

ПОДАВЛЕНИЕ ЯВЛЕНИЯ ГИББСА ПРИ РАСЧЕТЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ С ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ, ЗАДАВАЕМЫМ РАЗРЫВНОЙ ФУНКЦИЕЙ

Розглядається явище Гіббса для граничної умови магнітного поля у вигляді ступінчастого розподілу тангенціальної складової магнітної індукції на поверхні обмотки електромагніту, що граничить із зазором. Це явище пропонується компенсувати простим перетворенням розрахункової функції, яке не спотворює її поза точками розриву. Запропоноване перетворення рекомендується як загальне перетворення при заглушуванні явища Гіббса в точках розриву функцій, що розраховуються по їх рядах Фур'є.

Рассматривается явление Гиббса для граничного условия магнитного поля в виде ступенчатого распределения тангенциальной составляющей магнитной индукции на поверхности обмотки электромагнита, граничащей с зазором. Это явление предлагается компенсировать простым преобразованием расчетной функции, которое не искажает ее вне точек разрыва. Предложенное преобразование рекомендуется как общее преобразование при подавлении явления Гиббса в точках разрыва функций, рассчитываемых по их рядам Фурье.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время отечественной и зарубежной промышленностью выпускается большая номенклатура электромагнитных механизмов и электрических аппаратов, основу которых составляют разные типы электромагнитов постоянного тока. Среди них широкое применение получили электромагниты броневого типа, у которых симметричный или несимметричный магнитопровод образует внешний или внутренний зазор относительно малых размеров, по сравнению с длиной обмоточного окна (рис. 1).

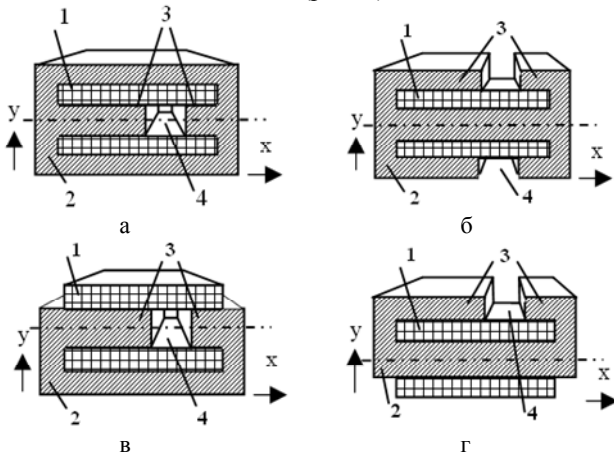


Рис. 1. Типы броневых электромагнитных систем с прямоугольным обмоточным окном: 1 – обмотка с током; 2 – магнитопровод (железо); 3 – полюса электромагнита; 4 – воздушный зазор

Если габаритный размер электромагнитов, изображенных на рис. 1, в направлении, перпендикулярном плоскости рисунка, много больше их габаритных размеров в этой плоскости, то такие электромагниты могут рассматриваться как двумерные системы, распределение магнитного поля в котором является плоскопараллельным (рис. 2).

При расчете этих электромагнитов важным этапом является расчет магнитного поля в обмоточном окне, который позволяет определять магнитные потоки замыкающихся внутри обмоточного окна, а также другие параметры, обусловленные распределением магнитного поля в обмоточном окне.

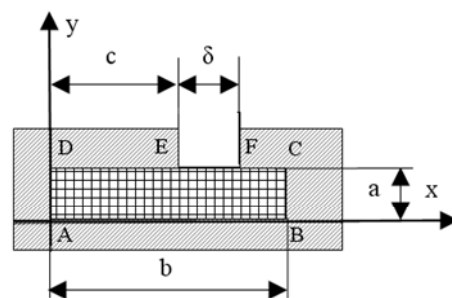


Рис. 2. Плоскопараллельная модель зоны обмоточного окна

Указанный расчет осуществляется для традиционных в данном случае допущений [1, 2], которые можно сформулировать следующим образом:

- магнитная проницаемость железа принимается равной бесконечности (идеальное железо);
- индукция магнитного поля на поверхности обмотки, не закрытой железом направлена вдоль оси катушки и имеет постоянное значение;
- распределение электрического тока по сечению обмотки намагничивания является равномерным (плотность тока в проводниках обмотки постоянна).

Для расчетной области, изображенной на рис. 2, принятие этих допущений означает, что на границе расчетной области (прямоугольная область ABCD на рис. 2) тангенциальная составляющая индукции магнитного поля:

- равна нулю, если эта граница обмотки с железом (линия EDABCF на рис. 2);
- равна некоторой постоянной величине B_0 (определяется законом полного тока), если эта граница обмотки с воздушным зазором (линия EF на рис. 2).

Соответственно этому для линии DC, как граничной линии расчетной области (рис. 2), граничное условие для тангенциальной составляющей вектора индукции поля может быть графически представлено в виде ступенчатой функции (рис. 3).

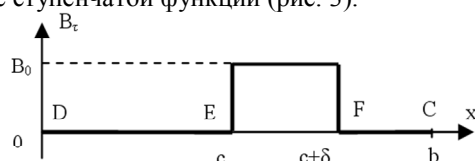


Рис. 3. Распределение индукции магнитного поля $B_t(x)$ на границе обмотки

Указанные граничные условия позволяют получить на основе решения уравнения Пуассона для векторного потенциала $A(x, y)$ плоскопараллельного магнитного поля в обмоточном окне определенное аналитическое выражение [3]. Причем, поскольку соответствующее решение проведено в [3] методом разделения переменных, применение которого связано с разложением в ряд Фурье функции $B_\tau(x)$, изображенной на рис. 3, то полученное решение для векторного потенциала $A(x, y)$ представляет собой тригонометрический ряд [3].

Следует отметить, что при численном расчете разрывной функции $B_\tau(x)$ на основе ее ряда Фурье, имеет место так называемое явление Гиббса, обуславливающее невозможность точного расчета значения функции в малой окрестности точки разрыва [4, 5].

В этой связи возникает вопрос о влиянии названного явления на результат расчета для векторного потенциала и потоков, замыкающихся внутри обмоточного окна по формулам, полученным в [3] на основе использования разрывной функции $B_\tau(x)$. Это обуславливает необходимость решения задачи об исследовании явления Гиббса для граничного условия, изображенного на рис. 3, и разработки эффективного метода его компенсации (подавления).

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Прежде всего, отметим, что под явлением Гиббса понимается "дефект сходимости" (так в [5]) ряда Фурье разрывной функции одной переменной (разрыв первого рода), который представляет собой скачок значений указанного ряда (тригонометрический ряд) справа и слева от точки разрыва в пределе: число слагаемых ряда стремится к бесконечности (рис. 4).

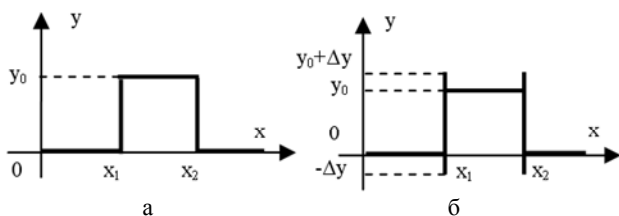


Рис. 4. Явление Гиббса для функции c

Подчеркнем, что "скачок", соответствующий явлению Гиббса, имеет место, как справа, так и слева от точки разрыва, на что иногда не указывают при описании явления Гиббса (см., например, [4, 6]).

Заметим также, что в теории цифровой обработки сигналов под явлением Гиббса понимается искажение ступенчатой функции при замене ее спектральной функцией с конечным числом слагаемых (на рис. 5 приведен пример такого искажения для функции, изображенной на рис. 4,а) [7].

Однако, согласно общей теории сходимости рядов Фурье, такие искажения обусловлены не конечным числом слагаемых, взятых для расчета (этим явление Гиббса объясняется, например, в [7]), а являются общим свойством ряда Фурье разрывной функции [4, 5].

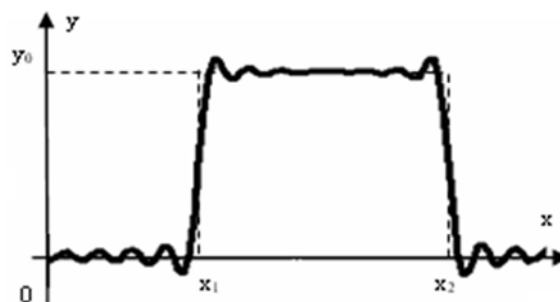


Рис. 5. К объяснению явления Гиббса

Таким образом, для граничного условия, изображенного на рис. 3, можно утверждать, что тригонометрический ряд функции $B_\tau(x)$, изображающей аналитически это условие, также дает искажение (при расчете) функция $B_\tau(x)$, как функции с двумя разрывами первого рода (при $x_1 = c$ и $x_2 = c + \delta$, рис. 3) для любого количества слагаемых ряда. То есть, ряд (все обозначения размеров по рис. 3)

$$B_\tau(x) = B_0 \frac{\delta}{b} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2B_0}{n\pi} \left(\sin\left(\frac{n\pi}{b}(c+\delta)\right) - \sin\left(\frac{n\pi}{b}c\right) \right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{b}x\right), \quad (1)$$

и справа и слева вблизи точек разрыва будет давать скачок значений функции $B_\tau(x)$ так, что будут иметь место неустранимые при любом увеличении числа слагаемых ряда (1) неравенства:

$$\begin{aligned} B_\tau(x_1 - \varepsilon) &\neq 0; & B_\tau(x_1 + \varepsilon) &\neq B_0; \\ B_\tau(x_2 - \varepsilon) &\neq B_0; & B_\tau(x_2 + \varepsilon) &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где ε – соответствует первому $B_\tau(x_2 - \varepsilon) \neq B_0$ максимуму (минимуму) вблизи точки разрыва x_1 и x_2 функции $B_\tau(x)$ по (1) при конечном числе слагаемых (рис. 6).

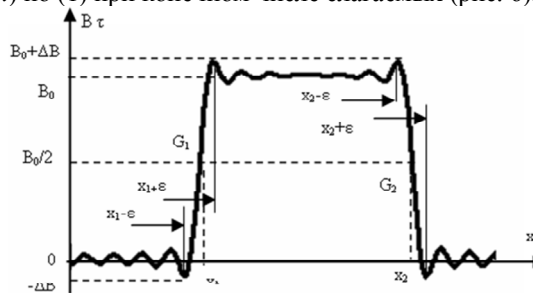


Рис. 6. К объяснению явления Гиббса для функции $B_\tau(x)$

Как следствие, если не "компенсировать" [8] явления Гиббса, то неточность расчета значений функции $B_\tau(x)$ по ее ряду Фурье в точке разрыва (угловые кромки полюсов на рис. 2 и 3), могут обусловить погрешности расчета параметров магнитного поля вблизи полюсов, кромки которых являются концентраторами магнитного поля, что ставит особые требования к точности расчета магнитного поля в окрестности кромок полюсов.

То есть, для повышения точности расчета магнитного поля в рассматриваемом случае необходимо, стремится повысить точность граничных условий, что для граничного условия, задаваемого рядом (1), означает максимальное снижение влияния явления Гиббса на результаты расчетов в точках разрыва.

В этой связи, заметим, что аналогичные задачи компенсации или "подавления" (так в [9]) явления Гиббса в теории передачи и обработки сигналов (с целью избежать искажения сигналов), в настоящее время решаются преимущественно на основе применения так называемых оконных функций [7, 10]. Применение их в нашем случае, однако, затруднено в виду множественности таких функций, что обуславливает не простую задачу выбора из всего их множества наиболее приемлемой в нашем случае.

Кроме того, известно предложение использовать для подавления явления Гиббса "сглаживающее свойство уравнения теплопроводности" [9], что, впрочем, также связано с определенными трудностями адаптации указанного предложения в нашем случае.

Поэтому целью данной работы было найти и обосновать иной путь изменения явления Гиббса, который бы не был связан с использованием каких-либо дополнительных функций, кроме той, разложение которой в ряд Фурье рассматривается.

ПОВЕДЕНИЕ ОСЦИЛЛЯЦИЙ РЯДА ФУРЬЕ ДЛЯ ФУНКЦИИ $B_\tau(x)$ ВБЛИЗИ ТОЧЕК РАЗРЫВА

Обозначим значение функции по (1) с частичной суммой соответствующего ряда как

$$S_N(x) = B_0 \frac{\delta}{b} + \sum_{n=1}^N \frac{2B_0}{n\pi} \left(\sin\left(\frac{n\pi}{b}(c+\delta)\right) - \sin\left(\frac{n\pi}{b}c\right) \right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{b}x\right), \quad (3)$$

где N – число слагаемых тригонометрического ряда.

Это обозначение позволяет переписать аналитическое выражение явления Гиббса в виде неравенства (2) как неравенства:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x_1 - \varepsilon) \neq 0; \quad \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x_1 + \varepsilon) \neq B_0; \\ \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x_2 - \varepsilon) \neq B_0; \quad \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x_2 + \varepsilon) \neq 0. \quad (4)$$

Здесь следует отметить, что функция $S_N(x)$ являются непрерывными функциями при любом значении N . Причем для точек $x = x_1$ и $x = x_2$ имеем $S_N(x) = 0,5B_0$, а в окрестности этих точек имеем осцилляцию функции $S_N(x)$. Отметим также, что $S_N(x)$ справа и слева от точек разрыва ($x = x_1$, $x = x_2$) имеют одинаковый характер: убывание амплитуды осцилляции по мере удаления от этих точек. Причем, как показывает непосредственный расчет $S_N(x)$ по (3), указанные осцилляции имеют определенную симметрию – центральная симметрия относительно точек G_1 и G_2 (рис. 6), поворот вокруг которых на 2π графика функции $S_N(x)$ переводит эту функцию в саму себя (вблизи точек разрыва).

Непосредственный расчет показывает также, что указанная симметрия соблюдается тем точнее, чем большее N берется в расчете $S_N(x)$ по (3), как это и показано на рис. 7 для точки симметрии G_1 .

Отметим также, что рассматриваемые осцилляции осуществляются относительно значения (рис. 7): $S_N = 0$ для всех $x < x_1$; $S_N = B_0$ для всех $x > x_1$. Соответственно цели работы задачей является найти способ уменьшения указанных осцилляций.

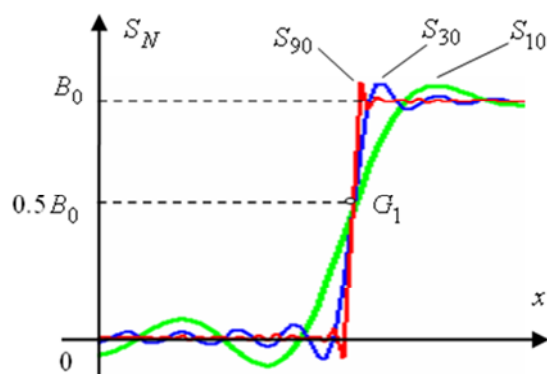


Рис. 7. Осцилляция функции $S_N(x)$ вблизи точки разрыва $x = x_1$

ПОДАВЛЕНИЕ ЯВЛЕНИЯ ГИББСА

Учитывая равноправие точек разрыва, далее рассматриваем только точку разрыва x_1 . Поскольку функции $S_N(x)$ является осциллирующей как до этой точки, так и после нее, то для всех точек вне окрестности точки разрыва значение функции $S_N(x)$ может быть вычислено приближенно как

$$S_N(x) \cong 0,5[S_N(x+\Delta) + S_N(x-\Delta)], \quad (5)$$

где Δ – некоторый шаг расчета, очевидно, меньший, чем расстояние от точки, где определяется функция $S_N(x)$, до ближайшей точки разрыва.

Причем, в силу непрерывности функции $S_N(x)$, уменьшение значения Δ в пределе $\Delta \rightarrow 0$ превращает равенство (5) в точное равенство так, что в этом пределе будем иметь $S_N(x) \rightarrow B_\tau(x)$, если $N \rightarrow \infty$.

Что же касается точек в непосредственной близости к точке разрыва, то для них, исходя из указанной симметрии осцилляций функции $S_N(x)$, можно утверждать, что:

- для всех $x > x_1$, таких, что разность $\Delta = x - x_1$ достаточно мала, выражение

$$S_N(x_1 + \Delta) + S_N(x_1 - \Delta)$$

будет давать в результате значение меньше, чем значение функции $S_N(x_1 + \Delta)$;

- для всех $x < x_1$, таких, что разность $\Delta = x_1 - x$ достаточно мала, выражение

$$S_N(x_1 + \Delta) + S_N(x_1 - \Delta) - B_0$$

будет давать в результате значение меньше (по модулю), чем значение модуля функции $S_N(x_1 - \Delta)$.

Последнее означает уменьшение (подавление) осцилляций функции $S_N(x)$ и связано с тем, что разность $S_N(x_1 + \Delta) - B_0$ является знакопеременной функцией, противоположной по знаку знакопеременной функции $S_N(x_1 - \Delta)$.

Таким образом, учитывая изложенное, для расчета $B_\tau(x)$ по (1) с уменьшенной осцилляцией (подавление явления Гиббса) можно записать выражение

$$B_\tau(x) \approx k_1[S_N(x+\Delta) + S_N(x-\Delta)] - k_2 B_0, \quad (6)$$

где k_1 – коэффициент, принимающий значение 1 вблизи точки разрыва и значение 0,5 вне окрестности точки разрыва; k_2 – коэффициент, равный 0 при $k_1 = 0,5$ и значение 1 при $k_1 = 1$.

Заметим, что коэффициенты k_1 и k_2 можно связать между собой соотношением

$$k_2 = 2(k_1 - 0,5). \quad (7)$$

Что же касается коэффициента k_1 , то его несложно определить по знакам функций $S_N(x_1 - \Delta)$ и $S_N(x_1 + \Delta)$, а именно

$$k_1 = [2 - 0,5 \operatorname{sign}(S_N(x + \Delta)) \operatorname{sign}(S_N(x - \Delta))]^{-1}. \quad (8)$$

В силу того, что характер осцилляций функции $S_N(x)$ в точке разрыва x_2 аналогичен характеру осцилляций этой функции в точке разрыва x_1 , несложно показать, что выражения (6)-(8) применимы и для точки разрыва x_2 .

Как следствие, можно утверждать, что выражения (6)-(8) позволяют подавить явление Гиббса в точках разрыва и осцилляции при расчете $B_\tau(x)$ как ряда Фурье по (3) на всем рассматриваемом диапазоне изменения аргумента (от нуля до b , рис. 3).

Для подтверждения эффективности предлагаемого способа для подавления явления Гиббса и уменьшения осцилляций расчетной функции были проведены численные расчеты по (6)-(8), один из результатов которых показан на рис. 8, показывающий явное уменьшение осцилляции функции $S_N(x) \approx B_\tau(x)$ и достаточную для практики точность.

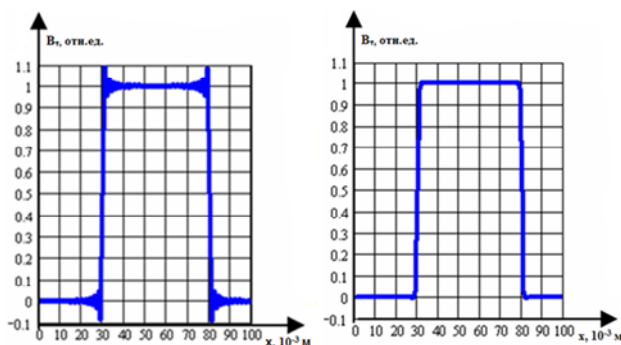


Рис. 8. Уменьшение осцилляций по предлагаемому способу компенсации явления Гиббса для ступенчатой функции $B_\tau(x)$ по рис. 3 при $N = 100$ ($c = 30$ мм, $\delta = 50$ мм, $b = 20$ мм)

ВЫВОДЫ

1. Повышение точности численного расчета магнитного поля путем повышения точности задания граничных условий для граничного условия в виде функции с разрывом 1-го рода связано с компенсацией явления Гиббса.

2. Сумма гармоник ряда Фурье для ступенчатой функции имеет осцилляции в точке разрыва, обладающие определенной симметрией, что позволяет получить простой способ компенсации явления Гиббса, который подтвержден непосредственными расчетами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Долинский Ю.М. К расчету втяжных электромагнитов // Вестник ХПИ. Вопросы контактной аппаратуры автоматики. – Вып. 3. – 1968. – № 28(76). – С. 56-62.

2. Алиевский Б.Л., Шерстюк А.Г. Поле рассеяния в цилиндрическом пазу осесимметричной системы возбуждения // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. – 1980. – № 1. – с. 118-129.
3. Бранспиз Ю.А. Вельченко А.А. Расчет векторного потенциала в обмоточном окне плоскопараллельного электромагнита с несимметричным зазором // Техническая электродинамика. Тематический выпуск "Проблемы современной электроники". – Ч. 1. – 2010. – С. 21-24.
4. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров. – М.: Наука, 1965. – 780 с.
5. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. Т. 3. – М.: Физматлит, 2008. – 728 с.
6. Воробьев Н.Н. Теория рядов. – М.: Наука, 1986. – 408 с.
7. Давыдов А.В. Цифровая обработка сигналов. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://prodav.narod.ru/dsp/index.html>. – Название с экрана.
8. Овчинников А.В., Овчинникова Г.С. Природа эффекта Гиббса и методы его компенсации. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://conference.kemsu.ru/GetDocsFile?id=7113&table=papers_fele&tupe=1&conn=confDB. – Название с экрана.
9. Ткаченко Д.С. Применения ряда Фурье для аппроксимации изображения [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://tkachenko-mephi.narod.ru/pdfs/ia.pdf>. – Название с экрана.
10. Некоторые оконные функции и их параметры. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://dspssystem.narod.ru/add/win/win.html>. – Название с экрана.

Поступила 20.09.2010

Бранспиз Юрий Адольфович, д.т.н, проф.
 Вельченко Анна Александровна, аспирант
 Восточноукраинский национальный университет
 имени Владимира Даля
 кафедра "Прикладная физика"
 91034, Луганск, кв. Молодежный, 20-а
 тел. (0642) 500829, e-mail: branspiz@mail.ru,
anna.velchenko@gmail.com

Yu.A. Branspiz, A.A. Velchenko

Suppression of Gibbs phenomenon for Fourier magnetic field calculation with the boundary condition given by discontinuous functions.

For the boundary condition of magnetic field in the form of step-function distribution of tangential induction on the surface of an electromagnet coil which abuts upon a gap, Gibbs phenomenon is studied. It is suggested to compensate the phenomenon through a simple transformation of the calculation function which does not distort the function beyond discontinuity points. The introduced transformation is recommended as general transformation under Gibbs phenomenon suppression at the function discontinuity points calculated via their Fourier rows.

Key words – electromagnet, Fourier row, Gibbs phenomenon, compensation