УДК 621.3.013

АНАЛИЗ МЕТОДОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ МАГНИТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ЭЛЕКТРОМАГНИТОВ ДЛЯ КОМПЕНСАЦИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ЭЛЕКТРООБОРУДОВАНИЯ

Король Е.Г.
Национальный технический университет "Харьковский политехнический институт"
кафедра "Электрические аппараты"
Украина, 61002, Харьков, ул. Фрунзе, 21
тел. (057) 707-68-64, e-mail: lupikov@kpi.kharkov.ua

Розглянуто існуючі методи аналітичного виразу кривої намагнічування. Описано переваги і недоліки кожного методу. Визначений напрям вдосконалення методів в частині підвищення точності моделювання магнітних характеристик матеріалу осердя електромагніту для компенсації магнітного поля.

Рассмотрены существующие методы аналитического выражения кривой намагничивания. Описаны преимущества и недостатки каждого метода. Определено направление совершенствования методов в части повышения точности моделирования магнитных характеристик материала сердечника электромагнита для компенсации магнитного поля.

ВВЕДЕНИЕ

Для снижения внешнего магнитного поля силового электрооборудования (ЭО) в настоящее время находят все более широкое применение электромагниты (электромагниты-компенсаторы – ЭК), содержащие катушку и ферромагнитный сердечник. Преимущества этих ЭК следующие. Их можно размещать в доступном свободном месте внутри объема ЭО либо на его поверхности, а также появляется возможность формирования токов в зависимости от токов силовой цепи и режимов работы ЭО. Кроме того, они позволяют существенно упростить регулирование компенсирующего магнитного момента при настройке ЭК за счет того, что операции регулирования сводятся, по существу, к регулированию их токов.

Существующие методы расчета ЭК [1] строятся с использованием двух основных магнитных характеристик ферромагнитных сердечников: кривой намагничивания и петли гистерезиса. Такой подход позволяет на качественном уровне объяснить физические процессы в ЭК, но его количественные характеристики в отношении создаваемого компенсирующего магнитного поля (либо магнитного момента) ограничены по ряду причин. Эти ограничения не позволяют на стадии проектирования ЭК рассчитать его параметры с высокой точностью, что приводит к завышенным его показателям и, в конечном счете, к неоправданным завышениям применяемых материалов.

Цель статьи – анализ факторов, ограничивающих точность известных методов описания кривой намагничивания ферромагнитного сердечника электромагнитов, применяемых в качестве источников компенсирующего магнитного поля силового электрооборудования.

МЕТОДЫ ОПИСАНИЯ КРИВЫХ НАМАГНИЧИВАНИЯ

Кривые намагничивания в справочниках и литературе обычно приводятся в графическом либо табличном виде. Предлагается также большое количество функций для их аналитического описания. Все предлагаемые функции, в той или иной степени отображающие кривую намагничивания в целом или по отдельным участкам делятся следующим образом.

Дробно-линейные функции. В этом случае кривые намагничивания (для положительного участка) могут быть представлены в таком виде [1, 2]:

$$B = \frac{a \cdot H}{H + b}; \tag{1}$$

$$B = a - b/H, \tag{2}$$

где B – магнитная индукция; H – напряженность магнитного поля; a, b – постоянные коэффициенты.

Недостатками соотношений (1) и (2) является то, что они дают существенную погрешность аппроксимированной и действительной кривой намагничивания в области ниже колена. Эта погрешность достигает 13–20%.

Степенные функции с экспоненциальной поправкой. Для данной группы кривых намагничивания аппроксимирующее выражение описывается степенной функцией и корректируется с помощью экспоненциальной функции $k(B)$ [3]. Если при использовании одной поправочной функции $k(B)$ не достигается требуемая точность, то полученную зависимость для кривой намагничивания аналогичным образом корректируют, т.е. применяют еще одну функцию $k(B)$. В общем виде аналитическое выражение может быть представлено в следующим обобщающем виде:

$$H = a \cdot B^m \cdot \prod_{i=1}^{n} k_i(B). \tag{3}$$

В соотношении (3) используются следующие обозначения: a – эмпирический коэффициент; m – степень; $k(B)$ – поправочная экспоненциальная функция, $k(B) = \left(1 + d \cdot e^{b(c-B)}\right)$; d, b, c –эмпирические коэффициенты.

В [3] приведены аппроксимирующие выражения для трех типов электротехнических сталей: низкоуглеродистой горячекатаной электротехнической стали марки 10895, литьевой стали марок Л20 – Л25 и листовой холоднокатаной электротехнической стали марки 3414. Кривые намагничивания для перечисленных сталей, соответственно, имеют вид:

$$H = 20 \cdot \left(1 + 9e^{10(1-B)}\right) \cdot B^{10};$$
$$H = 850 \cdot \left(1 + 10e^{22,2(0,15-B)}\right)\left(1 + 13e^{10(0,5-B)}\right) \cdot B^{5,5}; \quad (4)$$
$$H = 0,1 \cdot \left(1 + 6e^{11(1,4-B)}\right) \cdot B^{17}.$$

Приведенные выражения (4) достаточно хорошо описывают кривую намагничивания и дают хорошее совпадение с экспериментальными данными [3] для указанных видов сталей.

Экспоненциальные функции. Общий вид экспоненциальной функции, из которой получаются частные, может быть записан следующим соотношением [2]:

$$B = \left(k_1 + k_1 \cdot e^{\frac{c \cdot H^a}{a \cdot H^m + b}}\right)^g + k_2 \cdot H, \quad (5)$$

где k_1, k_2, a, b, c, m, g – постоянные коэффициенты.

Самой известной экспоненциальной функцией является выражение вида:

$$B = e^{\frac{H}{a \cdot H + b}}. \quad (6)$$

Недостатками данного метода описания кривой намагничивания по соотношениям (5), (6) являются следующие факторы:

а) при $H = 0$ индукция $B = 1$, хотя должно быть $B = 0$. Для устранения этого необходимо вычесть единицу из правой части уравнения (6);

б) dB/dH стремиться к бесконечности при $H \to \infty$, хотя на самом деле dB/dH должно стремиться к единице.

Логарифмические функции. Для описания кривой намагничивания с использованием логарифмической функции в [2] предлагаются выражения:

$$B = a^{-1} \cdot \ln(1 + b \cdot H); \quad (7)$$
$$B = a \cdot \sqrt{\ln b \cdot H}; \quad (8)$$
$$B = a \cdot \sqrt{\ln(b \cdot H + 1)}, \quad (9)$$

где a, b – постоянные коэффициенты.

Главным недостатком выражения (8) является то, что при $H = 0$ B стремиться к бесконечности. Устранить этот недостаток пытаются добавлением единицы под знаком логарифма. Такие попытки, представленные в формулах (7) и (9), увеличивают погрешность расчетной и исходной кривой намагничивания при малых значениях напряженности H.

Функции с арктангенсами. Общий вид аналитического выражения кривой намагничивания в данном случае записывается следующим образом [2]:

$$B = a \cdot H + b \cdot \operatorname{arctg}(c \cdot H), \quad (10)$$

где a, b, c – постоянные коэффициенты.

Известной частной формулой является выражение:

$$B = b \cdot \operatorname{arctg}(c \cdot H). \quad (11)$$

При больших значениях напряженности H аппроксимированная кривая намагничивания (10), (11) обычно располагается несколько ниже, а при малых в большинстве случаев лежит немного выше исходной кривой намагничивания. Величины этих отклонений и определяют погрешность аналитического описания кривой намагничивания и могут достигать 30%.

Гиперболические функции. В этом случае кривая намагничивания описывается с помощью гиперболических функций [2]:

$$H = a \cdot \operatorname{sh}(b \cdot B); \quad (12)$$
$$H = (a \cdot b)^{-1} \cdot \operatorname{th}(b \cdot B); \quad (13)$$
$$H = a \cdot \operatorname{sh}(b \cdot B) + c \cdot B, \quad (14)$$

где a, b, c – постоянные коэффициенты.

Из всех приведенных функций выражение (13) намного хуже описывает кривую намагничивания, чем уравнение (12). Наиболее удачным все-таки является формула (14) [4].

Функции тригонометрических рядов. Аналитическое выражение кривой намагничивания с использованием рядов записывается следующими двумя уравнениями [2]:

$$B = \sum_{n=1}^{n=\infty} a_{2 \cdot n-1} \sin(2n-1)\frac{H}{H_1}; \; H = \sum_{n=1}^{n=\infty} b_{2 \cdot n-1} \sin(2n-1)\frac{B}{B_1}, \quad (15)$$

где a_{2n-1}, b_{2n-1} – постоянные коэффициенты рядов;
n – число членов ряда

В выражениях (15) H_1 и B_1 значения напряженности поля и магнитной индукции, соответственно, произвольно выбранные и соответствующие одному радиану. Пределы изменения напряженности поля (H) равны ($-\pi H_1/2$, $\pi H_1/2$), а для индукции (B) – ($-\pi B_1/2$, $\pi B_1/2$).

Функции с полиномами по степеням *B*. Описание кривой намагничивания при помощи полиномов выглядит следующим образом [2]:

$$H = \sum_{n=1}^{N} a_n \cdot B^{2n-1}, \quad (16)$$

где N – число учитываемых членов ряда; a_n – постоянные коэффициенты ряда.

В литературе предлагается использовать выражение (16) с двумя или тремя членами. Так при двух членах аппроксимированная кривая намагничивания проходит несколько ниже колена, а за ним располагается немного выше исходной кривой намагничивания. При использовании трех членов кривая намагничивания, рассчитанная по формуле (16) до колена идет несколько выше, а за ним – ниже исходной кривой намагничивания. В обоих случаях имеется погрешность аппроксимации кривой намагничивания, достигающая 20 – 25%.

Функции степеней *H*. Аналитическое выражение кривой намагничивания в этом случае может быть представлено в виде одного из следующих уравнений [2]:

$$B = a \cdot H - b \cdot H^3; \quad (17)$$
$$B = a \cdot H - b \cdot H^m, \quad (18)$$

где a, b – постоянные коэффициенты; m – степень.

Для использования выражения (17) необходимо, чтобы максимум достигался при $H = \sqrt{a/3 \cdot b}$. Следовательно, построение кривой намагничивания может быть выполнено только до этой точки.

В выражении (18) степень m должна быть меньше единицы. Наиболее целесообразно принять ее равной 0,333 или 0,5. Из уравнения (18) получаются частные формулы, из которых на практике получило распространение следующее выражение:

$$B = b \cdot H^m. \quad (19)$$

Функция (19) несколько хуже отображает кривую намагничивания по сравнению с выражением (18).

Кусочно-линейное представление кривой намагничивания. Суть этого метода заключается в том, что кривую намагничивания заменяют отрезками, каждый из которых описывается уравнением прямой. Данный метод считается одним из лучших [2]. Так, например, кривую намагничивания можно записать двумя уравнениями: $y = f(x)$ и $y = f(-x)$. Если же кривая имеет изгибы, то необходимо использовать большее количество уравнений для ее описания.

Низкая точность метода связана с тем, что использованная степень аппроксимации невысока и обусловлена ограниченным применением средства вычислительной техники на момент разработки метода. Этот недостаток может быть преодолен при использовании более высокой степени аппроксимированных кривых для участков [5].

Тензорные функции. Для учета анизотропии ферромагнитной среды существует два подхода.

Первый подход сводится к тому, что в уравнение вводится тензор магнитной проницаемости μ_{ij} и тогда выражение кривой намагничивания принимает вид [6]:

$$B = \mu_{ij} \cdot H \; . \tag{20}$$

В этом случае ферромагнитный материал рассматривается как однородная анизотропная среда. В декартовой системе оси координат выбирается таким образом, чтобы они совпадали с осями тензора. Тогда тензор (20) записывается как диагональная матрица:

$$\mu_{ij} = \begin{pmatrix} \mu_x & 0 & 0 \\ 0 & \mu_y & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{pmatrix}, \tag{21}$$

где μ_x, μ_y, μ_z – постоянные величины независящие от координат *x*, *y*, *z*.

Второй подход предполагает введение тензоров $T_1(H)$ и $T_2(H)$ определяющих взаимную ориентацию в пространстве векторов ***B***, ***M***, ***H***. В данном случае аналитическое выражение кривой намагничивания записывают в виде [7]:

$$B = T_1(H) \cdot \mu_r(H) \cdot H, \;\; M = T_2(H) \cdot \chi(H) \cdot H \; , \tag{22}$$

где μ_r, χ – магнитные проницаемость и восприимчивость.

Приведенные уравнения применяются для анизотропных материалов, как гистерезисных, так и безгистерезисных. Они представляют собой математическое обобщенное выражение процесса изменения магнитного состояния вещества в произвольном поле. Этот подход применим для описания кривых первоначального намагничивания, предельных циклов перемагничивания и множества частных циклов перемагничивания во всех пространственных направлениях.

Основными недостатками этих подходов является то, что приведенные соотношения не могут быть заданы конечным набором чисел для реализации на ЭВМ, а также невозможность получения этих зависимостей на основе прямых экспериментов.

Кроме того, эти подходы не учитывают свойства материала. Так, для изотропного безгистерезисного материала существует всего одна кривая. Для построения характеристик анизотропных материалов перспективным является комбинированный подход. Он заключается в том, что создается модель процесса намагничивания ферромагнитного материала. В ней используются свойства идеализированных магнитных частиц, обладающих одноосной анизотропией. Для каждой частицы во внешнем поле записывается энергетическое уравнение. Средняя намагниченность элементарного объема, свойства которого выражаются через свойства частиц, находится при помощи вероятностных характеристик намагниченности отдельных частиц. Для того чтобы получить семейство характеристик перемагничивания в числовом виде необходимо решить совместно энергетическое и стохастическое уравнения, описывающие устойчивые связи случайных величин. Для настройки модели на определенный материал производится подбор величины намагниченности частицы и законов распределения. Если модель готова, то, считается, что она способна отобразить в полном объеме все данные, которые заложены зависимостями (21), (22) [7].

Недостаток модели состоит в том, что до сих пор остается неизвестной информация, касающейся достоверности данных модели в области, которая является недоступной эксперименту.

Смешанные функции. Аналитическое выражение кривой намагничивания, так называемых смешанных функций, может быть представлено одним из следующих уравнений [2, 8]:

$$B = \frac{a \cdot H}{1 + (a \cdot H)/b} + c \cdot H \; ; \tag{23}$$

$$H = \frac{B}{a + b \cdot B + c \cdot B^2 + d \cdot B^3} \; ;$$

$$B = b \cdot \left(1 - \frac{1}{1 + (a \cdot H)/b} \right);$$

$$B = a \cdot H + b \cdot \mathrm{arctg}(\mathrm{sh}(c \cdot H)),$$

где *a*, *b*, *c*, *d* – постоянные коэффициенты.

Главный недостаток всех перечисленных выражений (23) – это их громоздкость.

К этому типу функций следует отнести и следующее выражение [4]:

$$\frac{dB}{dH} = \mu_k \cdot \left(1 - \frac{a \cdot (1 - b \cdot A + A^2)}{b + c \cdot A + A^2} \right); \tag{24}$$

$$A = H / (H_r \cdot H_k),$$

где *a*, *b*, *c* – постоянные величины, которые необходимо определять по действительной кривой намагничивания; H_k, H_r – величины напряженности магнитного поля.

Зависимость (24) справедлива для ограниченного диапазона напряженностей. Для того чтобы его расширить применяют более сложное выражения для описания кривой намагничивания.

Нахождение кривой намагничивания на постоянном токе по кривой намагничивания, снятой на переменном токе. В [2] приведено следующее аналитическое выражение кривой намагничивания**,** снятой на переменном токе:

$$H = \frac{w}{l} \cdot \left(B - \frac{3}{4} \cdot a \cdot B^3 + \frac{5}{8} \cdot b \cdot B^5 \right). \tag{25}$$

Входящие в (25) постоянные коэффициенты *a* и *b* определяются из кривой намагничивания, снятой на постоянном токе. Остальные параметры в (25) имеют следующие обозначения: w – число витков; l – тангенс угла наклона в начальной части кривой намагничивания.

Универсальная функция. В работе [4] приведены две методики определения универсальной кривой намагничивания. Одна из методик заключается в том, что предлагается пользоваться безразмерной относительной нормированной зависимостью вида $\mu = f(H)$.

Для того, чтобы перейти к реальным величинам магнитной проницаемости, необходимо воспользоваться следующим соотношением:

$$\mu = \mu_{\text{н}} \cdot \mu_0 \cdot \mu_m , \qquad (26)$$

где $\mu_{\text{н}}$ – величина, нормированная на единицу в точке максимума, при условии что $\mu_{ot} = \mu_m$; μ_{ot} – относительная магнитная проницаемость; μ_0 – магнитная постоянная; μ_m – максимальная величина относительной магнитной проницаемости.

Для перехода от аппроксимированных к реальным значениям напряженности в (26) применяют следующее выражение:

$$H = H_{\text{н}} \cdot H_1 . \qquad (27)$$

Достоинством данного метода является то, что приведенная универсальная аппроксимация справедлива в широком диапазоне напряженностей магнитного поля.

Недостатки метода:

– зависимость $\mu_{\text{н}} = f(H_{\text{н}})$ задается по отрезкам и поэтому становится невозможным использование аналитических методов расчета из-за наличия разрывов первого и второго рода;

– в формуле (27) величина H_1 определяется произвольно.

Другая методика по определению универсальной кривой намагничивания сводится к тому, что предлагаемая формула для аппроксимации требует знания пяти параметров, для каждой стали [4]:

μ_m – максимальная относительная магнитная проницаемость;

$H_{\mu m}$ – напряженность магнитного поля, при которой магнитная проницаемость становится максимальной;

B_s – индукция насыщения;

μ_{st} – начальная магнитная проницаемость;

b – безразмерный коэффициент.

Аналитическое выражение кривой намагничивания в этом случае имеет вид:

$$B = \mu_0 H + \frac{\mu_0 \cdot \mu_m \cdot H}{\dfrac{1}{1-\mu_m} + \dfrac{\left(\left|H_{\text{н}} - 1\right|\right)^b}{\dfrac{1}{1 - \dfrac{\mu_{st}}{\mu_0 \mu_m} - 0.17 H_{\text{н}}^{1-1.5 \cdot H_{\text{н}}}} - 1 + \dfrac{H_{\text{н}}^{b-1} B_s}{k(H_{\text{н}}) B_{\mu m}}}}, \qquad (28)$$

где $k(H_{\text{н}})$ – поправочная функция,

$$k(H_{\text{н}}) = \left(1 + 400 e^{-9 \cdot H_{\text{н}}^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1.2}{2 + H_{\text{н}}^{0.4}}\right)^{0.9};$$

$H_{\text{н}}$ – нормированное значение напряженности поля, $H_{\text{н}} = H / H_{\mu m}$.

Главное преимущество данной методики заключается в том, что аппроксимированное выражение требует определения одного параметра b, четыре же остальных можно найти в справочниках.

ВЫВОДЫ

Проведен анализ существующих аналитических выражений кривой намагничивания, как одной из основных характеристик магнитного материала сердечника электромагнита-компенсатора магнитного поля. Для их применения требуется нахождение нескольких параметров (коэффициентов) для описания кривой намагничивания. Число этих параметров равно два и более. Достоинством этих соотношений является то, что для аналитических функций, описывающих кривые, требуемые параметры могут быть определены исходя из реальных (исходных) кривых намагничивания материала сердечника.

Получены количественные оценки погрешности расчетных кривых намагничивания. В большинстве случаев погрешность достигает 10 – 30 %.

Перспективным направлением совершенствования методов является аппроксимация кривой намагничивания по участкам, например, полиномиальными функциями одинакового вида для всех участков. Это связано с тем, что при такой аппроксимации возможно повышение точности аппроксимации за счет сколь угодно точного описания кривых на отдельных участках и использовании возможностей современной вычислительной техники и программного обеспечения.

Результаты исследований рекомендуется использовать при разработке точных моделей электромагнитов с высокой эффективностью компенсации внешнего магнитного поля, разрабатываемых для обеспечения современных требований электромагнитной совместимости силового электрооборудования.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Коваленко А.П., Магнитные системы управления космическими летательными аппаратами. – М.: Машиностроение, 1975. – 248 с.

[2] Бессонов Л. А., Электрические цепи со сталью. – М.: Госэнергоиздат, 1948. – 344 с.

[3] Клименко Б.В., Форсированные электромагнитные системы. – М.: Энергоатомиздат, 1989. – 160 с.

[4] Пентегов И.В., Красножон А.В., Универсальная аппроксимация кривых намагничивания электротехнических сталей. – Електротехніка і електромеханіка. – 2006. – №1. – С. 66-70.

[5] Себер Дж. Линейный регрессионный анализ. – М.: Мир, 1980. – 456 с.

[6] Тозони О.В., Маергойз И.Д., Расчет трехмерных электромагнитных полей. – К.: "Техніка", 1974. – 352 с.

[7] Курбатов П.А., Аринчин С.А., Численный расчет электромагнитных полей. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 168 с.

[8] Гордон А.В., Сливинская А.Г., Электромагниты постоянного тока. – М.-Л.: Госэнергоиздат. – 1960. – 447 с.

Поступила 08.08.2006