УДК 621.3.01

П.Я. Придубков, І.В. Хоменко

ПРО ВЗАЄМОДІЮ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ЗАРЯДІВ З ЕЛЕКТРИЧНИМ СТАЦІОНАРНИМ ПОЛЕМ

Розглянуті взаємодії як нерухомих електричних зарядів, так і елементарних струмів, описана взаємодія заряджених частинок і стаціонарного електричного поля відповідно до принципу найменшої дії за допомогою функції Лагранжа, встановлена аналітична залежність, що описує взаємодію елементарних зарядів з електричним стаціонарним полем.

Рассмотрены взаимодействия между собой как неподвижных электрических зарядов, так и элементарных токов, описано взаимодействие заряженных частиц и стационарного электрического поля в соответствии с принципом наименьшего действия при помощи функции Лагранжа, установлена аналитическая зависимость, описывающая взаимодействие элементарных зарядов с электрическим стационарным полем.

ВСТУП

Взаємодія (двох) заряджених часток, елементарних зарядів один з одним описується за допомогою силового (електромагнітного) поля. Елементарний заряд створює навколо себе силове поле, яке діє на інший заряд, що перебуває в цьому полі, з деякою силою. Якщо взаємодіючі заряди нерухомі, то силове поле, формоване даними зарядами, є електростатичним, а сила їхньої взаємодії описується законом Кулона ($\nabla \boldsymbol{D} = \rho$) [1]. Електричні заряди, що рухаються, (елементарні струми) створюють силове поле, яке є магнітним полем, силова взаємодія цих зарядів описується законом Ампера ($[(\nabla \boldsymbol{H}] = \partial \boldsymbol{D}/\partial t + \boldsymbol{\delta}$). І закон Кулона, і закон Ампера, також як і перший закон Ньютона є законами зворотних квадратів.

Стаціонарне електричне поле – це незмінне в часі електричне поле, обумовлене постійним струмом, є різновидом (окремим випадком) однієї із двох складових електромагнітного поля. Протікання постійного струму в провідному середовищі супроводжується взаємодією вільних зарядів з полем.

При дослідженні руху електричних зарядів, як і будь-яких матеріальних часток, варто виходити із принципу найменшої дії, з принципу Гамільтону. Цей принцип укладається в тім, що для всякої механічної системи існує такий інтеграл S, що зветься дією, що для дійсного руху має мінімум і варіація δS якого, отже, дорівнює нулю [2].

ОСНОВНА ЧАСТИНА

Дія для зарядженої частки (електричного заряду), що рухається в стаціонарному електричному полі, складається із двох частин (складових): з дії вільного заряду, і зі члена, що описує взаємодії заряду з полем. Остання складова повинна містити як величини, що характеризують заряд, так і величини, що характеризують поле.

Властивість поля (у повному обсязі) характеризуються чотиривектором Aμ, так званим чотиримірним потенціалом, компоненти якого є функціями координат і часу. Дані величини входять у дію у вигляді члена:

$$-q\int_a^b A_\mu dx_\mu ,$$

де функції A_μ беруться в точках світової лінії елементарного заряду.

Таким чином, дія для електричного заряду має вигляд:

$$S = \int_a^b \left(-mcds - qA_\mu dx_\mu\right),$$

де m – маса зарядженої частки q.

Три просторових компоненти чотиривектора A_μ утворять тримірний вектор $\boldsymbol{A}$, що зветься векторним потенціалом поля. Часова компонента A_t є скалярним потенціалом $A_t = \varphi/c$. Таким чином: $A_\mu = (\boldsymbol{A}, A_t)$.

Оскільки сигнатура чотиримірного простору, що розглядається в спеціальній теорії відносності, має вигляд (+ – – –) [3], причому $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$, тому інтеграл дії визначається виразом:

$$S = \int_a^b \left(-mcds + q\boldsymbol{A}d\boldsymbol{r} - q\varphi\, dt\right). \quad (1)$$

Якщо врахувати, що швидкість електрично зарядженої частки може бути описана співвідношенням $\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{r}/dt$, а також беручи до уваги, що через інваріантність інтервалу ds відстані між подіями визначається співвідношенням [2]

$$ds = cdt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} ,$$

тому при переході до інтегрування за часом інтеграл дії S (1) описується виразом:

$$S = \int_{t_1}^{t_2}\left(-mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + q\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} - q\varphi\right)dt .$$

Підінтегральне вираження є функція Лагранжа (лагранжіан) для зарядженої частки в електромагнітному полі

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + q\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} - q\varphi . \quad (2)$$

Похідна лагранжіана по швидкості руху електричного заряду (матеріальної точки) $\partial L/\partial v$ є узагальнений (канонічний) імпульс $\boldsymbol{P}$, сполучений із просторовою координатою x [1]:

$$\boldsymbol{P} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} = \gamma m\boldsymbol{v} + q\boldsymbol{A} = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} + q\boldsymbol{A} = \boldsymbol{p} + q\boldsymbol{A} , \quad (3)$$

де $\boldsymbol{p} = \dfrac{\partial L_в}{\partial t} = \dfrac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$ – звичайний імпульс електричного заряду q (вільної матеріальної точки) , імпульс у відсутності полів [2].

Рівняння руху заряду в стаціонарному (електромагнітному) полі визначаються варіюванням дії, тобто даються рівняннями Лагранжа [1]:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}=\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}}, \tag{4}$$

де L визначається по формулі (2).

Похідній лагранжіана по швидкості руху заряду $\partial L/\partial \boldsymbol{v}$ є узагальнений імпульс заряду (3), таким чином:

$$\frac{\partial L}{\partial r}\equiv\nabla L=-q\operatorname{grad}\varphi+q\operatorname{grad}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}).$$

Відповідно до відомої формули векторного аналізу [4]

$$\operatorname{grad}(\boldsymbol{ab})=(\boldsymbol{b}\nabla)\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{a}\nabla)\boldsymbol{b}+[\boldsymbol{b}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}]+[\boldsymbol{a}\operatorname{rot}\boldsymbol{b}],$$

тут $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ – будь-які два вектори. Якщо використати дану формулу до скалярного добутку векторів $\boldsymbol{Av}$ з обліком того, що диференціювання по $\boldsymbol{r}$ провадиться при постійному векторі $\boldsymbol{v}$, то:

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}}=-q\operatorname{grad}\varphi+q(\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{A}+q[\boldsymbol{v}\operatorname{rot}\boldsymbol{A}].$$

Таким чином, рівняння Лагранжа (4) описується формулою

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{p}+q\boldsymbol{A})=-q\operatorname{grad}\varphi+q(\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{A}+q[\boldsymbol{v}\operatorname{rot}\boldsymbol{A}]. \tag{5}$$

Повний диференціал $\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}dt$ складається із двох частин: зі зміни $\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}dt$ векторного потенціалу з часом у даній точці простору й зі зміни при переході від однієї точки простору до іншої на відстань $d\boldsymbol{r}$. (Друга частина дорівнює $(d\boldsymbol{r}\nabla)\boldsymbol{A}$). У такий спосіб

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}=\frac{\partial A}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{A}. \tag{6}$$

При підстановці виразу (6) у формулу (5) виходить рівняння:

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}=-q\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}-q\operatorname{grad}\varphi+q[\boldsymbol{v}\operatorname{rot}\boldsymbol{A}]. \tag{7}$$

Рівняння (7) є рівнянням руху заряду в електромагнітному полі. Вираження в правій частині (7) є сила, що діє на заряд в електромагнітному полі. Дана сила складається із двох частин, одна з яких не залежить від швидкості заряду, перший і другий члени правої частини рівняння (7). Друга частина (третій член) пропорційний величині швидкості й перпендикулярний до неї.

Сили, що визначають рух заряду в електромагнітному полі, задаються напруженістю електричного поля $\boldsymbol{E}$ й магнітною індукцією $\boldsymbol{B}$. Вектори $\boldsymbol{E}$ й $\boldsymbol{B}$ зв'язані між собою рівняннями Максвелла:

$$[\nabla\boldsymbol{E}]=-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \tag{8}$$

і

$$(\nabla\boldsymbol{B})=0. \tag{9}$$

Оскільки дивергенція ротора дорівнює нулю [4], рівняння (9) дозволяє представити вектор магнітної індукції $\boldsymbol{B}$ як ротор іншого вектора:

$$\boldsymbol{B}=[\nabla\boldsymbol{A}]. \tag{10}$$

Якщо підставити (10) в (8) і змінити порядок диференціювання за часом і по просторових координатах, то друге рівняння Максвелла здобуває наступний вид

$$\left[\nabla\left(\boldsymbol{E}+\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right)\right]=0.$$

Вираження в дужках останньої рівності можна представити у вигляді градієнта деякої функції φ, тому що ротор градієнта тотожно дорівнює нулю [5]. Отже:

$$\boldsymbol{E}=-\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}-\nabla\varphi. \tag{11}$$

У формулах (10) і (11) вектори $\boldsymbol{E}$ й $\boldsymbol{B}$ виражаються через потенціали $\boldsymbol{A}$ й φ, які однозначно визначають поле. Вектор $\boldsymbol{A}$ є векторним потенціалом, а φ – скалярним потенціалом.

Таким чином, рівняння (7) руху заряду можна представити в такий спосіб:

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}=q(\boldsymbol{E}+[\boldsymbol{v}\boldsymbol{B}]). \tag{12}$$

Права частина рівняння (12) являє собою лоренцеву силу. Її перша частина – сила, з якої електричне поле діє на заряд, - не залежить від швидкості заряду й орієнтована по напрямку поля $\boldsymbol{E}$. Друга частина – сила, надавана магнітним полем на заряд, – пропорційна швидкості заряду й спрямована перпендикулярно до цієї швидкості й до напрямку магнітного поля $\boldsymbol{B}$.

Використовуючи одну з основних формул векторного аналізу [4], що описує подвійний векторний добуток, третій член правої частини рівняння (7) можна перетворити в такий спосіб:

$$[\boldsymbol{v}\operatorname{rot}\boldsymbol{A}]_\alpha=[\boldsymbol{v}[\nabla\boldsymbol{A}]]_\alpha=\boldsymbol{v}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x_\alpha}-(\boldsymbol{v}\nabla)A_\alpha=\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\boldsymbol{v}\boldsymbol{A})-(\boldsymbol{v}\nabla)A_\alpha.$$

Індекс α приймає значення 1, 2 і 3 і позначає координати x, y, й z відповідного вектору. З огляду на те, що в рівнянні руху заряду швидкість $\boldsymbol{v}=d\boldsymbol{r}/dt$ залежить тільки від часу, а не від просторових координат тому

$$\boldsymbol{v}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x_\alpha}=\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\boldsymbol{v}\boldsymbol{A}).$$

Навпроти потенціали поля $\boldsymbol{A}$ й φ залежать і від координат і від часу. Таким чином, повна похідна за часом від векторного потенціалу $\boldsymbol{A}$ уздовж траєкторії заряду дорівнює

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}=\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{A}.$$

Останній вираз, ідентичний рівнянню (6), підтверджує його справедливість. Крім того відповідно до відомої формули векторного аналізу [4]:

$$[\boldsymbol{v}[\nabla\boldsymbol{A}]]=\nabla(\boldsymbol{v}\boldsymbol{A})-(\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{A}. \tag{13}$$

Якщо у вираження (7) замість подвійного векторного добутку $[\boldsymbol{v}\operatorname{rot}\boldsymbol{A}]$ підставити праву частину співвідношення (13), то рівняння руху заряду (7) може бути записане в такий спосіб:

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}=-q\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}-q(\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{A}-q\operatorname{grad}\varphi+q\nabla(\boldsymbol{v}\boldsymbol{A}). \tag{14}$$

З урахуванням того, що відповідно до вираження (6) $\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}=\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}-(\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{A}$, рівняння (14) перетвориться в співвідношення [5]: $\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = -q\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} - q\text{grad}q(\varphi - \boldsymbol{vA})$, або

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = -q\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} - q\text{grad}q\varphi', \quad (15)$$

де φ' = φ – $\boldsymbol{vA}$ – скалярний потенціал стаціонарного електричного поля.

Права частина виразу (15) відповідає силі *F*, діючій на заряд *q* в стаціонарному електричному полі. Дана сила залежить як від просторового і часового положення зарядженої частки, так і від швидкості руху заряду:

$$\boldsymbol{F} = -q\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} - q\text{grad}q\varphi' = q\boldsymbol{E}', \quad (16)$$

де $\boldsymbol{E}'$ – напруженість даного поля.

Закон збереження заряду описується рівнянням безперервності заряду й щільності струму [3]:

$$\text{div}\boldsymbol{\delta} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0, \quad (17)$$

другий член (доданок) у якому визначається виразженням [6] $\frac{\partial\rho}{\partial t} = \text{div}\frac{\partial\boldsymbol{D}'}{\partial t}$. Середовище стаціонарного електричного поля однорідне й ізотропне, тому $\boldsymbol{D}' = \varepsilon_a\boldsymbol{E}$, таким чином $\frac{\partial\boldsymbol{D}'}{\partial t} = \frac{\partial(\varepsilon_a\boldsymbol{E}')}{\partial t}$. Тому що напруженість стаціонарного поля є величиною постійної ($\boldsymbol{E}'$ = const), то

$$\frac{\partial(\varepsilon_a\boldsymbol{E}')}{\partial t} = \frac{\partial\varepsilon_a}{\partial t}\boldsymbol{E}',$$

тут $\gamma = \partial\varepsilon_a/\partial t$ – питома провідність середовища поширення даного поля, тому:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \text{div}\gamma\boldsymbol{E}'. \quad (18)$$

Отже:

$$\text{div}\boldsymbol{\delta} = -\text{div}\gamma\boldsymbol{E}'.$$

Рівняння (17) безперервності справедливо для будь-якого як завгодно малого об’єму, тому

$$\int_V \text{div}\boldsymbol{\delta}dV + \frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho dV = 0,$$

або

$$-\int_V \text{div}\gamma\boldsymbol{E}'dV + \frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho dV = 0.$$

Відповідно до теореми Остроградського-Гауса $\int_V \text{div}\gamma\boldsymbol{E}'dV = \oint_S \gamma\boldsymbol{E}'d\boldsymbol{S}$, крім того в об’ємі *V*, що обмежується поверхнею *S* [6], $\int_V \rho dV = q$, таким чином, можна констатувати:

$$\oint_S \gamma\boldsymbol{E}'d\boldsymbol{S} = \frac{\partial q}{\partial t}. \quad (19)$$

Формули (18) і (19) є відповідно диференціальною та інтегральною формами запису аналітичної залежності, що описує взаємодію вільних заряджених частинок і стаціонарного електричного поля при його розповсюдженні в реальному середовищі, яке має вільні заряди.

ВИСНОВКИ

Отже, в стаціонарному електричному полі реального середовища його розповсюдження потік вектора $\gamma\boldsymbol{E}'$ крізь замкнуту поверхню *S*, обмежуючу деякий об'єм *V*, визначається швидкістю зміни вільного заряду, що знаходиться всередині даного об'єму (19). Отож, витік ліній вектора $\gamma\boldsymbol{E}'$ в даній точці стаціонарного електричного поля рівний зміні об'ємної щільності вільних зарядів в цій точці (18).

Таким чином, аналітична залежність, описана формулами (18) і (19), теоретично обґрунтовує основні як диференціальні, так і інтегральні рівняння стаціонарного електричного поля при його розповсюдженні в реальному середовищі, що має вільні заряди. Це забезпечує можливість розробки нових методів розрахунку і проектування електричних полів, електричних пристроїв, що містять кола постійного струму.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Джексон Дж. Классическая электродинамика. – М.: Мир, 1965. – 702 с.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. / М.: Наука, 1988. – 512 с.
3. Угаров В.А. Специальная теория относительности. М.: Наука, 1977. – 384 с.
4. Маделунг Э. Математический аппарат физики. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. – 618 с.
5. Меерович Э.А., Мейерович Б.Э. Методы релятивисткой электродинамики в электротехнике и электрофизике. – М.: Энергоатомиздат, 1987. – 232 с.
6. Тамм И. Е. Основы теории электричества. – М.: Наука, 1976. – 616 с.

Bibliography (transliterated): *1.* Dzhekson Dzh. Klassicheskaya `elektrodinamika. - M.: Mir, 1965. - 702 s. *2.* Landau L.D., Lifshic E.M. Teoriya polya. / M.: Nauka, 1988. - 512 s. *3.* Ugarov V.A. Special'naya teoriya otnositel'nosti. M.: Nauka, 1977. - 384 s. *4.* Madelung `E. Matematicheskij apparat fiziki. - M.: Gosudarstvennoe izdatel'stvo fiziko-matematicheskoj literatury, 1960. - 618 s. *5.* Meerovich `E.A., Mejerovich B.`E. Metody relyativistkoj `elektrodinamiki v `elektrotehnike i `elektrofizike. - M.: `Energoatomizdat, 1987. - 232 s. *6.* Tamm I. E. Osnovy teorii `elektrichestva. - M.: Nauka, 1976. - 616 s.

Надійшла 07.07.2011

Придубков Павло Якович, к.т.н., доц.
доцент кафедри "Електротехніка та електричні машини"
Українська державна академія залізничного транспорту
61050, Харків, пл. Фейербаха, 7
тел. (057) 7301996

Хоменко Ігор Васильович, к.т.н., доц.
доцент кафедри "Передача електричної енергії"
Національний технічний університет
"Харківський політехнічний інститут"
61002, Харків, вул. Фрунзе 21

Pridubkov P.Y., Khomenko I.V.

About interaction of elementary charges with the electric stationary field.

The interaction between a stationary electric charges as well as elementary currents describe the interaction of charged particles and a stationary electric field in accordance with the principle of least action with the Lagrangian, analytical dependences describing the interaction of elementary charges with the electric stationary field.

Key words – **elementary charges, electric stationary field.**