УДК 621.3.01

П.Я. Придубков, І.В. Хоменко

ВЗАЄМОДІЯ РУХОМИХ І НЕРУХОМИХ ЗАРЯДІВ В СТАЦІОНАРНОМУ ПОЛІ ПРОВІДНОГО СЕРЕДОВИЩА[1]

Всі речовинні середовища, використовувані в електротехнічних пристроях, мають провідність, не рівну нулю, і володіють, тією чи іншою мірою, діелектричними властивостями. При незмінному в часі розподілі напруженості електричного поля (або потенціалів), завдяки відмінній від нуля провідності речовинних середовищ у них буде протікати постійний електричний струм, при якому розподіл електричних зарядів у просторі залишається в часі незмінним. Відбувається тільки безперервна заміна кожного елемента заряду рівним йому іншим елементом. Таким чином, постійне в часі електричне поле фізично завжди буде стаціонарним електричним полем і його розподіл у просторі визначається рівняннями стаціонарного поля. Відповідно до постулату Максвелла для даного стаціонарного електричного поля залишається справедливою теорема Гауса:

$$\oint_S \boldsymbol{D} d\boldsymbol{S} = q_{\text{св}} .$$

Друге основне рівняння електростатичного поля

$$\oint_l \boldsymbol{E} d\boldsymbol{l} = 0$$

також справедливе й для стаціонарного електричного поля, що, таким чином, є потенційним полем, тому для нього поняття напруга й потенціал залишається таким же, як і для електростатичного поля. Для електричного поля в провідному середовищі (у провідниках і в реальних діелектриках) зберігаються встановлені для електростатичного поля залежності, що виражають напруженість поля й потенціал через розподіл електричних зарядів. Отже, стаціонарне електричне поле розподіляється в просторі так само, як і електростатичне.

Проте, стаціонарне електричне поле істотно відрізняється від електростатичного поля. Насамперед, дане поле має місце в речовинному провідному середовищі (реальні провідники й діелектрики). Щоб установити закон механічного прояву стаціонарного електричного поля скористаємося залежністю між абсолютною діелектричною проникністю речовинного середовища і її провідністю [4]:

$$\gamma = \frac{d\varepsilon_a}{dt} .$$

Основною величиною, що характеризує електростатичне поле в діелектрику й стаціонарне електричне поле в провідному середовищі, є напруженість $\boldsymbol{E}$. Це силова характеристика поля, чисельно рівна силі, що діє на заряд по величині рівний одиниці, та визначена за умови, що внесений у дану точку поля заряд не спотворив поля, що існувало до внесення цього заряду. Для електростатичного поля в діелектрику величина напруженості визначається виразом:

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_a r^2} ,$$

звідки:

$$\varepsilon_a = \frac{q}{4\pi E r^2} = \frac{1}{4\pi E r^2} q . \qquad (5)$$

З іншого боку, для будь-якого речовинного середовища, для реального діелектрика або провідника, її питома провідність і діелектрична проникність зв'язані співвідношенням [4]:

$$\gamma = \frac{d\varepsilon_a}{dt} .$$

Тому що розподіл напруженості стаціонарного електричного поля незмінний в часі, тобто E = const, то:

$$\frac{d\varepsilon_a}{dt} = \frac{1}{4\pi E r^2} \frac{dq}{dt} .$$

або:

$$\gamma = \frac{1}{4\pi E r^2} \frac{dq}{dt} . \qquad (6)$$

З останнього рівняння визначається вираз, що відповідає напруженості електричного поля, створеного постійним струмом у речовинному провідному середовищі:

$$E = \frac{1}{4\pi\gamma r^2} \frac{dq}{dt} . \qquad (7)$$

Якщо врахувати, що напруженість поля визначається як відношення сили, що діє на позитивний настільки малий (нерухомий) пробний заряд (q_1), що він своєю присутністю не викликає помітного перерозподілу зарядів на тілах, що створюють поле, до величини цього заряду [5]:

$$\boldsymbol{E} = \lim_{q_1 \to 0} \frac{\boldsymbol{F}}{q_1} ,$$

то сила, що діє на точковий заряд скінченої величини, внесений у поле, дорівнює:

$$\boldsymbol{F} = q_1 \boldsymbol{E} \ \text{ або } \ \boldsymbol{F} = \frac{q_1}{4\pi\gamma r^2} \frac{dq}{dt} [\boldsymbol{r_0} [\boldsymbol{n_\delta} \boldsymbol{r_0}] . \qquad (8)$$

Таким чином, два точкових заряди нерухомий q_1 і що змінюється в часі dq/dt взаємодіють один з одним із силою прямо пропорційною їхньому добутку, але обернено пропорційної квадрату відстані між ними, і залежної від електричних властивостей (питомої провідності) середовища, що оточує заряди.

Вираження, що описує механічний прояв стаціонарного електричного поля, є тією теоретичною основою, на якій базується й теорія стаціонарного електричного поля, і теорія лінійних електричних кіл постійного струму.

Тому що відповідно до вираження (3) вектор напруженості $\boldsymbol{E}$ стаціонарного електричного поля, створюваного точковим змінним в часі зарядом dq/dt визначається як:

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\gamma r^2} \frac{dq}{dt} \boldsymbol{r_0} ,$$

то потік вектора $\boldsymbol{E}$ через елементарну площадку dS дорівнює:

[1]Закінчення. Початок – у попередньому номері.

$$\boldsymbol{E}d\boldsymbol{S} = \frac{1}{4\pi\gamma r^2}\frac{dq}{dt}\boldsymbol{r_0}d\boldsymbol{S}, \quad (9)$$

де: $\boldsymbol{r_0}$ – орт радіуса-вектора $\boldsymbol{r}$, проведеного з елемента струму dq/dt до площадки dS.

Таким чином:

$$\boldsymbol{E}d\boldsymbol{S} = \frac{dq}{dt}\frac{\cos(\boldsymbol{r_0}, d\boldsymbol{S})}{4\pi\gamma r^2}.$$

Добуток $\cos(\boldsymbol{r_0}, dS)$ чисельно дорівнює проекції площадки dS на поверхню, перпендикулярну до радіуса-вектора $\boldsymbol{r}$.

Перпендикулярна до радіуса-вектора площадка dS' збігається з елементом кульової поверхні радіуса із центром у точці O, де в цей момент перебуває точковий змінний у часі заряд (елемент струму dq/dt). Тілесний кут, під яким площадка dS' видна із точки O як відомо [6] визначається:

$$d\Omega = \frac{dS'}{r^2} = \frac{\cos(\boldsymbol{r_0}, d\boldsymbol{S})}{r^2},$$

і тому:

$$\boldsymbol{E}d\boldsymbol{S} = \frac{dq}{dt}\frac{1}{4\pi\gamma}d\Omega. \quad (10)$$

Таким чином, у поле елементарного заряду dq/dt, що рухається, потік вектора напруженості через довільно орієнтовану dS площадку залежить тільки від тілесного кута, під яким ця площадка видна із займаної елементом dq/dt струму точки O. Остання формула є наслідком того, що напруженість $\boldsymbol{E}$ поля спрямована радіально й при видаленні від елементарного заряду dq/dt убуває також як й тілесний кут, що відповідає даній площадці dS.

Таким чином, потік вектора $\boldsymbol{E}$ через кінцеву поверхню S може бути визначений як:

$$\int_S \boldsymbol{E}d\boldsymbol{S} = \frac{dq}{dt}\frac{1}{4\pi\gamma}\Omega,$$

де Ω – тілесний кут, під яким видна з елемента струму dq/dt вся поверхня S, тобто тілесний кут, утворений радіусами-векторами, проведеними з dq/dt до крайової лінії цієї поверхні. Якщо поверхня S замкнута, то тілесний кут Ω може мати одне із двох значень: 4π і 0.

Точковий змінний у часі заряд dq/dt може бути розташований або усередині замкнутої поверхні, або поза нею. Розгляд елемента струму dq/dt, розташованого на самій поверхні, позбавлено змісту, тому що користуватися уявленням про точковий елемент струму можна лише за умови, що дійсні розміри dq/dt малі в порівнянні з відстанню його до розглянутих точок поля.

Якщо точковий елемент струму dq/dt розташований усередині замкнутої поверхні S, то ця поверхня оточує його з усіх боків і, таким чином, видна з розташування dq/dt під кутом $\Omega = 4\pi$. Отже, у цьому випадку:

$$\oint_S \boldsymbol{E}d\boldsymbol{S} = \frac{1}{\gamma}\frac{dq}{dt},$$

або:

$$\oint_S \gamma\boldsymbol{E}d\boldsymbol{S} = \frac{dq}{dt}. \quad (11)$$

Якщо ж елемент струму dq/dt перебуває в точці O, що лежить поза замкнутою поверхнею S, то із цієї точки O можна провести до поверхні S пучок дотичних. Сукупність цих дотичних утворить конус, що стикається з S уздовж деякої замкнутої лінії, що розділить поверхню S на дві частини. Обидві частини поверхні S видні із точки O під тим самим тілесним кутом, що відповідає розхилу дотичного конуса, причому одна із цих частин буде видна з її внутрішньої сторони, а інша – із зовнішньої. Таким чином, цим обом частинам поверхні S будуть відповідати тілесні кути рівні по величині й протилежні за знаком. Таким чином, і потоки напруженості електричного поля через обидві частини поверхні S будуть рівні по величині, але протилежні за знаком і в сумі дадуть нуль. Отже, потік вектора $\boldsymbol{E}$ через усяку замкнуту поверхню, що не охоплює елемент струму dq/dt, дорівнює нулю:

$$\oint_S \gamma\boldsymbol{E}d\boldsymbol{S} = 0. \quad (12)$$

Ці можливі випадки (елемент струму усередині й поза поверхнею) можуть бути охоплені одною єдиною формулою:

$$\oint_S \gamma\boldsymbol{E}d\boldsymbol{S} = \frac{dq}{dt},$$

якщо тільки розуміти в цій формулі під величиною dq/dt елемент струму, розташованого усередині поверхні S, і, таким чином, вважати dq/dt рівним нулю, якщо елемент струму розташований поза цією поверхнею.

Будь-яка система струмів може бути розкладена на сукупність елементарних струмів, кожний з яких може бути визначений як dq/dt. Будь-який із цих струмів створює окремо напруженість $\boldsymbol{E_i}$, тоді відповідно до принципу суперпозиції напруженість результуючого поля всієї системи елементарних струмів визначається як:

$$\boldsymbol{E} = \Sigma\boldsymbol{E_i}.$$

Таким чином:

$$\oint_S \boldsymbol{E}d\boldsymbol{S} = \Sigma\oint_S \boldsymbol{E_i}d\boldsymbol{S} = \frac{1}{\gamma}\frac{d}{dt}\Sigma q,$$

або:

$$\oint_S \gamma\boldsymbol{E}d\boldsymbol{S} = \frac{d}{dt}\Sigma q, \quad (13)$$

причому, остання сума поширюється тільки на ті елементарні струми, які розташовані усередині поверхні S.

Оскільки

$$\frac{d}{dt}\Sigma q = i = \oint_S \boldsymbol{\delta}d\boldsymbol{S},$$

то:

$$\oint_S \gamma\boldsymbol{E}d\boldsymbol{S} = \oint_S \boldsymbol{\delta}d\boldsymbol{S}. \quad (14)$$

Рівність інтегралів припускає рівність підінтегральних виразів, таким чином:

$$\boldsymbol{\delta} = \gamma\boldsymbol{E}. \quad (15)$$

Останній вираз є закон Ома в диференціальній формі. У ньому напруженість $\boldsymbol{E}$ створюється змінними точковими зарядами, розташованими усередині замкнутої поверхні. У тому випадку якщо в розглянутому елементі провідного середовища діє й стороннє електричне поле напруженість $\boldsymbol{E}_{\text{стор}}$, що забезпечує рух зарядів даному середовищу, то:

$$\boldsymbol{\delta} = \gamma(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}_{\text{стор}}). \quad (16)$$

Отримане рівняння є диференціальною формою узагальненого закону Ома або другого закону Кірхгофа.

З огляду на те, що потік вектора $\boldsymbol{E}$ через усяку замкнуту поверхню, що не охоплює елементи струму dq/dt, дорівнює нулю, тому:

$$\oint_S \gamma \boldsymbol{E} d\boldsymbol{S} = 0 ,$$

або:

$$\oint_S \boldsymbol{\delta} d\boldsymbol{S} = 0 .$$

Якщо праву й ліву частини останнього рівняння розділити на об'єм елемента провідного середовища, по якому протікає постійний струм , причому об'єм, що перебуває усередині замкнутої поверхні, спрямуємо до нуля, то рівність залишиться справедливою:

$$\lim_{V \to 0} \frac{\oint_S \boldsymbol{\delta} d\boldsymbol{S}}{V} = \operatorname{div}\boldsymbol{\delta} = 0 .$$

Таким чином, для стаціонарного електричного поля в провідному середовищі:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\delta} = 0 . \qquad (17)$$

Це вираження називають першим законом Кірхгофа в диференціальній формі. Воно означає, що в будь-якій точці стаціонарного електричного поля немає а ні витоку, а ні стоку ліній струму провідності $\boldsymbol{\delta}$.

З огляду на те, що робота, чинена стаціонарним електричним полем при переміщенні одиничного заряду на одиницю відстані дорівнює його напруженості $\boldsymbol{E}$, енергія, що виділяється в одиниці об'єму провідного середовища в одиницю часу, буде визначатися як:

$$\boldsymbol{\delta E} .$$

Тому що $\boldsymbol{\delta} = \gamma \boldsymbol{E}$, то:

$$\boldsymbol{\delta E} = \gamma E^2 . \qquad (18)$$

Вираження (18) відповідає диференціальній формі закону Джоуля-Ленца.

Щоб одержати інтегральні форми основних законів електротехніки, необхідно взяти об'ємні інтеграли від їхніх диференціальних форм, з огляду на те, що інтеграл по об'єму є подвійним інтегралом (по поверхні й довжині даного об'єму):

$$\int_V dV = \int_S \int_l d\boldsymbol{S} d\boldsymbol{l} .$$

Так, наприклад, інтегральній формі закону Ома відповідає вираз:

$$\int_S \boldsymbol{\delta} d\boldsymbol{S} \int_l d\boldsymbol{l} = \gamma \int_S d\boldsymbol{S} \int_l \boldsymbol{E} d\boldsymbol{l} ,$$

$$\int_S \boldsymbol{\delta} d\boldsymbol{S} \frac{\int_l d\boldsymbol{l}}{\gamma \int_S d\boldsymbol{S}} = \int_l \boldsymbol{E} d\boldsymbol{l} ,$$

$$IR = U . \qquad (19)$$

ВИСНОВКИ

Таким чином, вираз, що описує взаємодії рухомих й нерухомих зарядів стаціонарного електричного поля постійного струму, не тільки описує його механічний прояв, і усвідомлює електромагнітні процеси, що протікають у провідних речовинних середовищах тих або інших електротехнічних пристроїв, але і є теоретичною базою для розробки нових методів розрахунку електротехнічних пристроїв. Наприклад, у статті [7] викладено визначення залежності просторового розподілу вектора напруженості стаціонарного електричного поля в об'ємних металевих частинах електроустаткування від розподілу вектора щільності струму й електричних властивостях провідного середовища за допомогою диференціальної форми закону Ома, що базується на встановленому виразі (4).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Сукачев А.П. Теоретические основы электротехники. Часть І. Физические основы электротехники. – Харьков, 1959. – 460 с.
2. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле. – М.: Высшая школа, 1986. – 263 с.
3. Федоров Н.Н. Основы электродинамики. – М.: Высшая школа, 1965. – 328 с.
4. Придубков П.Я. Хоменко І.В. Дослідження функціонального зв'язку між питомою провідністю речовинного середовища і її діелектричною проникністю. Энергосбережение. Энергетика. Энергоаудит. Общегосударственный научно-производственный и информационный журнал. – 2010. – №8. – С.38-42.
5. Шимони К. Теоретическая электротехника. – М.: Мир, 1964. – 773 с.
6. Тамм И. Е. Основы теории электричества. – М.: Наука, 1976. – 616 с.
7. Придубков П.Я. Хоменко І.В. До питання просторового розподілу напруженості стаціонарного електричного поля в об'ємних металевих частинах електроустаткування. Вісник НТУ "ХПІ". – 2010. – № 29. – С. 126-135.

Надійшла 30.08.2010

Придубков Павло Якович, к.т.н., доц.
Національний технічний університет
"Харківський політехнічний інститут"
кафедра "Електротехніка"
Украина, 61002, Харьков, ул. Фрунзе 21

Хоменко Ігор Васильович, к.т.н., доц.
Національний технічний університет
"Харківський політехнічний інститут"
кафедра "Передача електричної енергії"
Украина, 61002, Харьков, ул. Фрунзе 21

P.Y Pridubkov, I.V. Khomenko

Interaction of mobile and immobile charges in a stationary field of conducting medium.

Interactions of immobile point charges in the electric field of a dielectric medium and elementary currents in the magnetic field of a magnetic medium are considered. Maxwell postulate is analyzed in the stationary field of a conducting medium, analytical expression for the strength created by motive charges of the stationary field is specified. It is determined that the analyzed interaction of mobile and immobile charges in the stationary field is inversely proportional to squared distance between them.

Key words – **mobile and immobile charges, interaction, stationary field, conducting medium, analysis.**