

КВАНТОВО-МЕХАНИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ТОКА ТЕРМОЭЛЕКТРОННОЙ ЭМИССИИ

Павленко Т.П., к.т.н., доц.

Национальный технический университет "Харьковский политехнический институт"

Украина, 61002, Харьков, ул. Фрунзе, 21, НТУ "ХПИ", кафедра "Электрические аппараты"

тел. (057) 707-62-81

В работе рассмотрены соотношения для определения тока термоэлектронной эмиссии электронов, показаны условия, определяющие величину коммутующего тока и катодного падения напряжения на основе решений уравнений электро- и массопереноса, а также дана оценка влияния на энергетический баланс катодного пятна при тормозном и рекомбинационном излучениях.

У роботі розглянути співвідношення, щодо визначення струму термоелектронної емісії електронів, засвідченні вимоги, щодо визначення комутаційного струму та катодного падіння напруги на основі рішення зрівнянь електро- та вагопереносу, а також дана оцінка впливу на енергетичний баланс катодного плями при гальмованому та рекомбінаційному випромінюваннях.

Известные соотношения для тока термоэлектронной эмиссии, полученные Мэрфи и Гудлом при многочисленных упрощающих допущениях в силу большой погрешности применимы лишь для качественных оценок [1]. Именно этим обстоятельством объясняется существенное расхождение результатов расчетов Ли и экспериментов по плотности и ионной доли тока в катодных пятнах дуги [1. 2].

Как следует из этих данных, форма потенциального барьера близка к треугольной. Это является следствием того обстоятельства, что потенциальная функция $U(Z)$ в (16) [3] от поверхности катода, больших $1 - 2 A^0$ является постоянной, а напряженность электрического поля в области туннельного перехода практически не меняется. Поэтому удобно аппроксимировать силовую функцию электрона на интервале туннельного перехода линейной так, чтобы площадь барьера осталась при этом неизменной. В этом случае фундаментальные решения уравнения Шриденгера с точностью до константы выражаются через функции Эйри, а соотношение для проницаемости барьера принимает вид:

$$D = \frac{4}{(A_1 + A_2)^2 + (A_3 - A_4)^2}, \quad (1)$$

где $A_1 = 3^{-1/3} \cdot \Gamma(2/3) I_{-1/3} \cdot (2/3 \cdot z^{3/2}) \cdot \sqrt{z}$,

$$A_2 = 3^{1/3} \cdot \Gamma(4/3) \times$$

$$\times \left\{ \frac{I_{1/3}(2/3 \cdot z^{3/2})}{\sqrt{z}} + z(I_{4/3}(2/3 \cdot z^{3/2}) + I_{-2/3}(2/3 \cdot Z^{3/2})) \right\}$$

$$A_3 = \frac{3^{1/3} \cdot \partial(4/3) \sqrt{2m_e \cdot \varepsilon}}{(k \cdot \hbar) \cdot I_{1/3}(2/3 z^{3/2}) \sqrt{z}},$$

$$A_4 = \frac{3^{-1/3} \cdot \partial(2/3) k \cdot \hbar}{\sqrt{2m_e \cdot \varepsilon}} \times$$

$$\times \left\{ \frac{I_{-1/3} \cdot (2/3 z^{3/2})}{\sqrt{z}} + z(I_{2/3} \cdot (\frac{2}{3} z^{3/2}) + I_{-4/3} \cdot (\frac{2}{3} z^{3/2})) \right\},$$

$\Gamma(x)$ - гамма-функция; $I_i(x)$ - модифицированная функция Бесселя порядка ν ,

$$z = k \cdot (z_2 - z_1), \quad k = 3 \sqrt{\frac{2m_e \cdot A}{\hbar^2}},$$

$A \approx eE$ - параметр определяется из условия равенства площадей исходного криволинейного и треугольного барьеров. Подставим в (17) [3] выражение функции Ферми, получим:

$$f_F(\bar{p}) = \frac{2m_e^2}{h^3} \{1 + \exp[\frac{\varepsilon - \mu}{k_B \cdot T}]\}^{-1},$$

учитывая, что химический потенциал электронного газа μ близок к уровню Ферми ε_F , находим окончательное расчетное выражение для плотности тока электронной эмиссии:

$$\delta_e = \delta_{Ae} + \delta_{Te}(1 + \eta), \quad (2)$$

где δ_{Ae} - ток автоэлектронной эмиссии, определяемый по известной формуле Нордгейма [2]; δ_{Te} - ток термоэлектронной эмиссии; $\Delta\varphi_{ш}$ - величина снижения потенциального барьера для классического электрона вследствие эффекта Шоттки; $\eta(T, E)$ - функция относительной доли туннельного тока:

$$\delta_{Te} = \frac{-4\pi \cdot m_e \cdot e \cdot (k_B T)^2}{h^3 \exp(-e(w_{ek} - \Delta\varphi_{ш})/k_B T)},$$

$$\eta(T, E) = \int_0^{y_m} D(y) \cdot \exp(y) dy, \quad y_m = \frac{e \cdot (w_{ek} - \Delta\varphi_{ш})}{k_B T},$$

$$y = \frac{(e \cdot w_{ek} + \varepsilon_F - \varepsilon)}{k_B \cdot T}.$$

Решение кинетических уравнений (13) и (14) [3] дает исчерпывающую информацию о процессах переноса в прикатодном слое. Однако, такая информация

избыточна, поскольку на практике требуется знание только первых моментов распределения по скоростям.

Проинтегрировав соотношения (14) и (15) [3] по скоростям, получаем уравнение неразрывности для потока нейтралов и ионов:

$$\frac{d}{dz}(nv) = -v_i n, \quad (3)$$

$$\frac{d}{dz}(n_i v_i) = v_i n. \quad (4)$$

Умножив (14) и (15) [3] на скорость v и проинтегрируем, тогда с учетом (3) и (4) находим уравнения движения:

$$v \cdot \frac{dv}{dz} = \sigma_n \cdot n_i (v_i - v) \cdot |v_i - v|, \quad (5)$$

$$v_i \cdot \frac{dv_i}{dz} = \frac{e n_i}{m} \cdot E - \sigma_n \cdot n (v_i - v) \cdot |v_i - v|. \quad (6)$$

Система уравнений (3) - (6) решается с учетом (15) [3]. При непосредственных вычислениях удобно в (3) - (6) в качестве независимой переменной принять потенциал ϕ , тогда производные в (3) - (6) примут вид:

$$\frac{d}{dz}(nv) = E \cdot \frac{d(nv)}{d\phi}, \quad \frac{d}{dz}(n_i v_i) = E \cdot \frac{d(n_i v_i)}{d\phi},$$

К уравнениям переноса (3) - (6) следует добавить условия однозначности:

$$v(0) = v_0(\chi, T), \quad v_i(U_k) = 0,$$

$$n(0)v(0) = \frac{p_n(T)}{\sqrt{2\pi \cdot m \cdot k_B \cdot T}}, \quad n_i(U_k) = 0,$$

где $v_0(\chi, T)$ - среднестатистическая скорость отрыва нейтралов от поверхности катода.

При максвелловском распределении по скоростям

$$v_0 = \sqrt{\frac{k_B \cdot T}{2\pi \cdot m}} \cdot u \cdot \exp(u) \cdot \{K_1(u) - K_0(u)\}, \quad u = \frac{m \cdot \chi}{2k_B \cdot T},$$

где $K_0(u)$ и $K_1(u)$ - функции Макдональда нулевого и первого порядков.

Полный ток определяется как сумма электронно-ионного:

$$\delta = \delta_e + e \cdot n_i \cdot v_i.$$

Условие (12) [3], фиксирующее величину коммутируемого тока, дает уравнение для определения последнего неизвестного параметра - катодного падения напряжения:

$$-2\pi \cdot \int_0^\infty \delta(r, t) \cdot r \cdot dr = I. \quad (7)$$

Расчет энергии тормозного и рекомбинационного излучения эмиссионных электронов проводим по оценке энергетического баланса катодного пятна тормозного и рекомбинационного излучения ускоренных в кнудсеновском слое эмиссионных электронов.

Уравнение энергии электрона, рассеиваемого на ионах положительного створа дуги имеет вид:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{2m_e}{m} \cdot v_m \cdot \varepsilon; \quad t > 0; \quad \varepsilon(0) = \frac{m_e \cdot v_e^2}{2},$$

где ε - энергия электрона; v_m - эффективная частота

кулоновских столкновений; v_e - скорость электрона на выходе из кнудсеновского слоя.

Количество энергии, излучаемое электроном в 1 с в спектральный интервал $d\omega$ во всех направлениях в результате торможения равно [2]:

$$dj_T(\varepsilon) = \hbar \cdot \omega \cdot n_i \cdot v \cdot d\sigma_\omega; \quad v < \sqrt{\frac{2\hbar \cdot \omega}{m_e}},$$

где $d\sigma_\omega = \frac{16\pi}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{e^6}{m_e^2 \cdot c^3 \cdot \hbar \cdot \omega \cdot v^2} \cdot d\omega$ - сечение тормозного излучения; c - скорость света в вакууме; v - абсолютная скорость электрона.

Интегрируя $dj_T(\varepsilon)$ в пределах допустимого спектрального интервала

$$0 < \omega < \frac{mv^2}{2\hbar}$$

находим мощность тормозного излучения:

$$j_T(\varepsilon) = \frac{8\pi}{3\sqrt{3}} \frac{e^6}{m_e c^3 \hbar} n_i v$$

Полная энергия тормозного излучения определится в виде:

$$\varepsilon_*^T = \int_0^{t_0} j_T(\varepsilon) dt,$$

где t - время торможения.

Для вычисления ε_*^T следует определить временную зависимость $\varepsilon(t)$ или $v(t)$.

По определению эффективной частоты столкновений имеем:

$$\sigma_m(v) \approx \pi \cdot r_0^2$$

где r_0 - характерный радиус кулоновского взаимодействия электрона с ионом:

$$r_0 = \frac{2e^2}{(m_e \cdot v^2)}.$$

С учетом приведенных соотношений уравнение энергии электрона запишется в виде:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{4\pi \cdot e^4 \cdot n_i}{m_e \cdot m \cdot v^2},$$

Решая уравнение находим:

$$v(t) = v_0 \cdot \left(1 - \frac{t}{t_0}\right)^{\frac{1}{3}},$$

$$\text{где } t_0 = \frac{m_e \cdot m \cdot v_0^3}{12\pi \cdot e^4 \cdot n_i},$$

Таким образом,

$$\varepsilon_*^T = \frac{3}{4} \cdot c_0 \cdot n_i \cdot v_0 \cdot t_0, \quad c_0 = \frac{8\pi \cdot e^6}{3\sqrt{3} \cdot m_e \cdot c^3 \cdot \hbar}.$$

Вычисляя числовые коэффициенты находим:

$$\varepsilon_*^T = 2,84 \cdot 10^{-21} \cdot A \cdot v_0^2 \cdot \varepsilon(0),$$

где A - массовое число ядра иона, следовательно, доля

энергии тормозного излучения составляет:

$$F_{\Sigma}^T = 2,84 \cdot 10^{-21} \cdot A \cdot v_0^2.$$

На катод поступает половина энергии излучения, поэтому искомый коэффициент равен:

$$F_T \approx 1,42 \cdot 10^{-21} \cdot A \cdot v_0^2$$

Выразив начальную скорость на выходе из кнудсеновского слоя через катодное падение напряжения, получаем окончательное расчетное выражение:

$$F_T = 0,5 \cdot 10^{-5} \cdot A \cdot U.$$

Проведем аналогичные выкладки для случая рекомбинационного механизма излучения.

В результате фотозахвата электронов со скоростями в пределах от v до $v+dv$ на n -й энергетический уровень атомов в 1с в среднем на один электрон излучается энергия [1]:

$$I_{\omega n} = \hbar \cdot \omega \cdot n_i \cdot \sigma_{cn} \cdot \varphi(v) \cdot v \pm dv,$$

где σ_{cn} - сечение фотозахвата для однозарядных ионов:

$$\sigma_{cn} \approx \frac{16\pi}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{e^{10}}{c^3 \cdot \hbar^4 \cdot m_e \cdot v^2 \cdot \omega} \cdot n^{-3}, \quad n = 1, 2, \dots$$

где $\varphi(v)$ - функция распределения электронов по скоростям, для рассматриваемого случая близка к дельта-функции:

$$\hbar\omega = |E_n| + \frac{m_e \cdot v^2}{2},$$

где E_n - энергия связанного состояния электрона в атоме для главного квантового числа n .

Интегрируя по скоростям электронов либо по всему возможному спектру излучения (с учетом $m \cdot v \cdot dv = \hbar \cdot d\omega$) и суммируя по n , находим мощность рекомбинационного излучения, приходящегося на один электрон:

$$j_p(\varepsilon) = \frac{16\pi}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{e^{10} \cdot n_i}{c^3 \cdot \hbar^3 \cdot m_e \cdot v} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}.$$

Полная энергия рекомбинационного излучения эмиссионного электрона составит в среднем:

$$\varepsilon_*^p = \int_0^{t_0} j_p(\varepsilon) \cdot dt = \frac{4e^6 \cdot S}{3\sqrt{3} \cdot c^3 \cdot \hbar^3} \cdot \frac{m}{m_e} \cdot \varepsilon(0),$$

где $S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$.

Таким образом, находим соответствующий механизму рекомбинационного излучения коэффициент $F_p = 32,6 \cdot 10^{-5} A$.

Суммарная доля энергии эмиссионных электронов, поступающая в катодную область посредством излучения составит:

$$F = F_T + F_p = 10^{-5} \cdot A \cdot (0,5 \cdot U + 32,6).$$

Например, для меди: $A=63,5$; $U=12$ В, $F=0,0245$, что соответствует эквивалентному напряжению.

Для случая короткой дуги необходимо принять в расчет:

$$U = U_K + U_A + w_{eA}.$$

Таким образом, можно установить баланс энергии эмиссионных электронов и аналогично можно оценить энергию, излучаемую электронами на катод из прианодных областей.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Lee T.H., Greenwood A. Theory for the cathode mechanism in metal vapour arcs. - "I. Appl. Phys.", 1961, vol. 32, p. 916-924.
- [2] Райзер Ю.П. Физика газового разряда. М.: Наука, 1987, 592 с
- [3] Т.П. Павленко. Анализ модели дугового разряда. Харьков.: Электротехника и электромеханика, №2, 2005

Поступила 11.01.2005