

ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ И ВЫБОР СИСТЕМЫ КООРДИНАТ ПРИ АНАЛИЗЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИНАХ

Васьковский Ю.Н., д.т.н., Гайденко Ю.А.

Национальный технический университет Украины "Киевский политехнический институт"
Украина, 03056, Киев, пр-т Перемоги, 37, корп.20, кафедра электромеханики
тел. (044) 454-95-18, E-mail: ntuukafem@ua.fm

На прикладі асинхронного короткозамкненого електродвигуна з масивними стрижнями ротора проаналізована проблема оптимального вибору системи координат, в якій формулюються і розв'язуються рівняння електромагнітного поля в активній зоні двигуна.

На прикладі асинхронного короткозамкнутого електродвигателя с массивными стержнями ротора проанализирована проблема оптимального выбора системы координат, в которой формулируются и решаются уравнения электромагнитного поля в активной зоне двигателя.

ВВЕДЕНИЕ

Наиболее точный и достоверный расчет интегральных характеристик ЭМ можно выполнить на основе результатов анализа электромагнитного поля в активной зоне машины [1, 2]. Полевой анализ ЭМ требует одновременного решения общих уравнений поля во всех частях машины с учетом их взаимного относительного движения.

Запись уравнений поля и их дальнейшее решение можно проводить в различных системах координат, связанных с каждой из частей машины, а также, в общем случае, в произвольной инерциальной системе координат, перемещающейся с постоянной скоростью относительно каждой из частей машины. Например, в ЭМ вращающегося типа уравнения электромагнитного поля машины могут решаться как в неподвижной (статорной) системе координат, так и в подвижной (роторной) системе координат, вращающейся с угловой скоростью ω_R вместе с ротором. В симметричных машинах переменного тока, питаемых симметричным фазным напряжением, рассматривается еще и угловая скорость вращения электромагнитного поля статора ω_1 . В ряде случаев целесообразно выполнять решение уравнений поля в системе координат, синхронно вращающейся с электромагнитным полем обмотки статора.

В соответствии с принципом относительности основные интегральные характеристики процесса электромеханического преобразования энергии в ЭМ инвариантны (одинаковы) в любой системе координат. В частности, инвариантными в различных системах координат остаются потери энергии в электропроводных элементах Q_D (а значит и их нагрев), механическая работа и мощность (а значит при заданной скорости вращения ротора и электромагнитный момент $M_{ЭМ}$), полная энергия электромагнитного поля W_M . Зависимость этих величин от выбора системы координат противоречила бы закону сохранения энергии.

С другой стороны, как будет показано далее, форма записи уравнений поля неодинакова в различных системах координат. Следовательно, инвариан-

тным с точки зрения наблюдателей, находящихся в различных системах координат, является распределение полевых функций (в частности векторного магнитного потенциала) в расчетной области, т.е. изображение картины поля.

Какими же критериями должен пользоваться наблюдатель при выборе наиболее подходящей для полевого анализа ЭМ системы координат? Во-первых, поскольку решение уравнений поля выполняется, как правило, численно, то при рассмотрении каждой конкретной задачи необходимо выбирать наиболее простую форму записи уравнений поля и соответствующую ей более простую вычислительную процедуру. Во-вторых, расчетные результаты должны обеспечить наглядный анализ картины поля и адекватную физическую интерпретацию полученных результатов. Рассмотрим указанную проблему на примере трехфазного асинхронного электродвигателя (АД) с короткозамкнутой обмоткой на роторе, содержащей массивные электропроводные стержни.

АНАЛИЗ УРАВНЕНИЙ ПОЛЯ В РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМАХ КООРДИНАТ

Расчет электромагнитного поля АД обычно проводят в расчетной области неизменной конфигурации при неизменном положении ротора относительно статора. Это допущение об "условной неподвижности" статора и ротора очень продуктивно, поскольку позволяет существенно упростить расчет численными методами - в процессе расчета используется только одна дискретная сетка, покрывающая расчетную область неизменной конфигурации. Сам же факт движения ротора и его влияние на характеристики машины учитывается в уравнениях поля.

Применительно к АД такой подход вносит некоторую погрешность, связанную с учетом изменения распределения поля при перемещении ротора относительно статора в пределах одного зубцового деления. Однако, как показали многочисленные исследования, эта погрешность практически не влияет на расчетные характеристики машины, а в случае необходимости можно провести серию дополнительных расчетов при различных положениях зубцов статора относительно зубцов ротора.

Ограничимся анализом электромагнитного поля АД в двумерном приближении, когда его поле может быть охарактеризовано с помощью векторного магнитного потенциала $\vec{A} = \vec{z}A$, имеющего одну пространственную компоненту, направленную вдоль оси машины (вдоль оси z системы координат). В этом случае подлежащее решению уравнение поля в общем виде имеет следующий вид [2]:

$$\Delta A - \mu\gamma \frac{\partial A}{\partial t} + \mu\gamma(\vec{V} \times \text{rot} A) = -\mu J_{\text{стор}} \quad (1)$$

где \vec{V} - вектор линейной скорости относительного движения материальной точки в электропроводной части конструкции ЭМ и системы координат, μ, γ - магнитная проницаемость и электропроводность. Задаваемые в правых частях уравнения (1) источники поля - сторонние плотности токов $J_{\text{стор}}$ задаются в сечениях обмоток машины и всегда соответствуют выбранной системе координат. Если на движущейся относительно системы координат части машины (роторе) также задаются сторонние плотности токов, то их величины должны быть приведены к выбранной системе координат. Этот аспект проблемы в статье не рассматривается.

Будем рассматривать установившиеся процессы, предполагая, что все величины являются гармоническими функциями времени. Переходя к комплексным изображениям величин, а также выражая вектор линейной скорости в виде $\vec{V} = \omega_R \vec{R}$, где \vec{R} - радиус - вектор произвольной точки ротора, получим запись уравнения (1) в следующем виде:

$$\Delta \dot{A} - j\omega\mu\gamma \dot{A} + \mu\gamma\omega_R(R \times \text{rot} \dot{A}) = -\mu \dot{J}_{\text{стор}} \quad (2)$$

где ω - угловая частота изменения во времени векторного магнитного потенциала. При этом во всех точках ротора задается вектор скорости движения проводников ротора относительно системы координат. Например, в декартовых координатах с началом, расположенным в геометрическом центре машины, для составляющих вектора скорости в произвольной точке имеем выражения:

$$V_x = \omega_R R \cos \alpha = \omega_R y, \quad V_y = \omega_R R \sin \alpha = \omega_R x,$$

где R, x, y - радиус и декартовы координаты произвольной точки ротора, α - угол между осью Y системы координат и радиус - вектором точки.

В левой части уравнения (2) кроме общего лапласиана $\Delta \dot{A}$ содержатся еще две составляющие: "трансформаторная" составляющая $j\omega\mu\gamma \dot{A}$, которая характеризует вихревые токи в электропроводном теле, индуцированные изменяющимися во времени сторонними источниками поля, и "конвективная" составляющая $\mu\gamma\omega_R(R \times \text{rot} \dot{A})$, которая характеризует вихревые токи, индуцированные в электропроводном теле при его движении относительно источников поля. Несложно видеть, что обе составляющие отсутствуют в непроводящих телах (при $\gamma = 0$), а конвективная со-

ставляющая к тому же отлична от нуля лишь в движущемся роторе.

Магнитопроводы статора и ротора АД обычно выполняются шихтованными. Пренебрегая влиянием незначительных вихревых токов шихтованных магнитопроводов на распределение поля в двигателе, можно обосновано считать, что электропроводность магнитопроводов равна нулю. Обычно также принимают, что электропроводность расчетных подобластей, расположенных в пазах статора с обмотками, также равна нулю. При этом, однако, в пазах задаются сторонние плотности токов обмоток. Пренебрежение электропроводностью подобластей в пазах ведет к пренебрежению неравномерностью распределения токов в сечении проводников обмоток, что при малых размерах сечений проводников вполне допустимо.

Таким образом, при расчете распределения поля в АД все элементы области статора можно считать неэлектропроводными, т.е. для статора справедливо следующее стационарное уравнение Пуассона, вытекающее из уравнения (2) при условии $\gamma = 0$:

$$\Delta \dot{A} = -\mu \dot{J}_{\text{стор}} \quad (3)$$

Поле в шихтованном магнитопроводе ротора и в воздушном зазоре также описывается уравнением (3). И только в массивных электропроводных роторных стержнях АД - подобластях пазов ротора, необходимо использовать общее уравнение (2). Таким образом, форма записи уравнения электромагнитного поля для статора и ротора существенно отличаются.

Угловая частота изменения во времени магнитного потенциала и токов ω и угловая частота вращения ротора ω_R зависят от выбора системы координат. При выборе системы координат формулируются соответствующие условия, которые накладываются на частоты в уравнении (2).

В синхронно вращающихся координатах наблюдатель видит "замороженную" (неизменяющуюся во времени) систему токов фаз обмотки статора. Условно допуская, что вместе с токами статора вращаются и пазы статора, несложно задать в них источники поля - неизменные во времени плотности токов:

$$\begin{aligned} J_{A\text{стор}} &= I_m / S_{\Pi} \\ J_{B\text{стор}} &= I_m \cos(-2\pi/3) / S_{\Pi} \\ J_{C\text{стор}} &= I_m \cos(-4\pi/3) / S_{\Pi} \end{aligned} \quad (4)$$

где I_m - амплитуда тока в фазе статора, S_{Π} - площадь паза статора.

Ротор относительно синхронной системы координат вращается с угловой частотой $\omega_R = \omega_1 s = 2\pi f s / p$, где s - скольжение ротора, p - число пар полюсов. Поскольку при работе двигателя в установившемся симметричном режиме работы вращающееся с частотой скольжения поле токов ротора неподвижно относительно вращающегося поля токов обмотки статора, наблюдатель в синхронных координатах видит также неизменяющуюся систему токов в стержнях ротора. Поэтому частоту изменения переменных следует принять равной нулю $\omega = 0$, в результате чего уравнение (2) для описания поля в

стержнях ротора приобретает следующий вид:

$$\Delta A + \mu\gamma\omega_1 s (R \times \text{rot } A) = -\mu J_{\text{стор}} \quad (5)$$

Таким образом, при решении задачи в синхронной системе координат поле описывается уравнениями (3) (в статоре, магнитопроводе ротора и зазоре) и (5) (в стержнях ротора).

При решении задачи в *статорной системе* координат необходимо принять условия $\omega = \omega_1$ и $\omega_R = \omega_1(1-s)$, в результате уравнение (2) для поля в стержнях ротора принимает следующий вид:

$$\Delta A - j\omega_1 \mu\gamma A + \mu\gamma\omega_1(1-s)(R \times \text{rot } A) = -\mu J_{\text{стор}} \quad (6)$$

Плотность токов в фазах обмотки статора, которые создают вращающееся поле, в этом случае необходимо задать как комплексные величины в следующем виде:

$$\begin{aligned} J_{A\text{стор}} &= I_m / S_{\Pi} \\ J_{B\text{стор}} &= I_m [\cos(-2\pi/3) - j \sin(-2\pi/3)] / S_{\Pi} \\ J_{C\text{стор}} &= I_m [\cos(-4\pi/3) - j \sin(-4\pi/3)] / S_{\Pi} \end{aligned} \quad (7)$$

Наконец при решении задачи в *роторной системе* координат ротор остается неподвижным. Поскольку на статоре нет электропроводных сред, в которых могли бы индуцироваться вихревые токи, его в роторной системе координат также можно считать неподвижным. Частота токов в стержнях ротора равна частоте скольжения. Тогда в уравнении (2) необходимо задать условия $\omega = \omega_1 s$ и $\omega_R = 0$. Уравнение поля для области пазов ротора окончательно записывается в следующем виде:

$$\Delta A - j\omega_1 s \mu\gamma A = -\mu J_{\text{стор}} \quad (8)$$

где значения плотности токов в пазах статора задаются по выражениям (7).

Таким образом, при решении уравнений поля (5), (6), (8) в исходных данных задаются только плотности сторонних токов в пазах статора, а индуцированные плотности токов в стержнях ротора находятся в результате расчета поля.

Очевидно, что форма записи уравнений поля и расчетная картина распределения потенциала неинвариантны в различных системах координат, хотя получаемые на их основе характеристики АД должны оставаться неизменными.

Из приведенных уравнений (5), (6), (8) самым простым для численного решения является уравнение (8), записанное в роторных координатах, и наоборот, наиболее сложным для решения является уравнение (6) в статорных координатах. При использовании роторной системы координат картина поверхностного эффекта в стержнях ротора выглядит более наглядно. Это же явление, рассчитанное, например, в координатах статора, дает иную картину распределения токов в пересечении стержней ротора, что осложняет интерпретацию результатов. Поэтому практически целесообразным является решение данной задачи в роторных координатах.

Важно, однако, подчеркнуть, что использование

моделей источников поля в виде (4), (7) совместно с уравнениями (5), (8) возможно только для трехфазных симметричных АД при наличии в них кругового вращающегося поля. Если условия создания кругового магнитного поля нарушены, и поле обмотки статора является пульсирующим или эллиптическим, то наблюдатель, например, в синхронной системе координат увидит на статоре изменяющиеся во времени с частотой ω_1 различные по амплитуде токи фаз обмотки статора, которые при этом вращаются относительно него с такой же угловой частотой. Таким изменением источников поля наблюдатель объяснит наличие в стержнях ротора АД в несимметричных режимах работы токов частоты $f_1(2-s)$. Поэтому при анализе поля АД в режимах несимметричного питания его обмотки статора следует использовать уравнение (6), записанное в системе координат статора, в которой возникли условия несимметрии.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

В качестве примера выполнено исследование электромагнитного поля четырех полюсного АД мощностью 180 кВт с алюминиевой коротко замкнутой обмоткой ротора. Расчеты поля выполнялись с помощью метода конечных элементов в вычислительном комплексе FEMLAB. Сетка конечных элементов в расчетной области насчитывает 121600 элементов и соответственно 59472 узлов, что обеспечивает высокую точность расчетов.

На рис. 1,а представлено изображение картины поля в поперечном сечении двигателя при скольжении ротора $s = 0,5$. Расчеты выполнены в роторной системе координат. Изолиниями и фоновой закрашкой показано распределение плотностей токов в пазах статора и ротора.

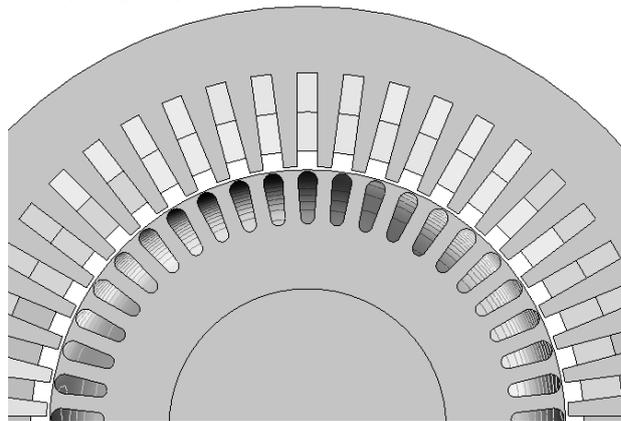


Рис. 1,а – Распределение плотностей токов в пазах статора и ротора, рассчитанных в роторной системе координат

На рис. 1,б представлен фрагмент картины распределения индуцированных в пазах ротора плотностей токов.

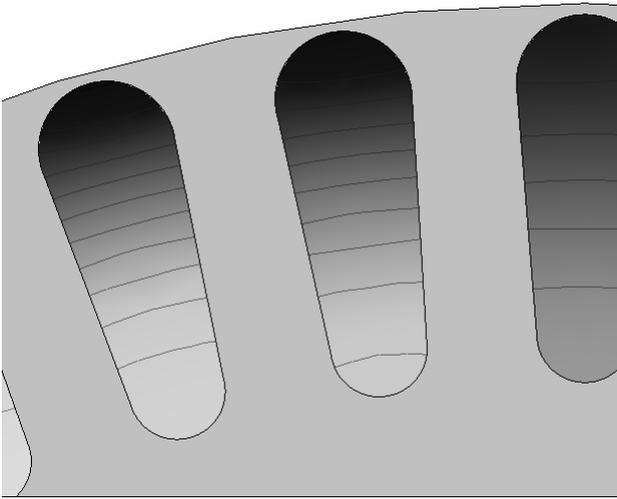


Рис. 1,б – Фрагмент картины распределения плотностей токов в пазах ротора, рассчитанных в роторной системе координат

На рис. 2,а представлено изображение картины поля в поперечном сечении двигателя, полученное также для скольжения ротора $s = 0,5$. Однако расчеты поля в этом случае выполнены в статорной системе координат по уравнению (6). Изолиниями и фоновой закрашкой показано соответствующее распределение плотностей токов в пазах статора и ротора. На рис. 2 б) представлен фрагмент картины распределения индуцированных в пазах ротора плотностей токов.

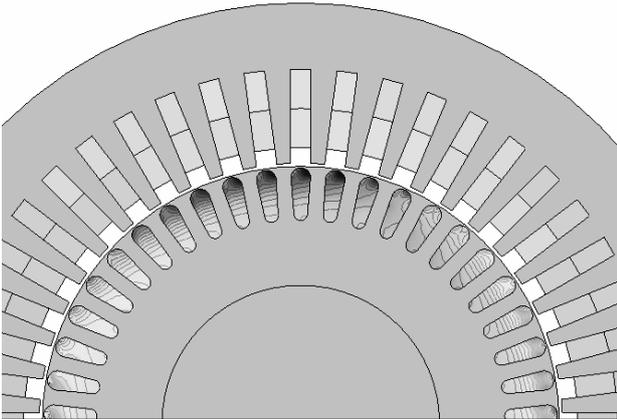


Рис. 2,а – Распределение плотностей токов в пазах статора и ротора, рассчитанных в статорной системе координат

Сравнение представленных на рис. 1,б и рис. 2,б картин поля показывает на существенное различие в характере распределения токов по сечению пазов ротора, рассчитанных в разных системах координат. Находящийся на роторе наблюдатель, видит "естественную" картину распределения плотности токов в пазах ротора, характеризующуюся одномерным поверхностным эффектом по глубине паза. С точки зрения находящегося на статоре наблюдателя, токи в пазах движущегося перед ним ротора распределены неравномерно не только по глубине пазов, но и по их ширине.

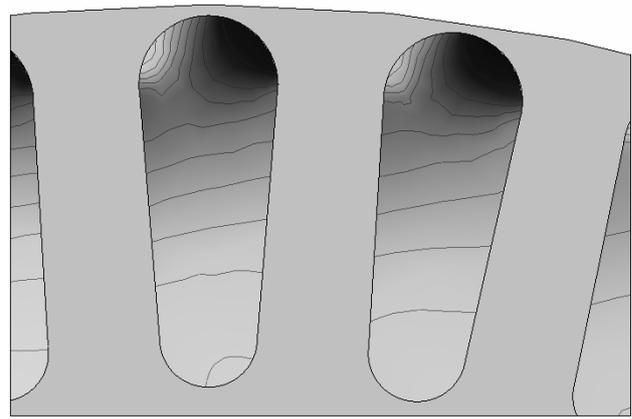


Рис. 2,б – Фрагмент картины распределения плотностей токов в пазах ротора, рассчитанных в статорной системе координат

Это различие является расчетным, оно обусловлено наличием в решаемом уравнении поля (6) "конвективной" составляющей и не имеет физического содержания. При этом численные значения для электромагнитного момента в обоих расчетах весьма близки: в роторных координатах расчетный момент равен 2033 Нм, а в статорных координатах – 1925 Нм (расхождение составляет около 6% и может быть объяснено численными погрешностями расчетов). Расчеты в статорных координатах занимают на (30 – 40)% больше процессорного времени и требуют большего количества итераций для решения системы нелинейных уравнений. Поэтому использование роторной системы координат при полевом анализе симметричных АД является более предпочтительным как с точки зрения наглядного представления полученных результатов и их адекватной физической трактовки, так и с точки зрения меньших вычислительных затрат на их получение.

Проведенные исследования позволяют сделать выводы, что, несмотря на справедливость общего принципа относительности при полевом анализе ЭМ с подвижными частями конструкции, оптимальный выбор системы координат, в которой выполняется решение уравнений поля, в каждом конкретном случае имеет важное практическое значение и требует специального обоснования.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Васильковский Ю.Н., Гайдено Ю.А., Цывинский С.С. Определение интегральных характеристик электрических машин методами теории электромагнитного поля // "Электротехніка і електромеханіка", №1, 2006, С.28–32.
- [2] Васильковский Ю.М. Математичне моделювання електромеханічних перетворювачів енергії: – Київ, НТУУ "КПІ", 2003. – 164 с.

Поступила 30.08.2007