

АНАЛИЗ МЕТОДОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПЕТЛИ ГИСТЕРЕЗИСА ФЕРРОМАГНИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Король Е.Г.

Национальный технический университет "Харьковский политехнический институт",
кафедра "Электрические аппараты"

Украина, 61002, Харьков, ул. Фрунзе, 21

тел. (057) 707-68-64, e-mail: lupikov@kpi.kharkov.ua

Розглянуто існуючі методи аналітичного описання петлі гістерезиса. Описано переваги і недоліки кожного методу. Обґрунтовано вибір методу, при використанні якого можливе підвищення точності моделювання петлі гістерезису.

Rассмотрены существующие методы аналитического выражения петли гистерезиса. Описаны преимущества и недостатки каждого метода. Обоснован выбор метода, при использовании которого возможно повышение точности моделирования петли гистерезиса.

ВВЕДЕНИЕ

Перспективным направлением для снижения внешнего магнитного поля силового электрооборудования является использование электромагнитов компенсаторов в составе специальных параметрических систем компенсации, обеспечивающих автоматическое слежение за параметрами (токами, напряжениями) электрооборудования. В таких системах электромагнит компенсатор выполняется в виде обмотки с ферромагнитным сердечником. Одной из основных характеристик, которая определяет эффективность электромагнитов компенсаторов, являются петли гистерезиса ферромагнитного сердечника.

Петлей гистерезиса называется циклическое изменение напряженности поля от величины H_1 до величины H_2 и затем вновь до H_1 и с ходом индукции B по замкнутой кривой [1]. Петля гистерезиса называется симметричной, если выполняются следующие условия $H_1 = H_m$, $H_2 = -H_m$, где H_m – амплитуда напряженности поля. Статической петлей гистерезиса называется петля, получаемая при медленном (квазистатическом) изменении поля. Динамической петлей потерь называется кривая, описывающая зависимость $B(H)$ при периодическом изменении H (в переменном магнитном поле). Несимметричные петли гистерезиса получают при несимметричном относительно начала координат или одностороннем изменении напряженности поля, а также при изменении напряженности поля между двумя предельными значениями одного знака или если же предельные значения напряженности магнитного поля имеют разные знаки и не равны по абсолютной величине (рис. 1).

В данной статье ставится задача описания симметричной петли гистерезиса ферромагнитного материала сердечника электромагнита-компенсатора магнитного поля. Это связано с тем, что в большинстве практических случаев сердечник не подмагничивается внешними магнитными полями.

Цель работы – анализ известных методов описания симметричной петли гистерезиса для ферромагнитных материалов сердечников электромагнитов-

компенсаторов и выбор перспективного метода, обеспечивающего высокую точность аппроксимации петли гистерезиса.

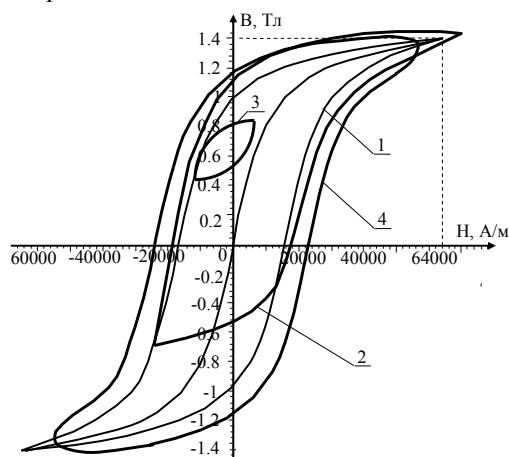


Рис. 1. Петли гистерезиса: 1 – симметричная; 2, 3 – несимметричная; 4 – динамическая

МЕТОДЫ АППРОКСИМАЦИИ ПЕТЛИ ГИСТЕРЕЗИСА

Много работ посвящено аппроксимации петли гистерезиса и нахождению наилучшего способа ее описания. Характеристика всех этих принципиально различных методов приводится ниже.

Методы Аркадьева, Вюршмида, Оллендорфа и Миттельштрасса. Аркадьев, Вюршмидт и Оллендорф предложили заменить петлю гистерезиса эллипсом для вычисления потерь на гистерезис. Из литературы известно, что эллиптические петли характеризуются тремя видами магнитной проницаемости [2]: амплитудной (полной), консумптивной ("вязкой") и консервативной ("упругой") проницаемостью. Аркадьев для описания петли ввел комплексную магнитную проницаемость $\dot{\mu}$. А Миттельштрасс предложил способ определения частей этой комплексной магнитной проницаемости $\dot{\mu}$. Для их нахождения были использованы основные гармоники консумптивной и консервативной частей индукции. Консер-

вативную часть комплексной магнитной проницаемости необходимо определять по площади петли проницаемости, а консумптивную – по площади петли гистерезиса, которая должна быть построена в координатах B и $(H_0^2 - H^2)^{0.5}$ [3].

Данные методы имеют большое теоретическое значение. Недостатком является то, что эти подходы можно применить при расчетах цепей только при малых индукциях.

Метод Релея. Для случая слабых намагничивающих полей Релей предложил следующую универсальную формулу для начального участка кривой намагничивания [4]:

$$J = a \cdot H \pm b \cdot H^2. \quad (1)$$

В формуле (1) знак плюс соответствует положительным значениям напряженности поля, а знак минус – отрицательным.

А для описания петли гистерезиса Релей применил два уравнения [3, 4]:

- для восходящей ветви

$$J = (a + b \cdot H_m) \cdot H + \frac{b}{2} (H^2 - H_m^2), \quad (2)$$

- для нисходящей ветви

$$J = (a + b \cdot H_m) \cdot H - \frac{b}{2} (H^2 - H_m^2), \quad (3)$$

где H – напряженность; J – намагниченность; H_m – максимальное значение напряженности поля, соответствующее насыщению; a, b – постоянные коэффициенты.

Недостаток этого метода заключается в том, что соотношения (2), (3) имеют общие точки с действительной петлей гистерезиса лишь при максимальных значениях напряженности поля ($\pm H_m$), во всех остальных точках наблюдается отклонение от исходных величин петли.

Метод Вольтерра. Закон магнитного последствия [3], который был предложен Вольтерра, выражает зависимость индукции в данный момент в виде функции от напряженности в момент времени τ :

$$B(t) = f[H(t)] + \int_{-\infty}^t F[\mu(t - \tau)] \cdot H(\tau) \cdot d\tau, \quad (4)$$

где t – время; τ – момент времени в диапазоне $(-\infty, t)$; F – нелинейная функция.

Недостаток метода заключается в том, что неизвестен характер экспериментальной нелинейной функции F и, кроме того, наличие интеграла в правой части (4) усложняет расчет.

Метод Коваленкова и Мачинского. В этом методе как для описания кривой намагничивания, так и для описания петли гистерезиса применяются отрезки прямых линий. И тогда аналитическое выражение петли гистерезиса, в состав которого входит функция, выражающая изменение кривой при каждом изменении течения процесса φ_n , а также начальная кривая

намагничивания $f(x)$, примет следующий вид [3]:

$$y = \varphi_n [f(x)]. \quad (5)$$

Функция φ в формуле (5) при каждом повороте алгебраически не изменяется.

В самом простом случае по данному методу для кривой намагничивания записываются два уравнения, а для петли гистерезиса – четыре.

Методы описания петли гистерезиса с использованием рядов. Для описания петли гистерезиса при помощи рядов известны несколько способов.

В первом способе применяется периодическая функция, которая раскладывается в ряд Фурье [3]:

$$H = h \cdot \sum_{n=1,3,5..} \eta_n \cos(n \cdot \omega \cdot t + \psi_n), \quad (6)$$

где h – амплитуда первой гармоники; ψ_n – начальная фаза n -ой гармоники; η_n – отношение амплитуд гармоник n -ой и первой.

Помимо соотношения (6), в этом случае предполагается, что индукция изменяется по закону косинуса (в литературе [3] используется термин "синусоидально"): $B = B_m \cdot \cos(\omega \cdot t)$.

Во втором способе предлагается раскладывать в ряд Фурье выражение индукции, а напряженность изменяется косинусоидально $H = H_m \cdot \cos(\omega \cdot t)$.

В третьем способе петлю гистерезиса заменяют гармоническим рядом фигур Лиссажу и разложение на эти фигуры производятся графически, а не аналитически.

Главный недостаток перечисленных методов заключается в том, что при описании n петель гистерезиса получается n рядов.

Метод Мюллендорфа. По этому методу напряженность магнитного поля изменяется синусоидально $H = H_m \cdot \sin(\omega \cdot t)$, а индукция при этом выражается в следующем виде [3]:

$$B = B_m \cdot \frac{\sin(\omega \cdot t - a \cdot \cos(\omega \cdot t))}{\cos(b \cdot \cos(\omega \cdot t))}, \quad (7)$$

где B_m – максимальное значение индукции; a, b – постоянные величины петли гистерезиса, находящиеся в интервале от 0,2 до 0,8.

Петля гистерезиса, рассчитанная по данному методу согласно (7), имеет существенную погрешность по отношению к исходной.

Метод описания петли гистерезиса в прямоугольной системе координат. В данном методе, используя прямоугольную систему координат, предлагается петлю гистерезиса выразить в виде суммы двух кривых: основной и вспомогательной. Основную кривую, ординаты которой равны полусумме ординат петли, описывают при помощи выражения

$$B = \frac{H}{e^{a \cdot H + b}},$$

где B – магнитная индукция; H – напряженность магнитного поля; a, b – постоянные коэффициенты; а вспомогательную – следующей формулой [3]:

$$B_{всн} = B_r \cdot \left(1 - \frac{H^2}{H_m^2}\right)^{n+0.5}, \quad (8)$$

где $n=9$; B_r – остаточная индукция; H_m – максимальная напряженность поля; $B_{всн}$ – ордината вспомогательной кривой.

Недостаток данного метода состоит в том, что погрешность расчетной петли гистерезиса в соответствии с соотношением (8) и действительной петли составляет $11 \div 35$ %.

Методы описания петли гистерезиса в полярных координатах. В литературе предлагается два способа описания петли гистерезиса в полярных координатах.

В первом подходе используются следующие выражения [3]:

$$\begin{aligned} H &= (r \cdot \cos \varphi) \cdot m_H \\ B &= (r \cdot \sin \varphi) \cdot m_B \end{aligned}, \quad (9)$$

где φ – полярный угол; m_H , m_B – масштабы по напряженности поля и индукции соответственно; r – радиус-вектор, пересекающий петлю гистерезиса (9) лишь в одной точке, подчиняется уравнению [3]:

$$\begin{aligned} r &= \sum_{\substack{n=2k \\ k=0 \div \infty}} (a_n \cdot \cos n\varphi + b_n \cdot \sin n\varphi) = \\ &= \sum_{\substack{n=2k \\ k=0 \div \infty}} c_n \cdot \sin(n\varphi + \psi_n). \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь $c_n^2 = a_n^2 + b_n^2$, $a \operatorname{tg} \psi_n = a_n / b_n$.

Приведенный способ описания петли гистерезиса относится к слабым полям. Главным недостатком является то, что аналитическая зависимость коэффициентов ряда (10) от индукции B_m до сих пор неизвестна.

Во втором подходе радиус-вектор выражают при помощи следующего уравнения [3]:

$$r = (r_{\max} - r_{\min}) \cdot \sin^2 \beta + r_{\min}, \quad (11)$$

где r_{\max} – наибольший радиус-вектор петли; r_{\min} – наименьший радиус-вектор петли; β – вспомогательный угол, заключенный в диапазоне $(0, 2\pi)$.

Используя вспомогательный угол β в [3] предложено следующее соотношение для $\sin \varphi$:

$$\sin \varphi = \sum_{\substack{n=2k+1 \\ k=0 \div \infty}} (a_n \cdot \cos n\alpha + b_n \cdot \sin n\alpha). \quad (12)$$

Определение H и B идет по соотношению (9).

Достоинством метода является то, что параметры геометрии петли – радиус-вектор и его угол, описываются простыми аналитическими соотношениями (11), (12). Недостаток метода заключается в том, что до сих пор неизвестно его практическое применение.

Методы, предложенные Бессоновым. Для описания петли гистерезиса Бессонов предложил два метода.

Первый метод применим на постоянном токе. Он заключается в том, что берется аналитическое выра-

жение средней кривой намагничивания $H_{ср} = f(B)$ и, к нему прибавляются соответствующие абсциссы некоторой дополнительной функции $H_{доп} = \psi(B)$, знак которой зависит от направления процесса. В графическом виде в осях B , H последнее выражение по форме близко к эллипсу:

$$H = H_{ср} + H_{доп} = f(B) \pm H_c \cdot \left(1 - \frac{B^2}{B_m^2}\right)^{0.5}, \quad (13)$$

где B_m – максимальное значение индукции; H_c – величина напряженности поля, при котором индукция B равна нулю, называемая коэрцитивной силой.

Второй метод используется в случае переменного тока. Выражение, описывающее петлю гистерезиса в данном способе, имеет вид:

$$H = f(B) + H_c \cdot \cos(\omega t + \varphi), \quad (14)$$

где φ – фаза индукции относительно напряжения на входе цепи.

Функцию $f(B)$ в (13) и (14) предлагается выразить в следующем виде:

$$f(B) = a \cdot B + b \cdot B^3. \quad (15)$$

При графическом построении петли формула (14) дает удовлетворительное совпадение истинной и расчетной петли гистерезиса с погрешностью около 15%.

Достоинством последнего метода является то, что он позволяет в принципе получить более точную аппроксимацию петли гистерезиса в точках вблизи кривой намагничивания. В этой связи этот метод может быть использован в качестве перспективного при описании петли гистерезиса с высокой точностью во всем диапазоне изменения индукции.

Метод переменного доменного размера области намагничивания. Среди последних методов, описывающих петлю гистерезиса, можно отметить метод [5]. Полное поведение гистерезиса описывается функцией вида:

$$x(y) = x_h(y) + \gamma \cdot x_a(y) = \operatorname{hyst}(y) + \gamma \cdot \operatorname{arcf}(y), \quad (16)$$

где y – приведенное намагничивание материала относительно намагничивания насыщения; $x(y)$ – функция намагничивания; $x_h(y) = \operatorname{hyst}(y)$ – функции петли гистерезиса; $x_a(y)$ – функции кривой предельного намагничивания; γ – константа "коэффициент антигистерезиса", характеризующая начальное намагничивание; $\operatorname{f}(y)$ – функция Ланжевена (Langevin).

Входящая в (16) функция намагничивания зависит от квантово механических параметров:

$$y = \frac{M}{M_s} = B(J, a) = \tanh\left[\frac{x_e}{\theta}\right] f_\beta(x_e), \quad (17)$$

где M_s – намагниченность насыщения; M – текущая величина намагниченности; $B(J, a)$ – функция Бриллюэн (Brillouin); J – квантовое число; $a = \mu_0 m_B \frac{H}{kT}$ –

аргумент функции Ланжевена; m_B – магнетон Бора; k – постоянная Больцмана; T – абсолютная температура; $x_e = x + y$ – размер эффективной области намагничивания в компактной форме; $x = H/(\alpha M_s)$ – величина, приложенного поля напряженностью H ; α – коэффициент приведения намагниченности к результирующему полю – коэффициент Вейса (Weiss); $\theta = kT/(\alpha\beta_s\mu_0 m_B M_s)$ – температура; β_s – максимальный доменный размер; $f_\beta(x_e)$ – функция доменного размера.

Достоинством метода является то, что предельные параметры петли гистерезиса для различных материалов нормированы в пределах ± 1 , а ширина петли и поведение кривой начального намагничивания определяются на основе теории переменного размера области с использованием квантово механической теории. По сравнению с предыдущими методами этот метод позволяет аналитически описать поведение петли гистерезиса исходя из физики процесса намагничивания с учетом свойств магнитного материала. Недостатком метода является то, что для получения числовых величин параметров требуется знание квантово механических параметров материала (a , k , T , m_B , α , β_s). В то же время в электротехнике имеется ряд упрощающих приемов определения исходных данных для кривых намагничивания, в частности путем прямых измерений ширины петли гистерезиса, параметров предельной петли гистерезиса, параметров средней кривой намагничивания. Поэтому в тех случаях, когда не требуется связь параметров петли гистерезиса с квантово механическими параметрами материала этим методом можно не пользоваться.

ВЫВОДЫ

Проведен анализ существующих методов описания петли гистерезиса, как одной из основных характеристик магнитного материала сердечника электромагнита-компенсатора поля. В большинстве случаев для описания петли гистерезиса требуется аналитическое выражение кривой намагничивания, а также нахождение нескольких параметров (вспомогательных величин) или вспомогательных кривых. Число этих вспомогательных величин более двух. Недостатками перечисленных методов является то что, они ориентированы на графоаналитическое описание петли гистерезиса. Погрешности расчетных петель гистерезиса в большинстве случаев составляют 15% и более.

В качестве перспективного метода аппроксимации петли гистерезиса можно рекомендовать метод, предложенный Бессоновым. Метод позволяет в принципе повысить точность описания петли гистерезиса ферромагнитных материалов электромагнитов компенсаторов магнитного поля во всем диапазоне изменения индукции. Кроме того, при описании кривой намагничивания в этом случае можно обойтись без знания квантово механических параметров материала.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Андрианова К.А., Богородицкий Н.П., Корицкий Ю.В., Пасынкова В.В., Тареева Б.М., Справочник по электротехническим материалам в 2 т. Т. II // Магнитные, проводниковые, полупроводниковые и другие материалы. – М–Л.: Госэнергоиздат, 1960. – 290 с.
- [2] Кифер И. И. Испытания ферромагнитных материалов, М., "Энергия", 1969. – 360 с.
- [3] Бессонов Л. А., Электрические цепи со сталью. – М.: Госэнергоиздат, 1948. – 344 с.
- [4] Вонсовский С. В., Магнетизм. Магнитные свойства диа-, пара-, ферро-, антиферро-, и ферримагнетиков. – М.: Наука, 1971. – 1032 с.
- [5] Harrison R. G., Variable-domain-size theory of spin ferromagnetism. – IEEE Trans. Magn., V. 40, No. 3, May 2004. – P. 1506-1515.

Поступила 18.04.2007