

В.Н. Ткаченко, канд. техн. наук, Харьков, Украина

АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ГИБКОГО КОЛЕСА ВОЛНОВОЙ ЗУБЧАТОЙ ПЕРЕДАЧИ

В статті наведена методика і підсумки аналізу напружено-деформованого стану гнучкого колеса хвильової передачі. Для визначення напружень використовується технічна моментна теорія циліндричних оболонок. Це дозволяє визначити напруження згину в перерізах, які містять та перпендикулярні осі оболонки. Підсумки розрахунків порівнюються з підсумками тензовимірювання.

В статье приведена методика и результаты анализа напряженно-деформированного состояния гибкого колеса волновой передачи. Для определения напряжений применяется техническая моментная теория цилиндрических оболочек. Это позволяет определять напряжения изгиба в сечениях содержащих и перпендикулярных оси оболочки.

V.N. TKACHENKO

THE ANALYSIS OF THE IS INTENSE-DEFORMED CONDITION OF THE FLEXIBLE WHEEL OF THE WAVE TOOTH GEARING

The article presents the results investigation supple wheels harmonic drive. To determine the tension the technical general theory of cylindrical shells is used. This allows us to determine the bending tension in sections containing and perpendicular compared with the results of experiment.

Изгибная прочность и выносливость гибкого колеса (ГК) волновой зубчатой передачи (ВЗП) в значительной степени определяет работоспособность всей передачи. ГК – цилиндрическая оболочка, которая соединяется с выходным валом через гибкую круглую пластину, или шлицевым соединением.

Определение напряжений σ_{θ} во впадинах между зубьями венца ГК ВЗП позволяет провести его проверку на изгибную выносливость, с целью предотвращения поломок во впадинах. Генератор волн деформации на вершине волны, там, где гибкое и жесткое колеса полностью входят в зацепление, прижимает зубчатый венец к жесткому колесу так, что в месте перехода от зубчатого венца к ГК резко увеличивается меридиональный изгибающий момент M_{ξ} и соответственно напряжения σ_{ξ} . Поэтому проверочный расчет на изгибную выносливость по напряжениям σ_{θ} следует дополнить аналогичным по напряжениям σ_{ξ} .

Определение напряжений в цилиндрической оболочке сводится к решению системы трех дифференциальных уравнений в частных производных [1]

$$L_{11}U + L_{12}V + L_{13}W = F_1,$$

$$L_{21}U + L_{22}V + L_{23}W = F_2,$$

$$L_{31}U + L_{32}V + L_{33}W = F_3.$$

Здесь U, V и W - перемещения точек срединной поверхности оболочки в осевом, окружном радиальном направлениях; F_i - внешние силовые воздействия

$$L_{11} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2};$$

$$L_{12} = L_{21} = \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \theta};$$

$$L_{13} = L_{31} = -\mu \frac{\partial}{\partial \xi};$$

$$L_{22} = \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + a^2 \left[2 - \mu \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right];$$

$$L_{23} = L_{32} = -\frac{\partial}{\partial \theta} + a^2 \left[2 - \mu \frac{\partial^3}{\partial \xi^2 \partial \theta} + \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \right];$$

$$L_{33} = 1 + a^2 \Delta^2 \Delta^2,$$

$$\Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \text{оператор Лапласа.}$$

θ и ξ - угловая и относительная осевая координаты; $a^2 = H^2 / 12R^2$. Где H, R и L - толщина, радиус срединной поверхности и длина оболочки; E и μ - модуль упругости и коэффициент Пуассона.

Равенства $L_{ij} = L_{ji}$, $i, j = 1, 2, 3$ следуют из теоремы взаимности Бетти, причем алгебраические дополнения D_{ij} такого определителя обладают свойством симметрии, то есть $D_{ij} = D_{ji}$. При вычислении алгебраических дополнений членами порядка H/R по сравнению с единицей пренебрегаем.

В этом случае получим:

$$D_{13} = -\frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^3}{\partial \xi \partial \theta^2} + \frac{\mu}{2} \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^3}{\partial \xi^3};$$

$$D_{23} = \frac{1-\mu}{2} \frac{2+\mu}{2} \frac{\partial^3}{\partial \xi^2 \partial \theta} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^3}{\partial \theta^3};$$

$$D_{33} = \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 1-\mu \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \theta^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^4}{\partial \theta^4}.$$

В связи с тем, что оболочка (ГК ВЗП) деформируется силами, расположенными на ее торцах, где $\xi = 0$ и $\xi = L/R$, то можно свести задачу к решению однородной системы при заданных перемещениях на торцах – неоднородных граничных условиях. Так как перемещения, внутренние усилия и изгибающие моменты являются периодическими функциями угла θ , то решение системы ищут методом разделения переменных с наложением условий периодичности по углу θ .

Интегрирование и задание граничных условий выполняется в отдельности для каждой гармоники с последующей суперпозицией по m , так, что любое из трех перемещений, например,

$$W = \sum_{m=1}^n [W_{mc} \xi \cos m\theta + W_{mo} \xi \sin m\theta].$$

После определения перемещений u, v и W усилия и моменты находятся по следующим зависимостям

$$T = \frac{E \cdot H}{R} \frac{1}{1-\mu^2} \left[\frac{\partial U}{\partial \xi} + \mu \left(\frac{\partial V}{\partial \theta} - W \right) \right];$$

$$N = -\frac{E \cdot H \cdot a^2}{R} \frac{1}{1-\mu^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\Delta W + \frac{\partial V}{\partial \theta} \right);$$

$$S = \frac{E \cdot H}{R} \frac{1}{1+\mu} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + a^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial W}{\partial \theta} + V \right) \right];$$

$$M_\xi = -\frac{E \cdot H \cdot a^2}{R^2} \frac{1}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} + \mu \frac{\partial V}{\partial \theta} \right);$$

$$M_\theta = -\frac{E \cdot H \cdot a^2}{R^2} \frac{1}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{\partial V}{\partial \theta} \right).$$

Здесь T, N и S - силы в осевом, радиальном и окружном направлениях, M_θ и M_ξ - изгибающие моменты в сечениях плоскостями, содержащими и перпендикулярными оси оболочки соответственно.

Рассмотрим граничные условия для двух наиболее распространенных способов присоединения ГК к валу – шлицевое и с помощью гибкой диафрагмы. Оба способа крепления обеспечивают возможность осевых перемещений ГК. При шлицевом соединении при $\xi = L/R$

L и R - длина и радиус срединной поверхности оболочки;

$W = W \theta$ - задается геометрией генератора волн деформации ГК;

$M_\xi = 0$; $T = 0$; $V = \int W \theta d\theta$ - условие нерастяжения ГК в окружном направлении.

При $\xi = 0$ $W = V = T = M_\xi = 0$.

При соединении колеса с валом гибкой диафрагмой изменяются граничные условия только при $\xi = 0$ $W = V = T = M_\xi = 0$. Осевые смещения $U = U M_\xi, T$ и угол поворота образующей $\gamma = \gamma M_\xi, T$ можно определить методом последовательных приближений решением уравнения изгиба диафрагмы – гибкой круглой пластинки, жестко закрепленной к выходному валу и деформированной в месте соединения ее с ГК моментом M_ξ и осевой силой T , с которыми оболочка и пластина взаимодействуют друг с другом.

Вначале для ГК при $\xi = 0$ $W = V = T = M_\xi = 0$ задаем $W = V = \gamma = U = 0$, что соответствует случаю жесткой заделки торца. На практике такой способ закрепления не применяется, так как значительно увеличивает нагрузки на генератор волн и напряжения σ_ξ . Вычисленные усилия T и M_ξ для этого случая задаются в качестве граничных условий задачи изгиба пластины, что позволяет найти угол поворота образующей γ и осевое смещение U в месте соединения пластины и оболочки. Они в свою очередь образуют граничные условия задачи изгиба оболочки в последующей итерации [2].

Обработка результатов расчетов позволяет сделать следующий вывод: напряжения $\sigma \theta$, доминирующие в области зубчатого венца, ГК зависят, в основном, от закона деформации $W \theta$ при заданной толщине H .

Закон распределения напряжений $\sigma \xi$ приведен на рис. 1а.

В области зубчатого венца генератор на волне деформации прижимает ГК к жесткому, так что здесь угол γ поворота образующей значительно

уменьшается. Для самого неблагоприятного случая $\gamma = 0$. При этом наблюдается возрастание σ_{ξ} (рис. 1б), которое следует учитывать при проверке на выносливость.

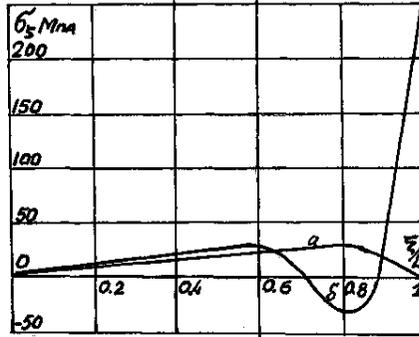


Рисунок 1 – Распределение напряжений σ_{ξ} по образующей оболочки

Результаты расчетов сравнивались с результатами тензометрирования ГК при статическом нагружении передачи. Относительная погрешность не превышала 7%.

Радиальные перемещения $W \theta$ максимальны в области зубчатого венца и уменьшаются по мере удаления от деформированного края ГК, причем в сечении перпендикулярном оси ГК на расстоянии $L = 2R$ радиальные перемещения $W \theta$ обращаются в ноль. Очевидно, что при длине ГК $L = 2R$, работа, необходимая для его деформирования генератором волн, минимальна. В этом случае также уменьшаются нагрузки на опоры качения генератора.

Список использованных источников: 1. Гольденвейзер А.И. Теория упругих тонких оболочек. Гостехиздат, 1973 г. 351 с. 2. Ткаченко В.Н. Анализ влияния закрепления гибкого колеса волновой зубчатой передачи на его напряженное состояние. Вестник НТУ «ХПИ», № 6, 2001 г.

Поступила в редколлегию 18.05.2011

Bibliography (transliterated): 1. Gol'denvejzer A.I. Teorija uprugih tonkih obolochek. Gostehizdat, 1973 g. 351 s. 2. Tkachenko V.N. Analiz vlijaniya zakrepleniya gibkogo kola volnovoju zubchatoju peredachi na ego naprjazhennoe sostojanie. Vestnik NTU «HPi», № 6, 2001 g.