

ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ В МОДЕЛЮВАННІ КЕРОВАНИХ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ

Мороз В.І., к.т.н., доц.

Національний університет "Львівська політехніка"

Україна, 79013, Львів, вул. Ст. Бандери, 12, НУ "Львівська політехніка",

кафедра "Електропривод і автоматизація промислових установок"

тел. (032) 258-26-20, e-mail: vmoroz@polynet.lviv.ua

У статті на прикладі показано використання інтегральних рівнянь у моделюванні керованих електромеханічних систем. З використанням неявних формул Адамса проведено аналіз точності та раціонального порядку формули числового інтегрування.

В статье на примере показано использование интегральных уравнений в моделировании управляемых электромеханических систем. С использованием неявных формул Адамса проведен анализ точности и рационального порядка формулы численного интегрирования.

*Дана стаття з'явилася внаслідок
бесід з проф. Р.В. Фільцом, якому автор
вдячний за підтримку та розуміння.*

ВСТУП

Опис динамічних властивостей електромеханічних систем, у тому числі автоматизованих електроприводів, традиційно здійснюється диференціальними рівняннями. Такий підхід має ряд недоліків у порівнянні із застосуванням інтегральних рівнянь для опису динамічних процесів [1], [2]:

- 1) Під час диференціювання функції втрачається частина інформації (для диференціального рівняння першого порядку – початкові умови), у той же час в інтегральному рівнянні початкові умови є невід'ємною частиною рівняння.
- 2) При розв'язуванні диференціального рівняння, на відміну від інтегрального, за допомогою класичних числових методів нерідко виникає проблема числової нестійкості.

Якоюсь мірою ці положення підтверджуються практикою теорії автоматичного керування (ТАК) і практикою налагодження автоматизованих електроприводів – введення до системи диференціатора часто спричинює проблеми через посилення диференціатором високочастотних завад і шумів.

Незважаючи на низку переваг, застосування інтегральних рівнянь для опису динаміки електромеханічних систем не отримало такого розповсюдження, як використання диференціальних рівнянь. Залишаються відкритими такі питання, як раціональний порядок методу числового інтегрування, спосіб визначення локальної похибки під час моделювання електромеханічних систем.

Таким чином, метою проведених досліджень є:

- визначення раціонального порядку числового інтегратора для моделювання динаміки керованих електромеханічних систем, зокрема, сучасних автоматизованих електроприводів;
- знаходження способу визначення локальних похибок під час числового розв'язування інтегральних рівнянь, що описують динаміку електромеханічної системи.

Розглянемо застосування підходу з використанням інтегральних рівнянь на досить простому прикладі розрахунку динаміки двох режимів двигуна постійного струму (ДПС) незалежного збудження: прямого

пуску і накидання навантаження. Вибір такого прикладу пояснюється простою можливістю аналітичної перевірки отриманих результатів, а знайдені закономірності можуть бути поширені на складніші системи.

Якірне коло ДПС можна зобразити заступною електричною схемою (рис. 1), що описується рівняннями електричної рівноваги:

$$U_a - C\omega - U_{La} - i_a R_a = 0;$$

$$i_a = i_a(0) + \frac{1}{L_a} \int_0^t U_{La} dt,$$

де U_{La} – напруга на індуктивності якірного кола.

Перейшовши до якірного струму як до однієї з основних змінних, матимемо

$$i_a(t) = i_a(0) + \frac{1}{L_a} \int_0^t (U_a - C \cdot \omega(t) - i_a(t) \cdot R_a) dt. \quad (1)$$

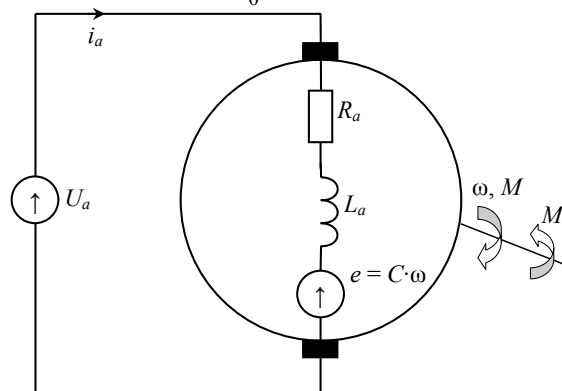


Рис. 1. Заступна електрична схема якірного кола ДПС незалежного збудження:

U_a – напруга на якорі двигуна; i_a – струм якірного кола; L_a – індуктивність якірного кола; R_a – опір якірного кола; e – ЕРС якоря; C – стала двигуна; ω – кутова швидкість якоря; M – електромагнітний момент; M_c – момент статичного опору

До цього рівняння додамо інтегральне рівняння динаміки механічної частини приводу, що описує залежність кутової швидкості ДПС від часу:

$$\omega(t) = \omega(0) + \frac{1}{J} \int_0^t (C \cdot i_a(t) - M_c) dt. \quad (2)$$

Таким чином, режим прямого пуску двигуна постійного струму описуватиметься системою інтегральних рівнянь (3)

$$\begin{cases} i_a(t) = i_a(0) + \frac{1}{L_a} \int_0^t (U_a - C \cdot \omega(t) - i_a(t) \cdot R_a) dt; \\ \omega(t) = \omega(0) + \frac{1}{J} \int_0^t (C \cdot i_a(t) - M_c) dt, \end{cases} \quad (3)$$

яка доволі просто розв'язується за допомогою відомих числових методів наближеного обчислення означеного інтегралу, зокрема, методу трапецій:

$$\int_{t_{\min}}^{t_{\max}} f(x) dx \approx \sum_{i=0}^{N-1} h \cdot \left(\frac{f_i + f_{i+1}}{2} \right), \quad (4)$$

де $[t_{\min}; t_{\max}]$ – інтервал інтегрування; $h = \frac{t_{\max} - t_{\min}}{N}$

– крок інтегрування; N – число точок розбиття інтервалу інтегрування.

Застосувавши згаданий числовий метод (4) до системи інтегральних рівнянь (3), отримаємо систему неявних рекурентних рівнянь, що описують динамічні режими ДПС:

$$\begin{cases} i_{a_{i+1}} = i_{a_i} + \frac{h}{2L_a} \cdot (U_{a_{i+1}} + U_{a_i} - C \cdot (\omega_{i+1} + \omega_i) - R_a \cdot (i_{a_{i+1}} + i_{a_i})); \\ \omega_{i+1} = \omega_i + \frac{h}{2J} (C \cdot (i_{a_{i+1}} + i_{a_i}) - (M_{c_{i+1}} + M_{c_i})). \end{cases} \quad (5)$$

Ввівши позначення $T_a = L_a/R_a$ і розв'язуючи систему неявних рівнянь (5) відносно змінних $i_{a_{i+1}}$ та ω_{i+1} , матимемо систему явних рекурентних рівнянь для опису часових процесів для струму якоря та кутової швидкості двигуна постійного струму:

$$\begin{cases} i_{a_{i+1}} = \frac{2R_a \cdot J \cdot (2T_a - h) \cdot i_{a_i} + h \cdot (2J \cdot (U_{a_{i+1}} + U_{a_i} - \dots - 2C \cdot \omega_i) + h \cdot C \cdot (M_{c_{i+1}} + M_{c_i} - C \cdot i_{a_i}))}{C^2 \cdot h^2 + 2R_a \cdot J \cdot (2T_a + h)} \\ \omega_{i+1} = \frac{h \cdot C \cdot (h \cdot (U_{a_{i+1}} + U_{a_i} - C \cdot \omega_i) + 4T_a R_a \cdot i_{a_i}) + \dots + R_a \cdot (2T_a + h)(2J \cdot \omega_i - h \cdot (M_{c_{i+1}} + M_{c_i})))}{C^2 \cdot h^2 + 2R_a \cdot J \cdot (2T_a + h)}. \end{cases} \quad (6)$$

У випадку послідовної програмної реалізації алгоритму (спочатку обчислюють значення струму $i_{a_{i+1}}$, а потім – значення швидкості ω_{i+1}), можна скористатися простішим варіантом системи рівнянь (6):

$$\begin{cases} i_{a_{i+1}} = \frac{2R_a \cdot J \cdot (2T_a - h) \cdot i_{a_i} + h \cdot (2J \cdot (U_{a_{i+1}} + U_{a_i} - \dots - 2C \cdot \omega_i) + h \cdot C \cdot (M_{c_{i+1}} + M_{c_i} - C \cdot i_{a_i})); \\ \omega_{i+1} = \omega_i + \frac{h}{2J} (C \cdot (i_{a_{i+1}} + i_{a_i}) - (M_{c_{i+1}} + M_{c_i})). \end{cases} \quad (6a)$$

Як приклад, для двигуна постійного струму незалежного збудження з параметрами:

- номінальна напруга якоря двигуна $U_a^{\text{ном}} = 220$ В;
- стала двигуна $C = 2.5$ В·с⁻¹;
- активний опір якорного кола $R_a = 0.25$ Ом;
- електромагнітна стала часу якорного кола $T_a = 0.05$ с;
- сумарний момент інерції приводу $J = 0.5$ кг·м²;
- електромеханічна стала часу $T_{\text{ем}} = \frac{J \cdot R_a}{C^2} = 0.02$ с;

– номінальний момент навантаження (статичного опору) $M_c^{\text{ном}} = 100$ Нм, за формулами (6) для кроку інтегрування $h = 0.01$ с проведено розрахунки перехідних процесів режимів прямого пуску для номінальної напруги на якорі $U_a^{\text{ном}}$ та накидання номінального навантаження $M_c^{\text{ном}}$ після розгону до номінальної швидкості $\omega_{\text{ном}}$ (рис. 2).

СПОСОБИ ПІДВИЩЕННЯ ТОЧНОСТІ

Підвищити точність розв'язування інтегральних рівнянь числовими методами можна двома способами:

- 1) зменшення кроку (цілком очевидний спосіб) – менш економний, на перший погляд, у зв'язку з пропорційним зростанням обчислювальних витрат;
- 2) підвищенням порядку формули числового інтегрування (потрібно застосовувати з обережністю, бо, як показали числові експерименти, для великих значень кроку може дати протилежний до очікуваного результат).

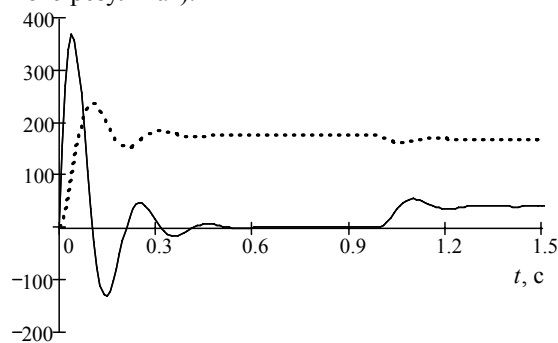


Рис. 2. Результати розрахунку за формулами (6) для кроку $h = 0.01$ с

Порівняти ефективність обох способів можна зіставляючи отримані результати з аналітичним розв'язком, що для наведеної лінійної системи знаходиться доволі просто – наприклад, із застосуванням прямого і оберненого перетворень Лапласа. Для одержаних вище рекурентних формул (6) слід очікувати другого порядку точності, тобто, зі зменшенням кроку вдвічі точність зростає у 4 рази, що підтверджується числовим експериментом (рис. 3), проведеним для двох значень кроку $h = 0.02$ і 0.04 с.

ФОРМУЛИ ІНТЕГРУВАННЯ ВИЩОГО ПОРЯДКУ

Виведення формул інтегрування є нескладною та відомою процедурою (особливо, із застосуванням комп'ютерних пакетів аналітичної математики): за n рівновіддаленими на крок h точками будується апроксимаційний поліном

$$a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0.$$

Далі знаходиться первісна (інтеграл) апроксимуючого полінома для проміжку $[x_i; x_{i+1}]$. Хід знаходження формули інтегрування показано нижче на прикладі формули третього порядку (використовуються три точки) (див. рис. 4).

- 1) Задається апроксимаційний поліном другого порядку: $P(x) = a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$.

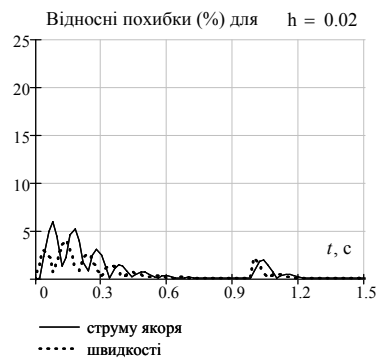
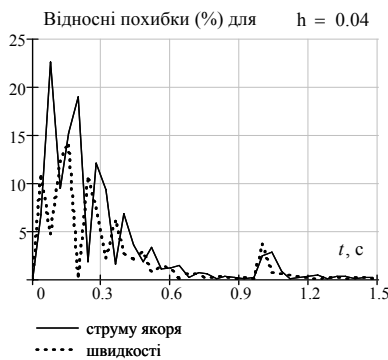


Рис. 3. Графіки похибок методу трапецій для двох значень кроку інтегрування

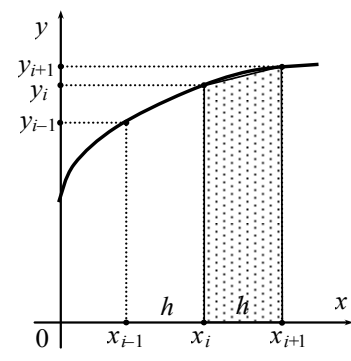


Рис. 4. Ілюстрація процесу побудови формули числового інтегрування третього порядку

- 2) За рівновіддаленими на крок h трьома точками аргументу x_{i-1} , x_i , x_{i+1} та відповідними їм абсцисами y_{i-1} , y_i , y_{i+1} знаходяться коефіцієнти апроксимуючого полінома:

$$\begin{cases} a_2 h^2 + a_1 h + a_0 = y_{i+1}; \\ a_0 = y_i; \\ a_2 h^2 - a_1 h + a_0 = y_{i-1}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}; \\ a_2 = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{2h^2}. \end{cases}$$

- 3) Знаходиться первісна полінома:

$$\int P(x) dx = a_2 \frac{x^3}{3} + a_1 \frac{x^2}{2} + a_0 x + C.$$

- 4) Підставивши в одержану формулу первісної раніше знайдені в п. 2 значення коефіцієнтів полінома і значення сталої інтегрування C (дорівнює нулеві), отримуємо формулу інтегрування, відому, як неявна формула Адамса третього порядку:

$$I_{i+1} = I_i + \frac{h}{12} (5y_{i+1} + 8y_i - y_{i-1}),$$

де I_i , I_{i+1} – значення інтегралу на i -му та $i+1$ -ому кроках інтегрування.

Для знаходження даних формул існує й інший шлях – застосування інтерполяції за Лагранжем чи Ньютоном, але результат буде той самий: відомо, що через задані точки можна побудувати лише один поліном визначеного порядку. Відповідно, результатом будуть формули числових інтеграторів, що знані, як неявні формули Адамса.

Аналогічно, зі збільшенням кількості точок, за якими будується апроксимаційний поліном, можна отримати формули числових інтеграторів вищих, наприклад, четвертого і п'ятого порядків:

$$\begin{aligned} I_{i+1} &= I_i + \frac{h}{24} (9y_{i+1} + 19y_i - 5y_{i-1} + y_{i-2}); \\ I_{i+1} &= I_i + \frac{h}{720} (251y_{i+1} + 646y_i - 264y_{i-1} + \\ &\quad + 106y_{i-2} - 19y_{i-3}). \end{aligned}$$

Підвищення їх порядку призводить до зростання точності та складності виразу для обчислень. У зв'язку з цим доцільно визначити раціональний порядок формули числового інтегрування з метою забезпечення максимального кроку для локальної похибки в межах $10^{-3} \dots 10^{-4}$ (в межах т. н. "інженерної" точності).

Для аналізу раціонального порядку числового методу можна використати два підходи:

- 1) на підставі дослідження частотних характеристик числових інтеграторів, які розглядаються як циф-

рові фільтри – це запропоновано в [3], де за результатами аналізу стверджується, що нема потреби у використанні числових інтеграторів вище третього-четвертого порядків;

- 2) на підставі результатів числових експериментів; у цьому випадку за перше наближення доцільно взяти рекомендації п. 1, а далі провести їх уточнення.

Очевидно, що другий спосіб дає додаткову інформацію в оцінці раціонального порядку числового методу інтегрування. Як тестову використано вже раніше розв'язану задачу (3), для якої отримані моделюючі рекурентні рівняння на основі формул третього і четвертого порядків. Знайдені вирази для швидкості ω та струму якоря i_a для інтеграторів вищих порядків мають доволі складний вигляд, тому в статті не наводяться через брак місця. Похибки для формул інтегрування другого-четвертого порядків та різних кроків ($h = 0.01$; 0.02 і 0.04 с) показані на рис. 5 (потрібно звернути увагу на масштаб похибок).

Аналіз отриманих графіків показує наявність практично незалежних від порядку числового інтегратора похибок у розв'язку за дії стрибкоподібних збурень (момент накидання навантаження для $t = 1$ с). Такі похибки пояснюються розривом першого роду функції розв'язку та її похідних. Формули ж числового інтегрування апроксимують рішення обмеженим розкладом у ряд Тейлора, який існує лише для неперервних і диференційованих функцій. Таким чином, наявність розривів у функції розв'язку може бути джерелом досить суттєвих похибок під час моделювання систем з імпульсними елементами.

ОЦІНКА ПОХИБОК РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

У застосуванні інтегральних рівнянь для моделювання динамічних систем актуальною є проблема оцінки локальної похибки на кроці розв'язування. Така оцінка дозволяє використати стратегію автоматичного вибору кроку розв'язування для підвищення ефективності процедури розв'язування. З цією метою можливе використання двох підходів:

- 1) застосування екстраполяції за Річардсоном [5], зокрема з одиничним і подвійним (або половинним і одиничним) кроками; недоліком даного способу є відчутне ускладнення процедури обчислень;
- 2) використання для оцінки локальної похибки формули вищого порядку, що є простішим у використанні і може ґрунтуватися на вже виконаних раніше кроках інтегрування (даний підхід є досить поширеним у прикладній математиці, зокрема, в оцінці похибок числових методів інтегрування диференціальних рівнянь [6]).

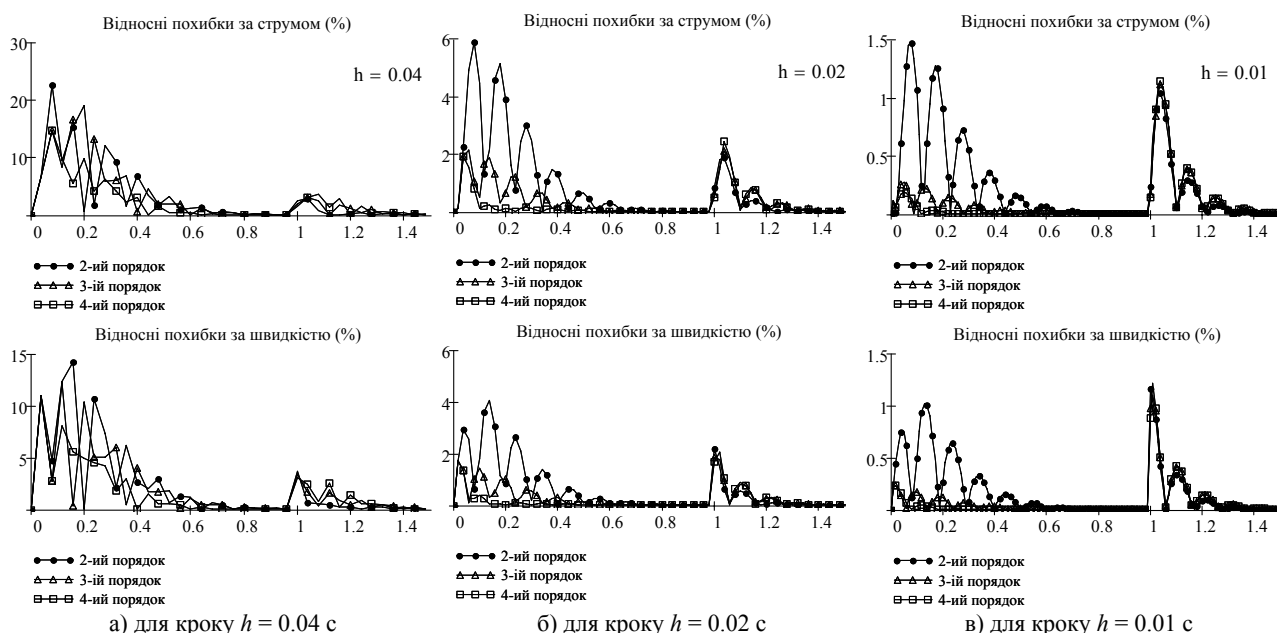


Рис. 5. Графіки відносних похибок числових інтеграторів другого-четвертого порядків для різних кроків

Примітка: Зверніть увагу на масштаб кожного графіка.

Очевидно, що другий спосіб виглядає простішим у використанні й не потребує великої кількості обчислень. Проте пересторогою в його використанні є похибки результатів моделювання, які показані на рис. 5, де видно, що за наявності розривів у функції розв'язку (момент накидання навантаження на двигун) практично нема відмінностей у величинах похибок методів інтегрування різних порядків. Практична перевірка даного способу може бути здійснена таким чином:

- за допомогою неявної формули інтегрування трапецій (другого порядку) знаходиться i -те значення інтегралу за формулою

$$I_i^{(2)} = I_{i-1} + \frac{h}{2}(y_{i+1} + y_i);$$

- для уточнення отриманої величини інтегралу застосовується неявний метод інтегрування Адамса третього порядку, в якому i -те значення інтегралу визначається за формулою

$$I_i^{(3)} = I_{i-1} + \frac{h}{12}(5y_{i+1} + 8y_i - y_{i-1});$$

- оцінка відносної похибки знаходиться з виразу

$$\Delta_i = \frac{I_i^{(3)} - I_i^{(2)}}{I_i^{(2)}} \cdot 100\% = \frac{2y_i - y_{i+1} - y_{i-1}}{6 \cdot (y_{i+1} + y_i)} \cdot 100\%.$$

Порівняння відносної похибки (стосовно аналітичного розв'язку) та її оцінки за допомогою формули інтегрування третього порядку для неявного методу трапецій з кроком $h = 0.02$ с показано на рис. 6 для основних змінних моделі (рис. 1) – струму якоря та кутової швидкості.

Таким чином, проведений простий числовий експеримент показав прийнятність пропонованого підходу для оцінки похибок числового методу під час розв'язування інтегральних рівнянь. Деяка розбіжність у результатах оцінки порівняно з точним значенням є допустимою в силу природи оцінки, яка свідчить про необхідність зміни кроку інтегрування та використовується в реалізації стратегії автоматичного кроку розв'язування. Потрібно зауважити, що за на-

явності розривів у функції розв'язку (в даній моделі – момент накидання навантаження), оцінка похибки дала задовільний результат, що свідчить про можливість узагальнення такого підходу для моделювання систем з імпульсними елементами.

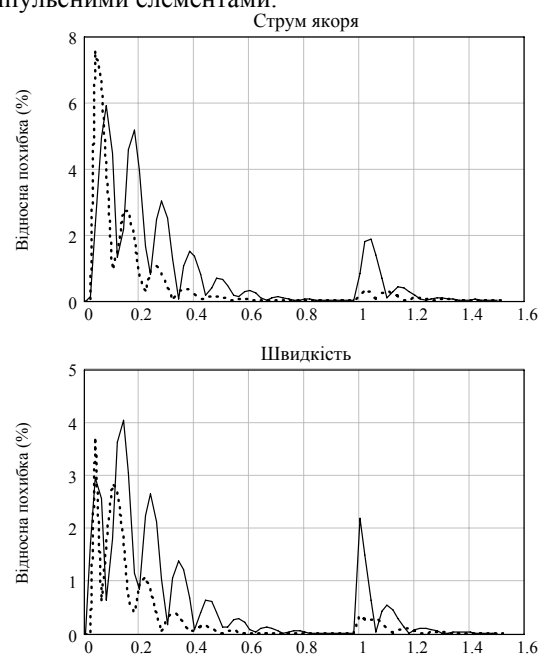


Рис. 6. Графіки відносних похибок у розрахунку динамічних процесів для методу трапецій і кроку $h = 0.02$ с:

- точне значення відносної похибки;
- оцінка за допомогою методу інтегрування третього порядку

Не таким оптимістичним виглядає застосування для розв'язування формул вищого порядку: як приклад, розглянемо випадок застосування формули інтегрування третього порядку та оцінки похибок за формулою четвертого порядку. Як показують числові експерименти (рис. 7), таке поєднання дає менш точні результати оцінки похибки і при цьому є значно складнішим.

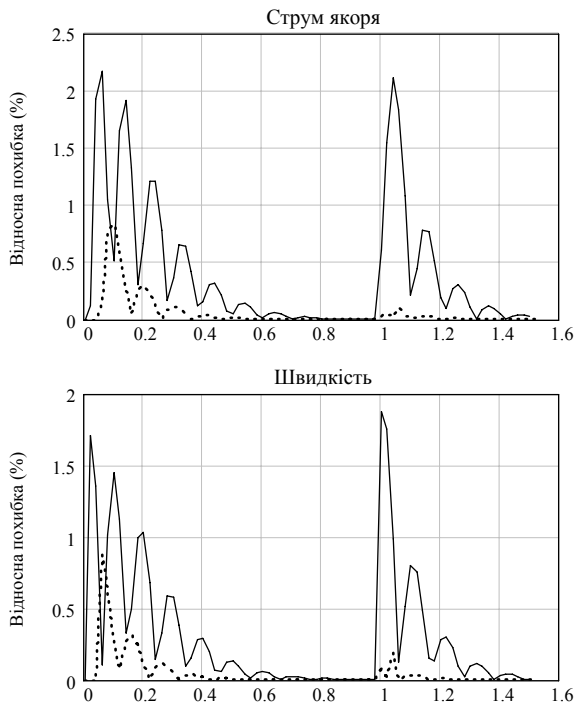


Рис. 7. Графіки відносних похибок у розрахунку динамічних процесів для методу третього порядку і кроку $h = 0.02$ с:

— точне значення відносної похибки;
 оцінка за допомогою методу інтегрування четвертого порядку.

ВИСНОВКИ

Зазначені вище числові експерименти можна було провести на складнішій моделі, але виходячи зі стародавнього принципу "*Не слід ускладнювати сутності понад потребу*", була застосована проста модель ДПС, яка виявилась достатньо інформативною для аналізу та роздумів.

Аналіз отриманих графіків результатів та похибок дає змогу зробити певні висновки:

- 1) за наявності в моделі імпульсних елементів порядок методу інтегрування (з метою забезпечення заданої точності) не має визначального значення, тому раціональним буде використання формули інтегрування другого порядку (неявної формули трапецій) з відповідним кроком; використання методу трапецій має й побічні позитивні ефекти:
 - спрощується реалізація стратегії автоматичного вибору кроку розв'язування;
 - деяке зменшення кроку для збільшення точності розв'язування порівняно з методами вищих порядків дозволяє "акуратніше" відслідковувати зміни функції розв'язку;
 - не вносить фазних похибок в отримані з його допомогою цифрові моделі [3], [4], що є важливим у дослідженнях замкнутих систем автоматичного регулювання;
- 2) у разі гладкого розв'язку для отримання інженерної точності (не вище $10^{-3} \dots 10^{-4}$) раціональним є застосування формул інтегрування другого-третього порядків; застосування формул вищих порядків призводить до значного ускладнення розрахункового виразу – аналогічного ефекту можна досягти незначним зменшенням кроку для згаданих формул;

- 3) відсутнє накопичення похибок числового методу в розв'язку.

Підсумовуючи вище сказане, можна зробити висновки про те, що раціональним варіантом для розв'язування систем інтегральних рівнянь, що описують динаміку сучасних керованих електромеханічних систем, є неявний метод трапецій.

Від автора

Власне кажучи, про переваги методу трапецій автор й сам давно підозрював, але, як завжди, бракувало доказів...

Автор з нетерпінням очікує на дискусію щодо поданого матеріалу чи його обговорення як на сторінках журналу, так і в листуванні.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Filc R. Equivalents Method for Linear Circuits Transients Calculation. Proceedings of International Conference on Modern Problems of Telecommunications, Computer Science and Engineering Training. TCSET'2002, Lviv-Slavsko. February, 18-22, 2002, pp. 18-23.
- [2] Верлань А. Ф., Москалюк С. С. Математическое моделирование непрерывных динамических систем. – К.: Наукова думка, 1988. – 288 с.
- [3] Мороз В. Аналіз чисельних методів для аналізу керованих електромеханічних систем// Тези доповідей 3-ої Міжнародної науково-технічної конференції "Математичне моделювання в електротехніці, електроніці та електроенергетиці", 25 - 30 жовтня 1999 р., Львів, Україна.
- [4] Мороз В. Аналіз числових методів для моделювання керованих електромеханічних систем// Вісник ДУ "Львівська політехніка" "Електроенергетичні та електромеханічні системи", 2000, № 403, с. 111-113.
- [5] Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 608 с.
- [6] Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. Пер. с англ. – М.: Мир, 1990.

Надійшла 01.09.2006