савула, В.І. Сторожева, Г.Т. Сулима, В.Н. Паймушина, Н.Д. Панкратової, В.Г. Піскунова, Б.Л. Пелеха, А.О. Рассказова, Дж. Редді, Е. Рейснера, С.П. Тимошенка, Л.О. Фільштинського, П.П. Чулкова, О.М. Шупікова та ін. На основі виконаного огляду опублікованих робіт сформульовані нові постановки задач досліджень, які направлені на подальший розвиток нових ефективних методів розрахунку лінійних та геометрично нелінійних коливань шаруватих пластин та оболонок складної форми з різними типами граничних умов.

У другому розділі запропоновано метод дослідження лінійних та геометрично нелінійних коливань багатошарових пологих оболонок зі складною формою, в рамках уточненої теорії типу Тимошенка, що ґрунтується на гіпотезі прямої лінії, введеної для всього пакета в цілому.

В рамках цієї теорії рівняння руху оболонки набувають вигляду формула

(1)

формула (2)

формула (3)

де - переміщення точок координатної поверхні; - кути повороту нормалі, а вирази зусиль та моментів мають вигляд

формула (4)

Вирази для деформацій з урахуванням нелінійних доданків визначаються як формула.

У виразах (4) та - зведені характеристики, які обчислюються за відомими формулами, а – коефіцієнти зсуву, - кривини оболонки.

Розв'язання лінійної задачі є однією з головних для знаходження роз'язку нелінійної задачі. Тому розробці методу дослідження власних лінійних коливань багатошарових оболонок зі складною формою плану надається особлива увага. Для розв'язку цієї проблеми запропоновано використовувати метод R-функцій, у поєднанні з варіаційним методом Рітца. За допомогою теорії R- функцій у роботі були побудовані структури розв'язку для основних типів граничних умов та відповідні послідовності координатних функцій.

Наприклад, для вільного обпирання структура має вигляд формула

а для жорсткого закріплення

формула

де - невизначені компоненти побудованих структур розв'язку, які розвинуто в степеневі ряди; - нормалізоване рівняння границі області, що будується за допомогою теорії R-функцій.

Для дослідження нелінійних коливань в рамках теорії Тимошенка накладено обмеження на структуру пакета, а саме запропоновано метод для оболонок симетричної структури. В цьому випадку $K_{ij} = 0$. Суть запропонованого методу зводиться до такого: функції, подаються у вигляді скороченого ряду Фур'є за власними функціями лінійних коливань оболонки які відповідають основній власній частоті, тобто у вигляді

формула (5)

формула (6)

Надалі складові тангенціальних сил інерції у рівняннях (1) не враховуються, оскільки в рамках обраної моделі мають несуттєвий вплив на деформований стан оболонки. Компоненти переміщень, обираємо з міркувань, що вони мають тотожно задовольняти рівняння (1) і відповідні граничні умови. Тож після підстановки (5) в означені рівняння отримаємо систему рівнянь, розв'язок якої може бути поданий у вигляді

формула (7)

У виразах (7) функції повинні задовольняти таку систему рівнянь:

формула (8)

де - відомі лінійні оператори, а - нелінійні оператори

формула

де формула

Задачу (8) з відповідними крайовими умовами можна розглядати як двовимірну задачу теорії пружності при наявності фіктивних масових сил. Розв'язання цієї задачі також запропоновано виконувати за допомогою теорії R-функцій та методу Рітца. В роботі виконана варіаційна постановка цієї задачі, яка зводиться до знаходження точки стаціонарності такого функціонала:

формула (9)

де формула (10)

формула (11)

Завдяки застосуванню RFM системи базисних функцій, які необхідні для дискретизації функціонала (9), були побудовані в аналітичному вигляді, універсальному щодо геометрії оболонки або пластини.

Після підстановки виразів (5), (6), (7) у рівняння (2) та виконання перетворень рівняння, а також застосування процедури Бубнова–Гальоркіна отримаємо звичайне нелінійне диференціальне рівняння

формула (12)

коефіцієнти якого мають вигляд

формула

де - відомі лінійні диференціальні оператори, які наведено в дисертації, а вирази для визначаються за наступними формулами:

формула (13)

Тут - лінійні, а - нелінійні складові для зусиль, тобто а вирази для у (13) співпадають з, коли

Для розв'язання одержаного рівняння (12) використано чисельні методи Рунге-Кутта та Гальоркіна.

У третьому розділі запропоновано метод розв'язання задачі про лінійні та геометрично нелінійні коливання композитних оболонок в рамках класичної теорії. Припускається, що між шарами оболонки немає відриву та проковзування. Гіпотези недеформованої нормалі вводяться для всього пакета в цілому. В рамках цієї теорії математична постановка значно спрощується, бо не враховуються кути повороту нормалі. Тому перерізуючі сили виражаються через моменти, отже маємо три рівняння руху замість п'яти, як в уточненій теорії.

В рамках класичної постановки запропонований метод може бути застосовано для оболонок як симетричної, так і несиметричної структур. Перехід від початково-крайової задачі до задачі Коші відбувається таким чином, як і в випадку уточненої теорії. Тобто розв'язок може бути поданий у вигляді (5), (7). Так само як і у попередньому випадку, функції u_1, v_1, w_1 є компонентами власного вектора, що відповідає власній частоті лінійної задачі, розв'язаної в рамках класичної теорії. Функції u_2, v_2 знаходяться у результаті розв'язання відповідної задачі теорії пружності. Розв'язання цієї задачі співпадає зі знаходженням точки стаціонарності відповідного функціонала (9), але у рамках класичної теорії контурний інтеграл, як показано в дисертаційній

роботі, має інший вигляд. Аналогічно, як і в уточненій теорії, вихідну задачу зведено до звичайного нелінійного рівняння (12), але коефіцієнти цього рівняння мають інший вигляд та визначаються як

формула

де формула (14)

формула (15)

формула

а N_{32} співпадає з (13).

У випадку багатошарової пластини рівняння (12) спрощується, оскільки в цьому разі $\beta = 0$.

Четвертий розділ присвячено розв'язанню тестових та нових задач про лінійно та геометрично нелінійні коливання багатошарових пластин та оболонок за допомогою розробленого методу та створеного програмного забезпечення. Нижче наведено приклади задач, які розв'язані в дисертаційній роботі.

Задача 1. Розглянемо вільні коливання сферичної чотирьохшарової пологої оболонки $(0^0/90^0/90^0/0^0)$, яка опирається на квадратний план зі стороною a . Припустимо, що шари мають однакові фізичні характеристики та товщину. Оболонка вільно обперта по всьому контуру. Геометричні та фізичні параметри: (R_1, R_2 - радіуси кривини оболонки). Розв'язання виконується в рамках уточненої теорії Тимошенка, при цьому коефіцієнти зсуву приймають такими:.

У табл. 1 наведені значення для оболонок з різним радіусом кривини, які порівнюються з результатами роботи [*]. Порівняння результатів свідчить, що відхилення не перевищує 2%.

Таблиця 1.

Задача 2. Розглянемо задачу про нелінійні коливання вільно обпертої прямокутної шестишарової пластини $(0^0/90^0/0^0/90^0/0^0/90^0)$ з такими геометричними характеристиками: $a = 10 \text{ мм}, b = 5 \text{ мм}$. Товщина кожного шару дорівнює 0.1 мм . Характеристики матеріалу мають значення $E_{11} = 5 \cdot 10^4 \text{ МПа}$, $E_{22} = 5 \cdot 10^3 \text{ МПа}$, $\nu_{12} = 0.25$, $G_{12} = 25 \cdot 10^2 \text{ МПа}$. Дослідження виконуються в рамках класичної теорії.

У табл. 2 наведено порівняння одержаних результатів з відомими [*].

Таблиця 2.

З табл. 2 видно, що отримані значення досить добре співпадають зі значеннями, наведеними в літературі, що свідчить про вірогідність запропонованого методу.

Враховуючи, що на практиці часто використовуються багатошарові пластини та оболонки з заповнювачем, за допомогою запропонованого методу було проведено дослідження пластин типу "sandwich".

Задача 3. Розглянемо багатошарову пластину, зображену на рис.1 з такою укладкою шарів: $0^0/90^0/0^0$ /заповнювач/ $0^0/90^0/0^0$.

Рис.1 Форма пластини та спосіб укладки шарів

Нехай пластина виготовлена із матеріалів, пружні сталі яких набувають значення:

а) зовнішні шари – glass polyester: $E_1 = 24,51 \text{ ГПа}$,

$E_2 = 7,77 \text{ ГПа}$, $G_{23} = 1,34 \text{ ГПа}$, $G_{12} = 3,34 \text{ ГПа}$, $G_{13} = 3,34 \text{ ГПа}$,

$\rho_s = 1800 \text{ kg/m}^3$, $\nu_s = 0,078$;

б) заповнювач – HEREX C70.130: $E_c = 103,63 \text{ МПа}$,

$G_c = 50 \text{ МПа}$, $\rho_c = 130 \text{ kg/m}^3$, $\nu_c = 0,32$.

Геометричні характеристики такі: $2a/h = 10$ та $h_c/h = 0,88$. Передбачається два способи закріплення: а) жорстке закріплення; б) вільне обпирання.

У табл. 3 наведені результати дослідження впливу глибини вирізу на величину безрозмірного частотного параметра Λ_i . Зауважимо, що якщо $c \rightarrow a$, а $d \rightarrow 0$, $R_1 \rightarrow 0$, $R_2 \rightarrow 0$, то форма плану розглянутої пластини прямує до квадратної.

Таблиця 3.

Отже, отримані значення власних частот повинні прямувати до відповідних значень квадратної пластини, що і впливає з наведених результатів.

Слід зазначити, що у реальних об'єктах широко використовуються конструкції з різного виду технологічними вирізами. Тому важливо дослідити вплив подібних конструктивних особливостей на власні частоти, форми вільних коливань та на поведінку скелетних кривих. В дисертаційній роботі розв'язано низку подібних задач, в яких вивчаються закономірності динамічної поведінки багатошарових пластин та оболонок в залежності від форми та розмірів подібних технологічних вирізів на поверхні оболонок.

Задача 3. Дослідимо лінійні коливання чотиришарової оболонки, яка має форму плана, зображену на рис. 2.

Рис.2 Форма оболонки

Припустимо, що оболонка виготовлена з матеріалу з такими характеристиками: $E_1 = 25E_2$, $G_{23} = 0.2E_2$, $\nu_{12} = 0.25$, $G_{12} = G_{13} = 0.5E_2$. Задачу розв'язано в рамках уточненої теорії.

Геометричні параметри оболонки $a_1/2a = b_1/2a = 0.15$, $R_1/2a = R_2/2a = 0.35$.

Коефіцієнт зсуву $k_4^2 = k_5^2 = 5/6$. Спосіб укладки шарів ($0^0/90^0/90^0/0^0$).

Припускається, що оболонка вільно обперта. Одержані результати представлені у табл. 4.

Аналіз табл. 4 показує, що значення частот зменшуються при зменшенні вирізу, що відповідає фізичному змісту задачі. Слід зауважити, що при

Таблиця 4.

значеннях $R_1/2a = R_2/2a = 0.001$, $b_1/2a = a_1/2a = 0.499$ отримані частоти наближаються до відповідних значень частот оболонки з прямокутною формою плану. Це підтверджує вірогідність запропонованого методу.

Задача 4. Дослідимо нелінійні коливання вільно обпертої шестишарової пластини (рис. 3а) несиметричної структури з формою укладки шарів $0^0/90^0/0^0/90^0/0^0/90^0$ та з такими геометричними характеристиками: $2a = 20\text{мм}$, $2b = 10\text{мм}$, $a_2 = 3\text{мм}$, $b_1 = 2\text{мм}$.

Рис. 3 Форми пластини

Товщина кожного шару 0.1мм . Пружні сталі матеріалу, з якого виготовлена пластинка, мають значення: $E_{11} = 5 \cdot 10^4 \text{МПа}$, $E_{22} = 5 \cdot 10^3 \text{МПа}$, $\nu_{12} = 0.25$, $G_{12} = 25 \cdot 10^2 \text{МПа}$. Розв'язання задачі виконано в рамках класичної теорії.

На рис. 4а наведено скелетні криві для різних значень параметрів a_1 та b_2 , варіювання яких відповідає різній глибині вирізів. Вказані скелетні криві відповідають таким значенням цих параметрів в мм: L_1 $a_1 = 7.5, b_2 = 3$; L_2 $a_1 = 8.5, b_2 = 4.5$; L_3 $a_1 = 9.99, b_2 = 4.99$; L_4 – прямокутній пластині. Щоб підкреслити універсальність запропонованого методу, яку він набуває завдяки використанню теорії R - функцій, нижче наведено розв'язання задач для пластин, зображених на рис. 3б, 3в, які можуть бути кваліфіковані як окремий випадок задачі 4 (рис. 3а) при відповідному виборі параметрів a_1, a_2 та b_1, b_2 . Для пластин, наведених на рис 3б, вивчається вплив параметра a_1 . Ці скелетні криві (рис. 4б) відповідають таким значенням a_1 в мм: L_1 $a_1 = 7.5$; L_2 $a_1 = 8.5$; L_3 – $a_1 = 9$; L_4 $a_1 = 9.99, b_1 = 4.99$, а для пластини з геометрією, зображеною на рис. 3в, досліджується вплив на скелетні криві параметра b_2 в мм. На рис. 4в наведені криві для таких значень: L_1 $b_2 = 3.5$; L_2 $b_2 = 4.5$; L_3 $b_2 = 4.99$; L_4 $b_2 = 9.99, b_2 = 4.99$.

Рис.4 Залежність скелетних кривих від глибини вирізів пластини

В ході дослідження було встановлено, що для всіх трьох форм пластини при фіксованому значенні амплітуди збільшення глибини вирізів веде до зростання відношення частот. Аналіз графіків свідчить, що при мінімальній глибині вирізів скелетні криві наближаються до відповідних кривих прямокутної пластини. Таким чином, застосування теорії R - функцій дозволяє досліджувати різні геометричні форми пластин та оболонок в рамках єдиної програми, змінюючи тільки деякі параметри.

В останньому параграфі цього розділу було розглянуто декілька практичних задач. Так, було досліджено динамічну поведінку елемента панелі кіля літака (рис.5), розрахунковою схемою якого було обрано тришарову пластину з заповнювачем. Пружні характеристики заповнювача суттєво відрізняються від відповідних характеристик зовнішніх шарів.

Аналогічну задачу в статичній постановці було розглянуто у роботі¹.

Рис. 5 Схема для розрахунку елемента панелі кіля літака

Геометричні характеристики моношару такі: $l = 0.75i$, $a = 0.4i$, товщина $h_i = 8 \cdot 10^{-5}$ м. Верхній шар складається з чотирьох моношарів з наступною укладкою $45^\circ/2$, а нижній – з восьми, які укладені наступним чином $45^\circ/2/90^\circ/2 \pm 45^\circ$. Жорсткісні характеристики матеріалу зовнішніх шарів: $E_1 = 1.35 \cdot 10^5$ МПа, $E_2 = 8 \cdot 10^3$ МПа, $\nu_{12} = 0.286$, $G_{12} = 6 \cdot 10^3$ МПа. Пружні параметри заповнювача приймаються такими: $G_{12} = G_{23} = 1.1622 \cdot 10^5$ МПа, $E_1 = 0.7264 \cdot 10^5$ МПа, $E_2 = 1.4528 \cdot 10^5$ МПа, $G_{13} = 0.5811 \cdot 10^4$ МПа, $\nu_{12} = 0.2552$. Задачу вирішено в рамках уточненої теорії.

Розрахунки проводились для двох способів закріплення зовнішніх шарів панелі: жорсткого закріплення та класичного шарніру. У табл. 5 наведено значення частотного параметра в залежності від способу закріплення.

Таблиця 5

Було вивчено залежності власних частот від кута повороту осей анізотропії нижнього шару. З проведених досліджень зроблено висновок, що коливання частотного параметра не перевищують 4% при зміні кута повороту осей анізотропії.

Для знаходження скелетних кривих елемента панелі кіля літака його було змодельовано у вигляді тришарової пластини з заповнювачем, яка має симетричну структуру. Зовнішні шари складаються з шарів однакової товщини $h_i = 8 \cdot 10^{-5}$ м. Пружні характеристики і геометричні параметри ті ж, що і раніше.

На рис. 6 наведені скелетні криві, які відповідають різній укладці зовнішніх шарів у разі вільного обпирання кіля літака.

Рис.6 Залежність АЧХ від кута повороту осей анізотропії зовнішніх шарів

Крива L_1 відповідає структурі шарів - $0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ$ /заповнювач/ $90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ$, L_2 - $80^\circ/-80^\circ/80^\circ/-80^\circ$ /заповнювач/ $-80^\circ/80^\circ/-80^\circ/80^\circ$, L_3 - $60^\circ/-60^\circ/60^\circ/-60^\circ$ /заповнювач/ $-60^\circ/60^\circ/-60^\circ/-60^\circ$, L_4 - $30^\circ/-30^\circ/30^\circ/-30^\circ$ /заповнювач/ $-30^\circ/30^\circ/-30^\circ/-30^\circ$. З наведених досліджень слідкує, що крива L_1 є найбільш жорсткою.

Одержані результати можуть бути використані при проектуванні подібних елементів у разі дії зовнішніх динамічних навантажень.

У додатку наведено акт використання результатів дисертаційної роботи в учбовому процесі.

ВИСНОВКИ

1. Вперше розроблено ефективний метод дослідження динамічної поведінки композитних багатошарових елементів тонкостінних конструкцій, які моделюються пластинами або пологими оболонками з довільною формою

¹ Шимановский А.В., Оглобля А.И. Теория и расчет несущих элементов большепролетных пространственных конструкций. – К.: Сталь, 2002. – 372 с.

плану та різними видами закріплення. Математичну постановку задачі сформульовано в рамках двох теорій: класичної теорії та уточненої теорії першого порядку, яка враховує деформації зсуву. Запропонований метод базується на використанні теорії R-функцій та варіаційних методів та застосовується як для лінійних, так і для геометрично нелінійних коливань.

2. Узагальнено метод зведення задачі про геометрично нелінійні коливання багатошарових пологих оболонок до задачі Коші для областей складної геометрії. Отримані аналітичні вирази для розрахунку коефіцієнтів нелінійного звичайного диференціального рівняння, до якого зведено вихідну задачу.
3. Вперше побудовані системи базисних функцій для розв'язання динамічних задач для композитних оболонок в рамках теорії типу Тимошенка.
4. Створено програмне забезпечення для системи POLE-RL, що реалізує запропонований метод, містить варіаційні постановки лінійних задач (задачі про власні коливання оболонки та задачі теорії пружності); аналітичні вирази для елементів матриць Рітца, структури розв'язку, що задовольняють задані граничні умови, аналітичні вирази для одержаних коефіцієнтів нелінійного звичайного диференціального рівняння.
5. Перевірено вірогідність отриманих результатів при розв'язанні тестових задач та порівнянні результатів з відомими, а також при використанні «внутрішніх» можливостей пакету POLE-RL.
6. Розв'язано нові задачі про лінійні та нелінійні коливання багатошарових пологих оболонок та пластин, що мають складну форму плану та різні способи закріплення. Проведено дослідження і встановлено закономірності поведінки частот, форм коливань та скелетних кривих при зміні геометричних та механічних характеристик.
7. Розглянуто застосування розробленого методу до розв'язання практичних задач, а саме для дослідження динамічної поведінки елементів конструкції, зокрема елемента панелі кіля літака. Досліджено вплив способу закріплення та способу укладки зовнішніх шарів на частотні характеристики кіля літака. Отримано скелетні криві для панелі кіля літака симетричної структури.
8. Результати дисертаційної роботи були використані на кафедрі прикладної математики НТУ "ХП" у навчальному процесі при викладанні курсу "Рівняння математичної фізики" для спеціальності динаміка і міцність, а також "Диференціальні рівняння" для спеціальності прикладна математика, про що свідчить акт використання результатів дисертаційної роботи в навчальному процесі.

ОПУБЛІКОВАНІ ПРАЦІ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Курпа Л.В. Исследование свободных колебаний анизотропных пластин сложной формы / Л.В. Курпа, Г.Н. Тимченко // Вісник Національного технічного університету «ХП». Збірник наукових праць. Тематичний

- випуск: Динаміка і міцність машин. –Харків: НТУ “ХПІ”. – 2004. – № 20. – С. 39 - 44.
2. Тимченко Г.Н. Расчет динамических характеристик композитных пластин сложной формы в рамках уточненной теории типа Тимошенко / Г.Н. Тимченко // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Збірник наукових праць. Тематичний випуск: Динаміка і міцність машин. – Харків: НТУ “ХПІ”. – 2005. – № 22. – С. 47-52.
 3. Чистіліна Г.В. Застосування методу R – функцій до дослідження вільних коливань багат шарових пластин складної форми / Г.В. Чистіліна, Г.М. Тимченко // Машинознавство.-2005, №7. - С.10-13.
 4. Курпа Л.В. Исследование свободных колебаний многослойных пластин сложной формы в плане / Л.В. Курпа, Г.Н. Тимченко // Прикладная механика. – 2006. – Т.42, №1. – С. 119-125.
 5. Курпа Л.В. Метод исследования нелинейных свободных колебаний композитных пластин сложной формы / Л.В. Курпа, Г.Н. Тимченко // Теоретическая и прикладная механика. – 2006. – Вып. 42. – С. 160 – 165.
 6. Курпа Л.В. Исследование геометрически нелинейных колебаний композитных пластин сложной формы / Л.В. Курпа, Г.Н. Тимченко // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Збірник наукових праць. Тематичний випуск: Динаміка і міцність машин. –Харків: НТУ “ХПІ”. – 2006. – № 21, – С. 113 - 118.
 7. Курпа Л.В. Дослідження вільних коливань багат шарових пластин за допомогою теорії R – функцій / Л.В. Курпа, Г.М. Тимченко // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2006. – Т.49, № 4. - С. 105 - 112.
 8. Курпа Л. Застосування методу R -функцій до розв’язування задач про вільні коливання багат шарових оболонок складної форми плану / Л. Курпа, Г. Тимченко, Г. Лінник // Машинознавство.-2007. = №6. - С. 20-24.
 9. Курпа Л.В. Исследование нелинейных колебаний композитных пластин с помощью теории R -функций / Л.В. Курпа, Г.Н. Тимченко // Проблемы прочности. — 2007. — N 5. — С. 101-113.
 10. L.V. Kurpa Investigations of vibrations of laminated plates of an arbitrary form / L.V. Kurpa, G.N. Timchenko // In: Proc. of the 8 th SSTA Conference, Jurata, Poland. - 2005 – p. 371-375.
 11. Курпа Л.В. Метод исследования геометрически нелинейных колебаний многослойных пластин, имеющих сложную форму плана / Л.В. Курпа, Г.Н. Тимченко // Тезисы докладов IV Международной научной конференции “Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела”. – Донецк-Милекино, - 2006. – С. 235-237.
 12. Тимченко Г.Н. Метод исследования нелинейных колебаний многослойных пластин сложной формы / Г.Н. Тимченко // Тезисы докладов международной конференции «Пятые Окуневские чтения». – Санкт-Петербург, Россия, - 2006. – С. 50 - 51.
 13. Тимченко Г.Н. Исследование нелинейных колебаний композитных пластин и оболочек сложной формы в рамках теории Тимошенко / Г.Н. Тимченко //

- Тезисы докладов конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и механики» – Харьков: ИПМаш им. А.Н. Подгорного НАН Украины, - 2006. – С.98.
14. Timchenko G.N. Research of Layered Shells with Complex Form by R-Function Method / Timchenko G.N., Chistilina A.V. // Book of abstracts 77th Annual Meeting of the Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik. – Berlin (Germany), - 2006. – P. 200.
 15. Курпа Л.В. R-функции для исследования нелинейных колебаний пластин и пологих оболочек сложной планформы при больших амплитудах / Курпа Л.В., Мазур О.С., Пильгун Г.В., Тимченко Г.Н. // Тезисы докладов IX всероссийского съезда по теоретической и прикладной механике – Нижний Новгород: - 2006. Т.1. – С.79.
 16. Курпа Л. В. Метод исследования свободных геометрически нелинейных колебаний многослойных пологих оболочек, имеющих сложную форму плана / Л.В. Курпа, Г.Н. Тимченко // Thesis of reports of International Conf. Dynamical System Modelling and Stability Investigation. – Kiev (Ukraine), 2007. – P. 302.
 17. Курпа Л. Дослідження нелінійних коливань багатопарових пластин складної форми / Л. Курпа, Г. Тимченко // Тези доповідей Міжнародної наукової конференції «Математичні проблеми механіки неоднорідних структур» - Львов, – 2006. - С. 205 - 206.
 18. Тимченко Г.Н. Метод R-функций при дослідженні геометрически нелинейных колебаний многослойных пологих оболочек / Г.Н. Тимченко // Міжнародна конференція «Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій». - Тези доповідей. – Дніпропетровськ - 2007. – С. 287.
 19. Курпа Л. Метод R-функций в задачах о нелинейных колебаниях пологих оболочек / Л. Курпа, Г. Тимченко // Міжнародна конференція «Сучасні проблеми механіки та математики». – Тези доповідей. – Львів - 2008. – С. 149-150.

АНОТАЦІЯ

Тимченко Г.М. Лінійні та геометрично нелінійні вільні коливання багатопарових пластин і пологих оболонок зі складною формою плану. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 01.02.04- механіка деформівного твердого тіла. – Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, Харків, 2008.

Дисертаційна робота присвячена розробці ефективного методу досліджень вільних лінійних та геометрично нелінійних коливань елементів тонкостінних конструкцій, які моделюються багатопаровими пластинами та

пологими оболонками довільної форми. Запропонований метод базується на сумісному застосуванні теорії R-функцій, варіаційних методів і методу Бубнова-Гальоркіна. Розроблений метод дозволяє звести початково-нелінійну систему рівнянь руху пологої оболонки до задачі Коші. Метод було розроблено для наступних постановок задачі: в рамках класичної теорії та уточненої типу Тимошенка. Розроблено програмне забезпечення для системи POLE-RL, за допомогою якого розв'язані нові задачі з лінійних та нелінійних коливань багат шарових пологих оболонок і пластин складної форми при різних способах їх закріплення, різних способах укладки шарів та властивостей матеріалу. Метод також застосовано для розв'язання практичних задач.

Ключові слова: теорія R-функцій, класична теорія й уточнена теорія багат шарових пластин і оболонок, пологі оболонки, геометрично нелінійні коливання, метод Бубнова-Гальоркіна, програмуюча система POLE-RL.

АННОТАЦІЯ

Тимченко Г.Н. Линейные и геометрически нелинейные свободные колебания многослойных пластин и пологих оболочек со сложной формой плана. – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела. - Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины, Харьков, 2008.

В диссертационной работе предложен метод исследования свободных линейных и геометрически нелинейных колебаний элементов тонкостенных конструкций, которые моделируются многослойными пластинами и пологими оболочками произвольной формы плана и различными условиями закрепления. Предложенный метод основан на совместном использовании теории R-функций, вариационных методов и метода Бубнова - Галёркина и применен для исследования уравнений движения композитных оболочек, полученных в рамках классической теории и уточненной теории первого порядка, учитывающей сдвиговые деформации. Применение теории R-функций позволило обобщить классический подход сведения нелинейной системы дифференциальных уравнений движения многослойных пологих оболочек к задаче Коши в случае произвольной геометрии области. При этом в качестве базисных функций для обобщенного ряда Фурье выбраны собственные функции линейной задачи. Предложенный метод реализован в рамках системы POLE-RL, для которой было разработано соответствующее программное обеспечение, позволившее решить серию новых задач линейных и нелинейных колебаний многослойных пологих оболочек и пластин сложной формы для разных способов их закрепления, видов материала и способа укладки слоев. В частности, с помощью предложенного метода были решены практические

задачи. Например, было исследовано динамическое поведение панели киля самолета, расчетной схемой для которого была принята трехслойная пластина с наполнителем. Установлено влияние способа укладки внешних слоев и способа закрепления на частоты и формы колебаний, а также исследовано влияние укладки слоев на скелетные кривые рассмотренного конструктивного элемента. **Ключевые слова:** теория R-функций, классическая теория и уточненная теория многослойных пластин и оболочек, пологие оболочки, геометрически нелинейные колебания, метод Бубнова-Галеркина, программирующая система POLE-RL.

SUMMARY

Timchenko G.N. Linear and geometrically nonlinear vibrations of laminated plates and shallow shells with complex form. - Manuscript.

Thesis for the scientific degree of Candidate of Technical Science by speciality 01.02.04 – mechanics of the deformable solids. A.M. Podgorny's Institute for Problems in Machinery NAS Ukraine, Kharkiv, 2008.

The work is devoted to the development of new effective method to research linear and geometrically nonlinear vibrations of elements of thin-walled constructions that can be modeled as laminated plates and shallow shells with complex planform. The proposed method is based on joint use of the R-function theory, variational methods and Bubnov-Galerkin method. It allows to reduce a initial nonlinear system of the shallow shell motion equation to the Cauchy problem. The method is developed for two mathematical statements of the problem: formulated in the context of classical theory and in the context of the improved Timoshenko's theory. The appropriate software is created for POLE-RL program system to solve new problems of linear and nonlinear vibrations of laminated shallow shells and plates with the complex planform and different ways of clamping, ways of layer packing and properties of material. The method is also used for solving practical problems.

Key words: R-function theory, classical theory and of the improved Timoshenko's theory for laminated plates and shells, shallow shells, geometrically nonlinear vibrations, Bubnov-Galerkin method, POLE-RL program system.

Підписано до друку 07.11.2008 р. Формат 60x90/16.
Папір офсетний. Друк - ризографія. Гарнітура Times New Roman/
Ум. друк. арк.. 0,9. Наклад 100 прим. Зам. № 262750

Надруковано СПДФО Ізрайлев Є.М.
Свідоцтво № 24800170000040432 від 21.03.2001 р.
61002, м. Харків, вул. Фрунзе, 16.