

С.А. Назаренко, канд. техн. наук,  
В.Н. Бурлаенко, канд. техн. наук, Харьков, Украина

## **МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ИДЕНТИФИКАЦИИ ДЕФЕКТОВ ИЗДЕЛИЙ**

*В статті розглянуто деякі проблеми, які виникають при розробці математичних моделей ідентифікації дефектів машин на основі метода скінченних елементів та аналізу чутливості. Розглянуті задачі розрахунку на власні коливання тришарової пластини, яка має дефект, та аналізу чутливості власних частот робочого колеса компресору.*

*Рассмотрены некоторые проблемы, возникающие при разработке математических моделей идентификации дефектов изделий на основе метода конечных элементов и анализа чувствительности, обладающих высоким уровнем адекватности реальным физико-механическим процессам различной природы. Решены задачи расчета на свободные колебания поврежденной трехслойной пластины и анализа чувствительности собственных частот закрытого рабочего колеса компрессора газоперекачивающего агрегата.*

*Problems arising to develop mathematical models based on the FEM and the sensitivity analysis for detection and identification of defects are considered. The free vibration analysis of a damaged tree layer composite plate and sensitivity analysis of natural frequencies of a compressor wheel are solved. Computational stages to obtain gradients of constructional functional are investigated. Application domain for developed mathematical apparatus is discussed.*

На смену этапу применения локальных технологий приходит период внедрения сквозной интегральной автоматизации процессов оптимального проектирования, инженерных расчетов, технологической подготовки, изготовления, управления новыми разработками и сопровождения изделия в течение всего его жизненного цикла класса CAD/CAM/CAE/CAPP/PLM/ERP/PDM/MES [1-5]. Диагностика является основой управления техническим состоянием на различных стадиях жизненного цикла изделия, представляет собой логически последовательный процесс действий с целью получения достаточной информации о месте неисправности и прогноз поврежденной конструкции. Сохранение проектного качества до требований нормативных показателей на стадии изготовления обеспечивается технологической подготовкой производства [3], при эксплуатации и ремонте обеспечивается контролем функционалов состояния (виброакустических, термогазодинамических и других) на соответствие требованиям эксплуатационных норм. Для создания эффективных средств диагностирования и технологий контроля технического состояния необходимо развитие методического, программного, математического, информационного, технического и другого обеспечения.

Прогресс современной вычислительной техники способствовал интеграции соответствующих CAE-технологий для так называемой

симуляции и инженерного анализа моделирования виртуальных испытаний (Simulation & Analysis – S&A) [1-5]. Математический аппарат обратных задач для систем с распределенными параметрами позволяет решать задачи диагностики состояния различных изделий по результатам наблюдений за ними [6]. Получение обратного оператора для краевой задачи при численной реализации приводит к значительным трудностям (например, плохой обусловленности). Аналитические методы, используемые для решения обратных задач, базируются, как правило, на построении функции Грина в сочетании с методами оптимизации и ограничены классическими постановками.

При моделировании дефектов изделий более мощным и универсальным представляется метод конечных элементов [7,8]. При диагностировании требуется формальное отображение дефектов при функционировании изделий. Исходной информацией для этого служит математическая модель изделия при его нормальном функционировании. Появление дефекта приводит к изменению параметров модели, при этом обычно ее структура подобна исходному изделию и отличается от него отдельными компонентами. На первом этапе диагностирования достаточно зафиксировать возникновение дефекта, затем необходимо «локализовать» его. В число таких явлений входят поломки, трещины, повышенный износ и многое другое.

Целью данной работы была разработка моделей идентификации дефектов изделий на основе метода конечных элементов и анализа чувствительности, обладающих высоким уровнем адекватности реальным физико-механическим процессам различной природы; решение на их основе ряда практических задач.

Первым этапом комплексного моделирования сложных составных конструкций является создание конструкторами в САД-системе достоверной объемной электронной (цифровой) модели прототипов (Digital Prototyping). Модель геометрии изделия в компьютерном виде является базовым, содержащим эталонные координаты точек поверхности детали в принятой системе координат. При базовом состоянии изделия его структура свойства (техническое состояние) находятся в соответствии с нормативной документацией и соответствуют его работоспособному состоянию. Параметрическая диагностика базируется на том, что отклонения в работе изделия определяются путем сопоставления анализируемого функционала состояния, полученного с помощью измерений, с базовым значением.

Математизация структурной диагностической модели позволяет установить определенные связи между варьируемыми параметрами (распределение толщины; физико-механических свойств материалов и другое) и функциональными характеристиками. В зависимости от условий решаемой задачи объект может описываться как линейными, так и нелинейными уравнениями. Если это возможно, то имеет смысл решать хотя

бы в первом приближении линейное (линеаризованное) уравнение. Применительно к задачам контроля и диагностирования линейные зависимости пригодны для моделирования неисправностей, если процесс их развития не сопровождается значительными отклонениями параметров, характеризующих состояние объекта.

В качестве диагностической модели рассматривается формальное описание объекта, представленное в аналитической форме уравнениями метод конечных элементов (КЭ). При этом можно получить соотношения, характеризующие изделие при изменении его состояния. Например, решение задачи анализа чувствительности конструкций в резонансном и окологрезонансном состоянии сводится к исследованию функционалов, зависящих от резонирующей собственной частоты и формы колебаний  $J(\bar{u}, \bar{y})$

$$[K - \lambda M] \bar{y} = \bar{0}, \quad \lambda = \omega^2, \quad (1)$$

где  $\bar{y}$  – собственный вектор узловых перемещений (для метода перемещений);  $\lambda$  – собственное значение;  $\omega$  – собственная частота;  $M(\bar{u})$  – матрица масс системы;  $K(\bar{u})$  – матрица жесткости системы;  $\bar{u}$  – вектор варьируемых конструктивных параметров системы.

Анализ чувствительности изделий представляет информацию о характере изменения состояния конструкций при изменении варьируемых параметров [5]. Математическая постановка этой задачи заключается в определении производных от функционала качества по варьируемым параметрам. Эти функциональные производные характеризуют направление и скорость изменения функционала при изменении варьируемых параметров. Предварительный анализ распределения производных позволяет выделить зоны наиболее и наименее существенного влияния на механические показатели переменных проектирования, вследствие чего появляется возможность выбрать минимальный набор варьируемых параметров и за счет этого повысить эффективность и быстродействие вычислительного процесса.

Продифференцируем соотношение (1) по варьируемому переменным, умножим полученное выражение скалярно на  $\bar{y}$ , отбросим слагаемые, которые в силу симметричности матрицы динамической жесткости и в силу (1) обращаются в нуль; получим соотношение для градиента собственного значения

$$\lambda'_{u_i} = \bar{y}^T [K' - \lambda M'] \bar{y} / \bar{y}^T M \bar{y} \quad (2)$$

Принципиальной проблемой анализа чувствительности является характер введения варьируемых параметров. При выборе того или иного варианта введения варьируемых параметров необходимо учитывать: требование взаимной независимости, преимущества аддитивного и локального характера зависимости гамильтониана от варьируемых

переменных; согласование КЭ-дискретизации конструкции со схемой варьирования ее формы при анализе чувствительности; сохранение в пространстве допустимых конструктивных форм справедливости принятых математических моделей; технологическую реализуемость допустимых вариантов и др. Переменные проектирования можно разделить на глобальные параметры, описывающие конструкцию в целом (например, характерные размеры в плане, радиусы главных кривизн и т.д.), и локальные, описывающие геометрические и физические параметры части конструкции (например, распределение толщины). Как видно из соотношений (2) в первом случае нужно брать производные от характерных матриц всей конструкции, а во втором – от матриц гораздо меньшей размерности

$$K = \sum_i k_i \quad K'_u = k'_u,$$

где  $k$  – матрица жесткости отдельного конечного элемента.

При определении функциональных производных возникает проблема дифференцирования характерных матриц, которая вызывает затруднения при неявном задании матриц конечных элементов. В этом случае могут быть применены конечноразностные схемы или неявные процедуры, повторяющие алгоритм построения характерных матриц КЭ. При этом, как видно из соотношений (2), производные локальных матриц по проектным переменным рационально использовать в «связке» с соответствующими компонентами векторов сопряженных переменных и переменных состояния. Такой подход решает многие из перечисленных проблем, а главное, позволяет унифицировать математический аппарат анализа чувствительности

Картины производных можно использовать при разработке рациональной системы технологического контроля наиболее ответственных геометрических размеров при изготовлении, а также дефектности после некоторого периода эксплуатации. При этом коэффициенты чувствительностей используются совместно с анализом общих закономерностей формирования и тенденций изменения спектра собственных частот при варьировании геометрическими и физическими параметрами. Зная спектры собственных частот идеальной (или базовой) и исследуемой конструкции, можно из решения системы линейных уравнений определить величины отклонений конструктивно-технологических параметров вследствие погрешностей изготовления или дефектов эксплуатации.

Для обеспечения оценки работоспособности изделия в нормативной документации необходимо нормировать допускаемые отклонения параметров. Для приближенной оценки характеристик конструкций с малыми изменениями  $\Delta \vec{u}$  от базового варианта  $\vec{u}_0$ , может использоваться оперативный пересчет

$$J \approx J_0 + \vec{\nabla}_u^T J_0 \Delta \vec{u}.$$

В качестве практического приложения выше рассмотренной методики рассмотрим расчет на свободные колебания свободно опертой трехслойной прямоугольной пластины 180×135 мм общей толщины - 7 мм, поврежденной в центре. Верхний и нижний слои пластины толщиной 1 мм сделаны из упрочненного пластика, средний слой толщиной 5 мм - из легкого пористого алюминиевого материала. Данные для материалов пластины указаны в таблице. Под повреждением в пластине понимается круглая область отслоения ее верхнего слоя от среднего, подобный дефект является одним из наиболее распространенных в слоистых структурах. Для описания планарного размера дефекта вводится параметр  $D\%$ , определяющий в процентном содержании часть площади области отслоения к общей площади плана пластины.

Таблица – Физико-механические характеристики.

Упрочненный пластик	$E_x=140$ ГПа, $E_y= E_z=10$ ГПа, $G_{xy}= G_{xz}= 4.6$ ГПа, $G_{yz}= 3.8$ ГПа, $\nu=0.25$ , $\rho= 1650$ кгм <sup>-3</sup>
Алюминиевые слой	$E_x=0.461$ МПа, $E_y= 0.461$ МПа, $E_z=1.494$ ГПа, $G_{xy}=0.194$ МПа, $G_{xz}=341.7$ МПа, $G_{yz}= 192.1$ МПа, $\rho=57.17$ кгм <sup>-3</sup>

Конечноэлементная модель исследуемой пластины, созданная с использованием пакета прикладных программ ABAQUS [9] приведена на рис. 1(а). Отметим, что конечноэлементная сетка разделена на три области: I - зона отслоения с мелким разбиением, II – зона вокруг области отслоения с постепенно уменьшающей плотностью разбиения, III – зона без отслоения с грубой разбивкой на конечные элементы. Частичное нарушение связи между слоями пластины в области отслоения моделировалось созданием пустоты между ними толщиной равной 1% от толщины верхней пластины. Для этого использовались двойные узлы, имеющие одинаковые координаты в плане и различные по толщине пластины, рис.1(б). С целью не допустить физически невозможное перекрывание отслоенных участков были введены трехмерные пружинные элементы между двойными узлами, рис.1(б). Более детальное описание конечноэлементной модели можно найти в работе [10].

Задача об определении собственных частот и форм колебаний решена с использованием процедур Ланцоша и метода вращений Якоби. Влияние присутствия области отслоения, как индикатора чувствительности, показано сравнением значений собственных частот и форм колебаний поврежденной пластины и пластины без повреждения. Результаты расчетов показывают, что, в общем, поврежденная пластина имеет собственные частоты ниже, чем неповрежденная. Причем такой сдвиг в частотах увеличивается с повышением моды колебаний. На рис. 2 показано сдвиг собственных частот поврежденной пластины по отношению к соответствующим частотам неповрежденной для разных мод колебаний.

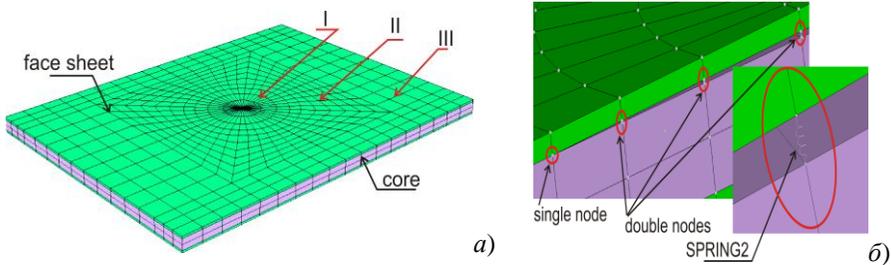


Рисунок 1 – Конечноэлементная модель трехслойной пластины с дефектом в центре

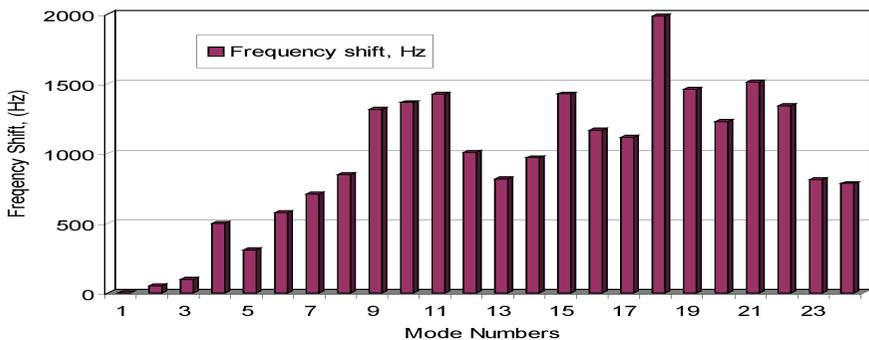


Рисунок 2 – Сдвиг собственных частот поврежденной пластины

На рис. 3. показаны первые шесть собственных частот и форм колебаний поврежденной пластины. Собственные формы колебаний поврежденной пластины обладают не только глобальными, но и локальными деформациями в области отслоения, относительная величина которых зависит от симметрии или асимметрии собственной формы.

С целью демонстрации дополнительных возможностей предлагаемого подхода рассмотрим центробежное колесо турбокомпрессорного агрегата, имеющее сложную пространственную форму, обусловленную требованиями обеспечения газодинамических характеристик потока с минимальными потерями (рис. 4). Конструкция закрытого колеса включает в себя ступицу, переходящую в основной (несущий) диск; покрывающий (покрывной, наружный) диск, который может переходить в уплотнительное кольцо; рабочие лопатки, соединяющие диски. Основной и покрывающий диски, уплотнительное кольцо и ступица представляют собой осесимметричные тела вращения. В идеальном случае рабочее колесо компрессора обладает поворотной циклической симметрией (является циклически симметричной конструкцией - ЦСК), т.е. будучи повернутым относительно оси вращения на любой угол, кратный  $360/N$ , где  $N$ -число лопаток, сохранит инвариантность

своих геометрических и физических свойств, определяемых в неподвижной системе координат.

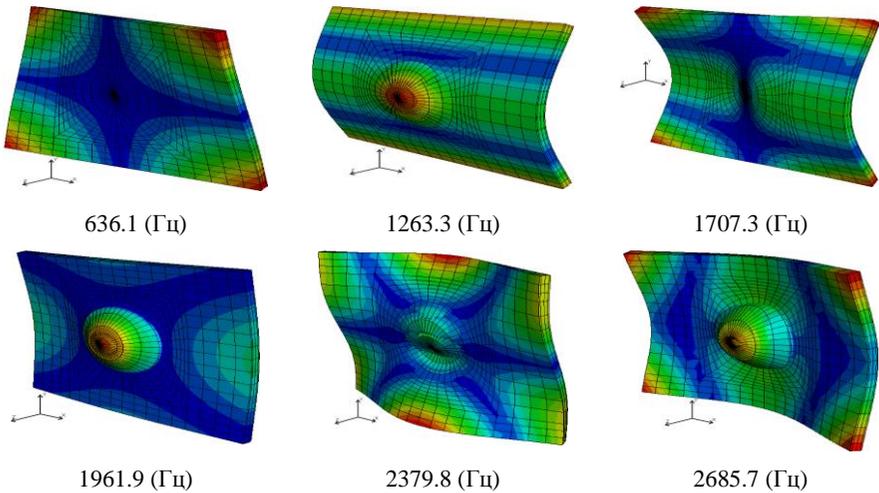


Рисунок 3 – Собственные формы колебаний пластины с дефектом в центре

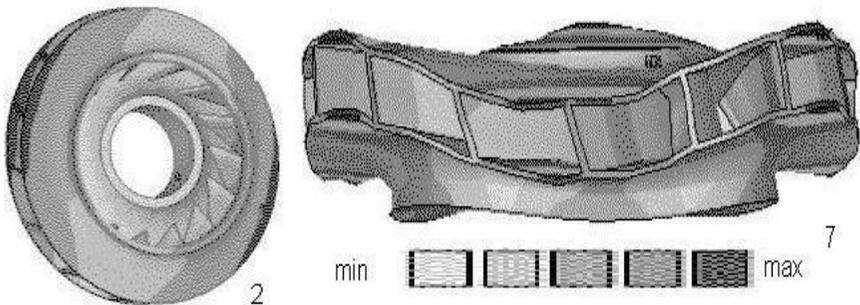


Рисунок 4 – Картины производных 2, 7 собственных частот рабочего колеса первой ступени газоперекачивающего турбокомпрессора к изменению распределения приведенного модуля упругости (жесткостным характеристикам)

Рабочие колеса компрессоров считаются связанными ЦСК, так как основные рабочие подструктуры которых (лопатки) из соображений прочности и функционального назначения объединены замкнутыми конструктивными элементами, представляющими деформируемые участки дисков, направляющих газовый поток. Наложение распределения толщин на срединную поверхность образует поверхности корытца и спинки, а

пересечение их с коническими поверхностями меридиональных обводов прочной части полностью определяет лопатку колеса. Внутренний меридиональный обвод лопатки формирует границу осесимметричной ступицы, которая может иметь конусную или более сложную подрезку, сохраняющую циклическую симметрию колеса. При разработке конечноэлементной модели учитывались: тонкостенность лопаток при относительной массивности конструкции, ее технологическое членение, высокие требования к точности расчета, экспертная оценка влияния на расчетные характеристики элементов колеса.

Для анализа чувствительности собственных частот закрытого рабочего колеса компрессора газоперекачивающего агрегата для газлифтной добычи нефти, имеющего 15 секций, использовалась конечноэлементная модель на основе 20-узловых трехмерных изопараметрических конечных элементов (рис. 4). Светлыми тонами показана зона близких к нулю коэффициентов чувствительности, темными - экстремальных.

В статье рассмотрены некоторые проблемы, возникающие при разработке на единой научно-методологической основе математических моделей идентификации дефектов изделий на основе метода конечных элементов и анализа чувствительности, обладающих высоким уровнем адекватности реальным физико-механическим процессам различной природы. С целью демонстрации предлагаемых подходов решены задачи расчета на свободные колебания поврежденной трехслойной пластины и анализа чувствительности собственных частот закрытого рабочего колеса компрессора газоперекачивающего агрегата для газлифтной добычи нефти. С помощью цифрового прототипа изделия можно уменьшить число опытных образцов, ускорить выпуск конструкций на рынок.

**Список литературы:** 1. *Piegl L.A.* Ten challenges in computer-aided design. // Computer-aided design. -2005. - №37. - P. 461-470. 2. <http://www.cimdata.com/> 3. *Грабченко А.И., Доброскок В.Л., Чернишов С.И.* Система моделирования рабочих процессов интегрированных технологий. // Сучасні технології у машинобудуванні: Збірник наукових статей – Харків: НТУ «ХПІ», 2007. С. 236-268. 4. *F Flager, B Welle, P Bansal, G Soremekun* [Multidisciplinary process integration and design optimization of a classroom building](#) // Journal of Information Technology in Construction(ITcon). – 2009. - Vol. 14. - P. 595-612. 5. *Назаренко С.А* Анализ чувствительности конструкций при воздействии физических полей различной природы // Вестник НТУ «ХПИ». - 2006. - № 32. - С. 119-122. 6. *Ободан Н. И., Шульга А. С.* Идентификация дефектов в деформируемых телах // Проблемы машиностроения. – 2005. - №1 – С. 33-37. 7. *Z. Li, S. Xia, J. Wang, X. Su* Damage detection of cracked beams based on wavelet transform // International Journal of Impact Engineering. - 2006 - №32 (7). - P. 1190–1200. 8. *W. Xiang, X.F. Chen, Z.J. He, B. Li, Y.M. He* Identification of a crack in a beam based on the finite element method of a B-spline wavelet on the interval // Journal of Sound and Vibration. – 2006 - №296 (4,5). - P. 1046–1052. 9. ABAQUS User Manual: Version 6.6 / ABAQUS Inc. Pawtucket, Rhode Island, USA, 2006. 10. *Burlayenko V.N., Sadowski T.* Influence of skin/core debonding on free vibration behavior of foam and honeycomb cored sandwich plates // International Journal of Non-linear Mechanics. – 2009. - doi:10.1016/j.ijnonlinmec. 2009.07.02.

*Поступила в редколлегию 27.04.2010*