

В.М. Тонконогий, д-р техн. наук, А.А. Березовский,  
А.В. Андросюк, Одесса, Украина,  
Т.И. Носенко, канд. техн. наук, Киев, Украина

## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТЕПЛОМАССОБМЕННЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ ВАКУУМНОМ КАТОДНОМ ОСАЖДЕНИИ ПОКРЫТИЙ

*Запропоновані математичні моделі тепломасообмінних процесів при нанесенні покриттів на деталі машин і різальний інструмент методом конденсації у вакуумі на поверхні виробу речовини із плазмової фази з іонним бомбардуванням – методом КІБ. Моделі призначені для використання при проектуванні технологічного процесу нанесення, а також для управління процесом у реальному часі.*

*Предложены математические модели тепломассообменных процессов при нанесении покрытий на детали машин и режущий инструмент методом конденсации в вакууме на поверхности изделия вещества из плазменной фазы с ионной бомбардировкой — методом КИБ. Модели предназначены для использования при проектировании технологического процесса нанесения, а также для управления процессом в реальном времени.*

V.M. TONKONOYI, A.A. BEREZOVSKIY, A.V. ANDROSJUK, T.I. NOSENKO  
MATHEMATICAL MODELS OF HEAT-MASS EXCHANGE PROCESSES AT VACUUM CATHODIC SEDIMENTATION OF COVERINGS

*Mathematical models of heat-mass exchange processes at coverings drawing on details of machines and cutting tool by a condensation method in vacuum on a surface of a product of substance from a plasma phase with ion bombardment – method CIB are offered. Models are intended for use at designing of technological process of drawing, and also for steering of process in real time.*

Важнейшим фактором проектирования и управления процессами нанесения покрытий методом КИБ является наличие адекватной модели тепло-массообменных процессов в вакуумной камере. Построение такой модели рассмотрим отдельно для тепло и массообменных процессов.

**Модель теплообменных процессов.** Температура  $T$  инструмента на этом этапе считается зависящей только от времени:  $T = T(\tau)$ . Модель учитывает следующие переменные: выход  $T(\tau)$  – температура инструмента; вход (управление)  $U_{\text{и}}(\tau)$  – напряжение на подложке и возмущение  $q(\tau)$  – тепловой поток от инструмента к кассете, в которой он закреплен.

Для построения динамической модели процесса нанесения покрытия *по температуре* запишем *энергетический баланс* для инструмента:

$$\frac{dQ_{\text{и}}}{d\tau} = q_{\text{дуги}} - q_{\text{к}} - q_{\text{изл}}, \quad (1)$$

где  $Q_{\text{и}}$  – теплосодержание инструмента, Дж;  $q_{\text{дуги}}$  – тепловой поток, входящий в инструмент за счет бомбардировки ионами, Дж/с;  $q_{\text{к}}$  – тепловой поток, отдаваемый инструментом кассете, в которой он закреплен, Дж/с;  $q_{\text{изл}}$  – тепловой поток, отдаваемый инструментом за счет излучения, Дж/с.

Полагая, как условлено, на этапе нанесения покрытия температуру инструмента  $T$  постоянной по всему его объему и зависящей только от времени, запишем для теплосодержания  $Q_{и}$  [1]:

$$Q_{и} = c_{и}\rho_{и}V_{и}T, \quad (2)$$

где  $c_{и}$  – теплоемкость материала инструмента, Дж/кг·К;  $\rho_{и}$  – плотность материала инструмента, кг/м<sup>3</sup>;  $V_{и}$  – объем инструмента, м<sup>3</sup>, или в дифференциальной форме:

$$\frac{dQ_{и}}{dt} = c_{и}\rho_{и}V_{и} \frac{dT}{dt}. \quad (3)$$

Тепловой поток, отдаваемый инструментом кассете, в которой он закреплен  $q_k$  является возмущением.

Напряжение подложки  $U_{п}$  является управлением по температуре

$$u_{T} = U_{п}. \quad (4)$$

Тепловой поток от дуги может быть найден по уравнению [2]:

$$q_{изл}(\tau) = s\varepsilon\sigma_0 T_{п}^4(\tau), \quad (5)$$

где  $\varepsilon$  – степень черноты поверхности излучения;  $\sigma_0$  – коэффициент излучения абсолютно черного тела ( $\sigma_0 = 0,576 \cdot 10^{-7}$  Вт/м<sup>2</sup>·К<sup>4</sup>), а от излучения:

$$q(\tau) = js \left( \frac{E_0}{\bar{z}e} + U_{п}(\tau) \right) - s\varepsilon\sigma_0 T_{п}^4(\tau) \quad (6)$$

Подставляя (5), (6) и (3) в (1), получим дифференциальное уравнение динамики нагрева инструмента в процессе нанесения покрытия в виде:

$$c_{и}\rho_{и}V_{и} \frac{dT(\tau)}{dt} = -s\varepsilon\sigma_0 T^4(\tau) - q_k(\tau) + jsU_{п}(\tau) + js \frac{E_0}{\bar{z}e} \quad (7)$$

при начальных условиях:

$$T(0) = T_0. \quad (8)$$

Таким образом, в уравнении (7):  $T(\tau)$  – выход объекта;  $U_{п}(\tau)$  – управление;  $q_k(\tau)$  – возмущение.

После преобразований и подстановок:  $c_{и}\rho_{и}V_{и} = a_1$ ;  $s\varepsilon\sigma_0 = a_2$ ;  $js = a_3$ ;

$js \frac{E_0}{\bar{z}e} = a_4$  получим из (7) окончательно [3]:

$$a_1 \frac{dT(\tau)}{dt} = -a_2 T^4(\tau) - q(\tau) + a_3 U_{п}(\tau) + a_4. \quad (9)$$

Положим в нелинейном дифференциальном уравнении (9)  $q(\tau) = \text{const}$ ;  $U_{п}(\tau) = \text{const}$ . Тогда после разделения переменных оно принимает вид:

$$\frac{dT}{A^4 - T^4} = B d\tau, \quad (10)$$

$$A = A(u, q) = \sqrt[4]{\frac{a_3 u + a_4 - q}{a_2}}; \quad B = \frac{a_2}{a_1}. \quad (11)$$

где

После интегрирования уравнения (10) [4, 5] получаем:

$$\frac{1}{4A^3} \ln \frac{A+T}{A-T} + \frac{1}{2A^3} \operatorname{arctg} \frac{T}{A} = B\tau + C \quad (12)$$

Постоянную интегрирования  $C$  найдем из начального условия (8):

$$C = \frac{1}{4A^3} \ln \frac{A+T_0}{A-T_0} + \frac{1}{2A^3} \operatorname{arctg} \frac{T_0}{A} \quad (13)$$

Наконец, подставляя (13) в (12), получим окончательное решение [3]:

$$\frac{1}{2A^3 B} \left[ 0,5 \ln \frac{(A+T)(A-T_0)}{(A-T)(A+T_0)} + \operatorname{arctg} \frac{A(T-T_0)}{A^2 + TT_0} \right] = \tau \quad (14)$$

Программным решением для этой стадии процесса является постоянное значение температуры  $T_{\text{пр}} = T_{\text{нат}}$ , а программным управлением некоторое значение  $U_{\text{п(пр)}}$ , обеспечивающее заданное значение температуры в статическом режиме.

**Модель массообменных процессов.** Технологическая схема массообменных процессов на этапе нанесения покрытия приведена на рис. 1. На схеме обозначены учитываемые моделью потоки азота:  $m_{\text{под}}$  – регулируемая подача газа из отдельной емкости;  $m_{\text{нат}}$  – натекание воздуха в вакуумную камеру через дефекты уплотнений;  $m_{\text{отс}}$  – расход азота за счет откачки вакуумным насосом;  $m_{\text{хр}}$  – расход азота на химическую реакцию с титаном при образовании нитрида титана TiN.

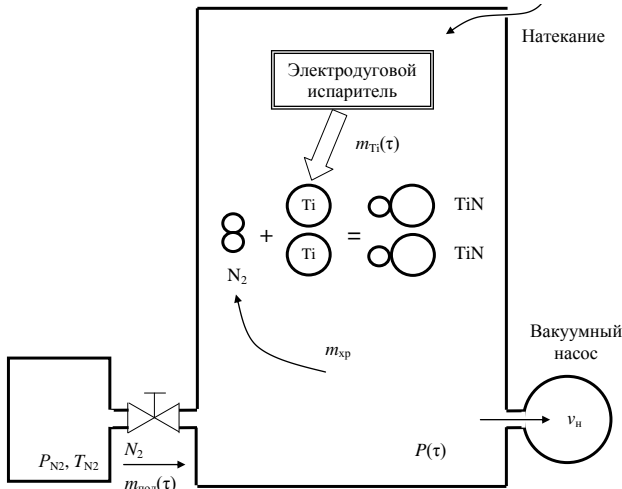


Рисунок 1 – Технологическая схема процесса нанесения ионно-плазменного покрытия на режущий инструмент (массовая составляющая)

Для построения динамической модели процесса нанесения покрытия по давлению азота запишем массовый баланс для газа в вакуумной камере:

$$\frac{dM_{N_2}}{d\tau} = m_{\text{под}} + m_{\text{нат}} - m_{\text{отс}} - m_{\text{хр}}, \quad (15)$$

где  $M_{N_2}$  – масса газообразного азота в вакуумной камере, кг;  $m_{\text{под}}$  – приход азота за счет принудительной подачи его в камеру, кг/с;  $m_{\text{нат}}$  – приход азота за счет натекания воздуха из атмосферы из-за негерметичности камеры, кг/с;  $m_{\text{отс}}$  – расход азота за счет работы вакуумного насоса, кг/с;  $m_{\text{хр}}$  – расход азота на химические реакции в камере, кг/с.

Полагая на этапе нанесения объем вакуумной камеры и температуру газа постоянными, запишем на основании закона Менделеева-Клапейрона:

$$M_{N_2} = \frac{\mu_{N_2} V_k}{RT_k} P_{N_2}, \quad (16)$$

где  $\mu_{N_2}$  – молекулярный вес азота ( $\mu_{N_2} = 28$ );  $V_k$  – объем вакуумной камеры, м<sup>3</sup>;  $R$  – универсальная газовая постоянная ( $R = 8,314$  Дж·г-моль/К), м<sup>3</sup>;  $T_k$  – температура газовой смеси в вакуумной камере, К;  $P_{N_2}$  – парциальное давление азота, Па, или в дифференциальной форме:

$$\frac{dM_{N_2}}{dt} = \frac{\mu_{N_2} V_k}{RT_k} \cdot \frac{dP_{N_2}}{dt}. \quad (17)$$

Массовый приход азота за счет принудительной подачи его в камеру  $m_{\text{под}}$  является управлением по давлению:

$$u_p = m_{\text{под}}, \quad (18)$$

Массовый приход азота за счет натекания воздуха из атмосферы из-за негерметичности камеры  $m_{\text{нат}}$  в пределах одного цикла нанесения является величиной постоянной и равной:

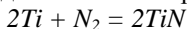
$$m_{\text{нат}} = 0,79 \frac{\mu_{N_2} H}{RT_k}, \quad (19)$$

где 0,79 – доля парциального давления азота в воздухе;  $H$  – натекание, м<sup>3</sup>·Па/с. Массовый расход азота за счет работы вакуумного насоса  $m_{\text{отс}}$  определяется из выражения:

$$m_{\text{отс}} = \frac{\mu_{N_2} v_n}{RT_k} P_{N_2} \quad (20)$$

где  $v_n$  – объемная производительность вакуумного насоса, м<sup>3</sup>/с.

Наконец, массовый расход азота на химические реакции в камере  $m_{\text{хр}}$  может быть рассчитан, исходя из стехиометрии химической реакции



по формуле:

$$m_{\text{хр}} = m_{Ti} \cdot \frac{0,5\mu_{N_2}}{\mu_{Ti}}, \quad (21)$$

где  $m_{Ti}$  – масса титана, израсходованного за один цикл нанесения, кг;  $\tau_n$ ,  $\tau_k$  – соответственно, время начала и окончания цикла, с;  $\mu_{Ti}$  – молекулярный вес титана ( $\mu_{Ti} = 48$ ).

Подставляя (17) – (21) в (15), получим дифференциальное уравнение динамики изменения давления газов в вакуумной камере в процессе нанесения покрытия в виде:

$$\frac{\mu_{N_2} V_K}{RT_K} \cdot \frac{dP_{N_2}(\tau)}{d\tau} = -\frac{\mu_{N_2} v_H}{RT_K} P_{N_2}(\tau) + m_{\text{под}}(\tau) - \frac{0,5\mu_{N_2}}{\mu_{Ti}} m_{Ti}(\tau) + 0,79 \frac{\mu_{N_2} H}{RT_K} \quad (22)$$

при начальном условии:

$$P_{N_2}(0) = P_{N_2,0} \quad (23)$$

После преобразований и подстановок:

$$a_1 = \frac{\mu_{N_2} V_K}{RT_K}; \quad a_2 = \frac{\mu_{N_2} v_H}{RT_K}; \quad a_3 = \frac{0,5\mu_{N_2}}{\mu_{Ti}}; \quad a_4 = 0,79 \frac{\mu_{N_2} H}{RT_K}$$

получим окончательно:

$$a_1 \frac{dP_{N_2}(\tau)}{d\tau} = -a_2 P_{N_2}(\tau) + m_{\text{под}}(\tau) - a_3 m_{Ti}(\tau) + a_4 \quad (24)$$

Полагая в (24)  $m_{\text{под}}(\tau) = \text{const}$  и  $m_{Ti}(\tau) = \text{const}$ , а также:

$$A = \frac{a_2}{a_1}; \quad B = \frac{m_{\text{под}} - a_3 m_{Ti} + a_4}{a_1} \quad (25)$$

преобразуем линейное дифференциальное уравнение (24) к виду:

$$\frac{dP_{N_2}(\tau)}{d\tau} + AP_{N_2}(\tau) - B = 0; \quad P_{N_2}(0) = P_{N_2,0} \quad (26)$$

Уравнение (26) имеет следующее решение [3]:

$$P_{N_2} = \left( P_{N_2,0} - \frac{B}{A} \right) e^{-A\tau} + \frac{B}{A} \quad (27)$$

Программным решением для этой стадии процесса является постоянное значение давления  $P_{N_2} = P_{N_2,0}$ , а программным управлением некоторое значение  $m_{\text{под(пр)}}$ , обеспечивающее заданное значение давления в статическом режиме.

**Список использованных источников:** 1. Лыков А.В. Теория тепло- и массопереноса / А.В. Лыков, Ю.А. Михайлов. – М. – Л.: Госэнергоиздат, 1963. – 536 с. 2. Блох А.Г. Основы теплообмена излучением. – М.: Госэнергоиздат, 1962. – 332 с. 3. Тонконогий В.М. Моделирование технологического процесса нанесения вакуумного износостойкого покрытия на режущий инструмент / Материалы XI семинара «Моделирование в прикладных научных исследованиях». – Одесса: ОНПУ, 2004. – С. 17 – 20. 4. Пехович А.И. Расчеты теплового режима твердых тел / А.И. Пехович, В.М. Жидких. – Ленинград: Энергия, 1976. – 351 с. 5. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Высшая школа, 1967. – 409 с.

Поступила в редколлегию 12.05.2011

**Bibliography (transliterated):** 1. Lykov A.V. Teorija teplo- i massoperenosa / A.V. Lykov, Ju.A. Mihajlov. – M. – L.: Gosjenergoizdat, 1963. – 536 s. 2. Bloh A.G. Osnovy teploobmena izlucheniem. – M.: Gosjenergoizdat, 1962. – 332 s. 3. Tonkonogij V.M. Modelirovanie tehnologicheskogo processa nanesheniya vakuumnogo iznosostojkogo pokrytija na rezhujij instrument / Materialy HI seminaru «Modelirovanie v prikladnyh nauchnyh issledovanijah». – Odessa: ONPU, 2004. – S. 17 – 20. 4. Pehovich A.I. Raschety teplovogo rezhima tverdyh tel / A.I. Pehovich, V.M. Zhidkih. – Leningrad: Jenergija, 1976. – 351 s. 5. Matveev N.M. Metody integrirovaniya obyknovennyh differencial'nyh uravnenij. – M.: Vysshaja shkola, 1967. – 409 s.