

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИНДУКЦИОННО-ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

*У статті розглянуто питання математичного моделювання процесів, що відбуваються в індукційно-динамічних системах за допомогою сучасних комп'ютерних програм. Як приклад, розглянуто математичну модель індукційно-динамічного механізму без магнітопроводу та з ферромагнітним магнітопроводом. Надані якісні та кількісні оцінки отриманих результатів.*

*В статье рассматривается вопрос математического моделирования индукционно-динамических систем с помощью современных компьютерных программ. В качестве примера рассмотрена математическая модель индукционно-динамического механизма без магнитопровода и с ферромагнитным магнитопроводом. Даны количественные и качественные оценки полученных результатов.*

### ВВЕДЕНИЕ

Расчеты индукционно-динамических механизмов (ИДМ), наряду с расчетами электромагнитных механизмов, являются наиболее типичной и наиболее сложной задачей электромеханики. Сложность задачи заключается в необходимости решения триединой (мультифизической) задачи, учитывающей процессы происходящие в электрической цепи, механической системе и электромагнитном поле. Наибольшую сложность представляет расчет электромагнитного поля в случае, если диск механизма является сплошным токопроводящим телом, а составной частью индуктора является незамкнутый ферромагнитный магнитопровод. В этом случае любое приближенное решение задачи (без расчета электромагнитного поля на основании уравнений Максвелла) будет настолько неточным, что само решение теряет всякий смысл.

В настоящей статье рассмотрен расчет ИДМ в наиболее полной постановке задачи с использованием современных программных комплексов, а так же проведен анализ влияния ферромагнитного магнитопровода на работу ИДМ. Решение данной задачи актуально, так как общие принципы решения данной задачи лежат в основе расчета большого количества разнообразных электромеханических систем.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Провести расчет ИДМ с подвижным элементом в виде проводящего диска при условиях: катушка индуктора намотана проводом с заданным числом витков; масса движущихся элементов зависит от координаты (удар о неподвижное тело с последующим совместным движением); источником энергии системы является накопительный конденсатор; противодействующая сила постоянна по величине и направлению (хотя может зависеть от координаты); магнитопровод выполнен в виде цилиндра с центральным магнитопроводом из ферромагнитного материала с малыми потерями на гистерезис и вихревые токи.

### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Общий вид расчетной системы и ее размеры показаны на рис. 1. В данной задаче диск не моделируется как отдельная область, перемещающаяся на деформирующейся сетке. Вместо этого на неподвижной сетке задается движение проводящей области, шири-

на которой равна толщине диска. Такая постановка задачи позволяет избежать инвертирования ячеек сетки, значительно упрощая и ускоряя расчетный процесс не ухудшая точность модели. Ширина области движения диска составляет 15 мм (см. рис. 1), а толщина диска – 5 мм. Такое распределение проводимости может быть задано экспоненциальной функцией, отличной от нуля в области, имитирующей движущийся диск и практически равной нулю в остальной области (см. рис. 2).

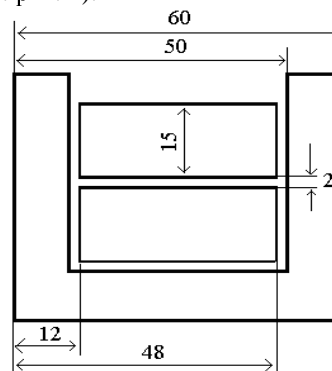


Рис. 1 – Расчетная модель ИДМ

D1	0 если $D \in D1$
D2	$\sigma$ если $D \in D2$
D1	0 если $D \in D2$

Рис. 2 – Значение проводимости в зависимости от принадлежности к той или иной области

На основании закона Максвелла – Ампера значение векторного магнитного потенциала можно записать:

$$\sigma \cdot \frac{\partial A_{\phi}}{\partial t} + \nabla \times (\mu^{-1} \cdot \nabla \times A_{\phi}) = J_{\phi} \quad (1)$$

В (1) используются общепринятые обозначения не нуждающиеся в расшифровке.

Так как катушка намотана равномерно распределенным по ее сечению проводом, то пренебрегая неравномерностью тока в отдельном проводящем витке для электрической цепи можно записать уравнение:

$$L \cdot \frac{d^2 q}{dt^2} + R \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{W}{S} \cdot \iiint_V \frac{\partial A_{\phi}}{\partial t} \cdot dV = U_c - \frac{q}{C} \quad (2)$$

где  $L$  – индуктивность внешней цепи;  $R$  – суммарное активное сопротивление цепи;  $C$  – емкость конденсатора;  $W$  – число витков катушки;  $S$  – площадь поперечного сечения катушки;  $V$  – объем катушки;  $q$  – электрический заряд;  $U_c$  – начальное напряжение на емкости.

Полученная система уравнений (1,2) должна быть дополнена уравнением движения диска:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(m(z) \cdot v) = Q - P(z) \\ \frac{dz}{dt} = v \end{cases} \quad (3)$$

Уравнение (3) представляет собой уравнение Мещерского (динамика тела с переменной массой), где  $m(z)$  – масса, зависящая от координаты;  $v$  – скорость;  $Q$  – электромагнитная сила;  $P(z)$  – противодействующая сила;  $z$  – координата положения диска.

В (3)  $m(z)$  представляет собой почти ступенчатую функцию (время удара о покоящуюся часть принимается равным величине порядка  $5 \cdot 10^{-5}$  с):

$$m(z) = \begin{cases} m_1, z < z_1 \\ m_1 + m_2, z \geq z_1 \end{cases} \quad (4)$$

где  $z_1$  – координата нахождения тела с массой  $m_2$ .

Электромагнитная сила определяется выражением:

$$Q = \iiint_V (\vec{J}_d \times \vec{B}) \cdot dV, \quad (5)$$

где  $J_d$  – плотность наведенного тока в диске.

#### ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ ДЛЯ РАСЧЕТА

В качестве основных исходных было принято значение напряжения на конденсаторе – 800 В; значение емкости – 100 мкФ; число витков индуктора – 100; начальная сила поджатия диска – 10 Н; массы движущихся и неподвижных частей и т.д. Для ферромагнитного сердечника задавалось значение относительной магнитной проницаемости от величины магнитной индукции (см. рис. 3). Необходимо отметить, что это один из многих возможных способов задания свойств материала. В процессе расчета ИДМ с ферромагнитным сердечником в качестве задаваемого свойства материала было значение удельной проводимости равной  $2,5 \cdot 10^4 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$ , которая определялась на основании мощности потерь в ферромагнетике, что позволяет учитывать вихревые токи в магнитопроводе.

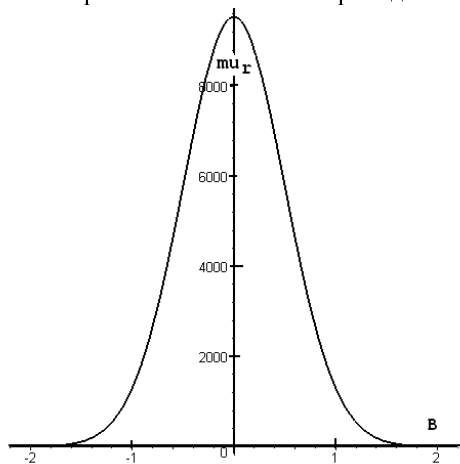


Рис. 3 – Кривая относительной магнитной проницаемости

#### РЕШЕНИЕ ПОСТАВЛЕННОЙ ЗАДАЧИ

Поставленная задача была решена прикладной программой COMSOL, в которой в специальном разделе были смоделированы области представляющие ИДМ (см. рис. 1) в осесимметричной системе координат и окружающее пространство с соответствующими свойствами для решения уравнения (1). В разделе Global Equations были записаны уравнения (2, 3). Так как наличие ступенчатых функций (функция Хевисайда) и Дельта функций (функция Дирака) приводят к неустойчивости в решении задачи, то в модели эти функции были заменены на специальные функции, имеющие сглаженную границу в области перехода и непрерывную первую или вторую производные.

#### РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА

В процессе расчета были решены две задачи с одинаковыми входными параметрами: моделирование ИДМ с ферромагнитным магнитопроводом; моделирование ИДМ без ферромагнитного магнитопровода. Расчет проводился для фиксированного значения времени – 0,9 мс. На рис. 4 показана зависимость хода подвижного диска от времени.

На рис. 5 показана зависимость тока в катушке ИДМ для двух расчетных вариантов (с ферромагнитным сердечником и без такового). На рис. 6 показаны значения электромагнитной силы, действующей на подвижный элемент механизма. На рис. 7 показаны значения противо-ЭДС, наводимой в катушке в соответствии с законом Фарадея.

#### ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТОВ

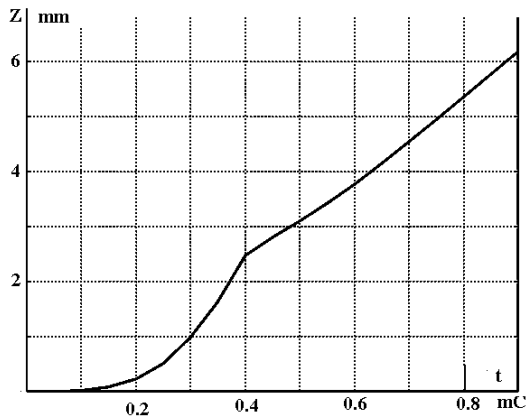
1. Как следует из рис.4, наличие магнитной системы мало влияет как на скорость, так и на путь подвижного элемента в пределах расчетных времен. Так, расстояние в 2,5 мм подвижный элемент проходит за время 0,4 мс вне зависимости от наличия магнитной системы и лишь к концу хода различие в ходе достигает значения в 1 мм. Это явление можно легко объяснить, если проанализировать картину магнитного поля в магнитопроводе, показанную на рис. 8 через время 0,05 мс от начала процесса.

Как следует из рис. 8 в магнитопроводе имеет место явно выраженный магнитный поверхностный эффект, т.е. независимо от размеров магнитопровода, весь поток сосредоточен на внутренней границе, а магнитная индукция достигает величины 1,6 – 1,8 Тл. Из чего можно заключить, что в начальные моменты процесса магнитопровод не оказывает существенное влияние на движение диска. Но по мере увеличения времени, поток распределяется по сечению более равномерно (уменьшается степень насыщения магнитопровода), что сказывается на характере движения диска.

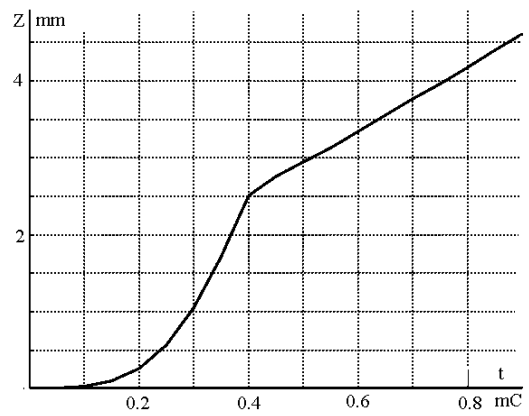
Необходимо отметить, что за счет вихревых токов в магнитопроводе распределение индукции имеет сложный вид.

2. Наличие магнитопровода уменьшает амплитуду тока в катушке рис. 5 и увеличивает время разряда конденсатора за счет увеличения значения индуктивности системы с магнитопроводом.

3. Наличие магнитопровода несколько увеличивает значение максимальной электромагнитной силы, действующей на диск и изменяет ее форму, увеличивая импульс силы.

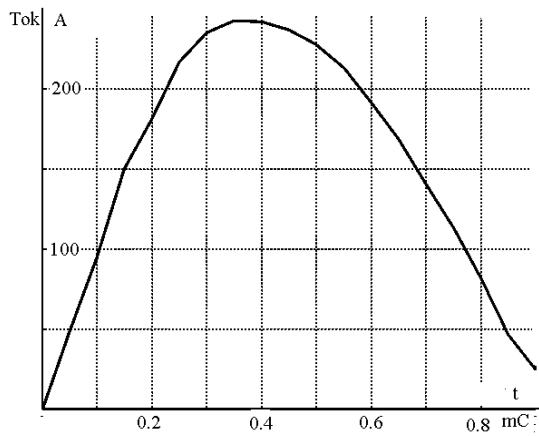


а) ИДМ с ферромагнитным магнитопроводом

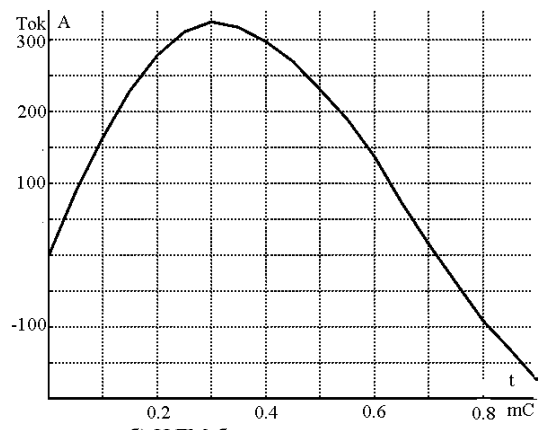


б) ИДМ без магнитопровода

Рис. 4 – Зависимость хода подвижного элемента от времени

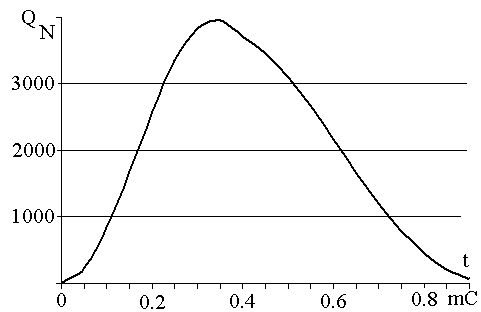


а) ИДМ с ферромагнитным магнитопроводом

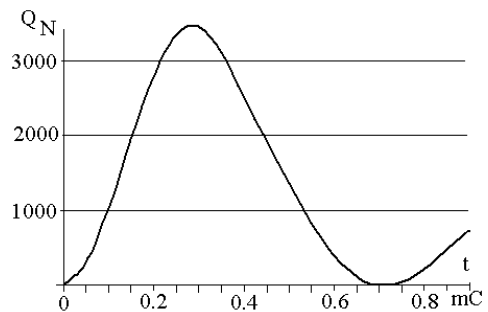


б) ИДМ без магнитопровода

Рис. 5 – Зависимость тока в индукторе ИДМ

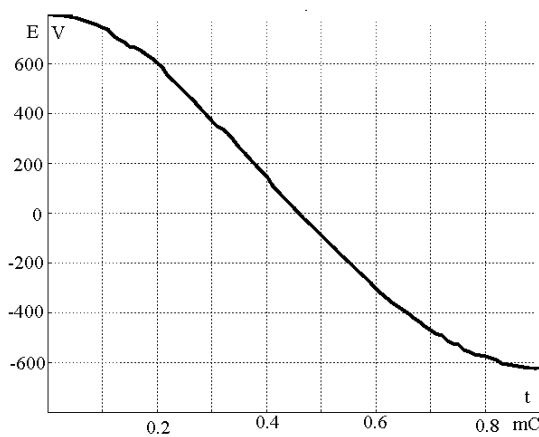


а) ИДМ с ферромагнитным магнитопроводом

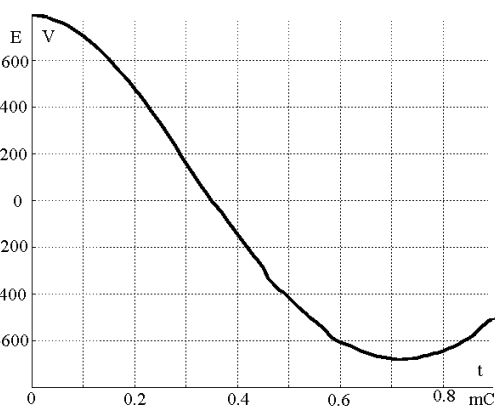


б) ИДМ без магнитопровода

Рис. 6 – Зависимость электромагнитной силы, действующей на подвижную часть ИДМ



а) ИДМ с ферромагнитным магнитопроводом



б) ИДМ без магнитопровода

Рис. 7 – Противо-ЭДС, действующая в катушке



Рис. 8 – Индукция в магнитопроводе

Расчеты показывают, импульс силы  $0,9 \text{ мС}$

$$p = \int_{t=0} Fz(t) \cdot dt \text{ для системы с магнитопроводом равен}$$

1,8 Н·с, а для системы без магнитопровода – 1,2 Н·с.

4. Распределение плотности наведенных токов в диске имеет сложный характер и существенно меняется со временем. На рис. 9 показано распределение плотности тока по толщине диска в момент времени 0,9 мС.

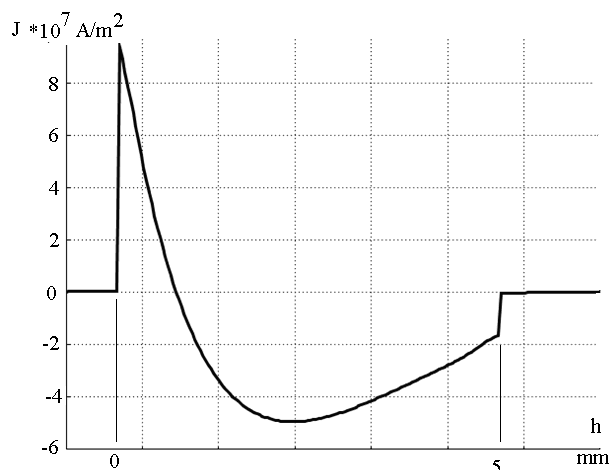


Рис. 9 – Распределение плотности тока по толщине диска через 0,9 мС

На рис. 10 показана зависимость тока диска от времени для системы с магнитопроводом.

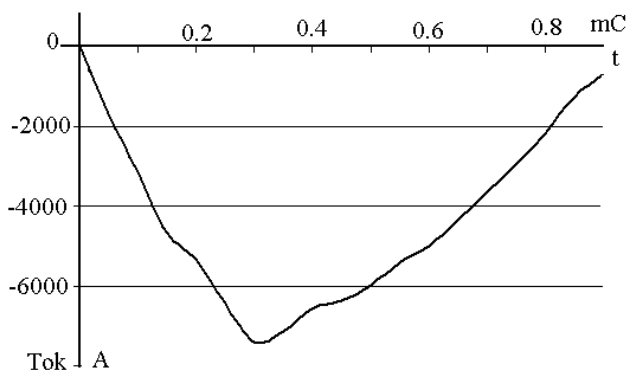


Рис. 10 – Ток диска для системы с магнитопроводом

В заключение был проведенный тепловой расчет катушки и диска в адиабатическом режиме для определения степени нагрева диска и индуктора в процессе работы.

## ВЫВОДЫ

1. Наличие магнитопровода слабо сказывается на динамике движения подвижного элемента, если время процесса имеет порядок 1 мС, это может быть объяснено электромагнитным поверхностным эффектом, при котором в начальные моменты времени весь поток магнитопровода сосредоточен в относительно тонком слое, а ферромагнетик в этих областях находится в насыщенном состоянии.

2. Ферромагнитный магнитопровод несколько уменьшает максимальное значение тока индуктора и увеличивает время разряда за счет привносимой в электрическую цепь дополнительной индуктивности.

3. Ферромагнитный магнитопровод изменяет форму электромагнитной силы, действующей на диск и несколько увеличивает действующий на диск импульс силы. Распределение объемных сил, действующих внутри диска существенно неравномерно и по характеру напоминает график распределения плотности тока в диске см. рис. 9.

4. При расчетах электрической цепи нет необходимости искусственно вводить индуктивность рассеяния катушки, так как в процессе расчета электромагнитного поля методом конечных элементов эта составляющая учитывается автоматически.

5. Проведенные расчеты показывают, что при временах разряда конденсатора порядка 1 мС интеграл Джоуля невелик. В соответствие с этим увеличение температуры диска и катушки за время работы ИДМ будет составлять десятки доли градуса и поэтому может не приниматься во внимание.

Поступила 14.07.2009

Байда Евгений Иванович, к.т.н., доц.,  
Национальный технический Университет  
"Харьковский политехнический институт"  
Украина, 61002, Харьков, ул. Фрунзе 21, НТУ "ХПИ",  
кафедра "Электрические аппараты"  
тел. (057) 707-69-76, факс (057) 707-66-01,  
e-mail: eie@kpi.kharkov.ua