

## ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ГАРМОНИКИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ОДНОРОДНО НАМАГНИЧЕННОГО ЦИЛИНДРА

*Розглянуто застосування апарату циліндричних гармоник до магнітного поля однорідно намагніченого циліндра. Результати отримані при використанні двох моделей намагніченого циліндра: на основі фіктивних магнітних зарядів та на основі просторового розподілу магнітних диполів.*

*Рассмотрено применение аппарата цилиндрических гармоник к магнитному полю однородно намагниченного цилиндра. Результаты получены при использовании двух моделей намагниченного цилиндра: на основе фиктивных магнитных зарядов и на основе пространственного распределения магнитных диполей.*

### ВВЕДЕНИЕ

Современной тенденцией разработки новых и оптимизации существующих технических объектов (ТО) является построение их математических моделей, наиболее полно и точно описывающих их свойства. В этой связи представляет интерес адаптация аналитических моделей к ТО, расчет параметров которых обычно проводят численными методами. Построенные на основе точных аналитических моделей описания ТО, как правило, легко могут быть использованы для синтеза его оптимизированного варианта исполнения сразу по нескольким рабочим характеристикам. Например, для магнитных исполнительных органов (МИО), кроме главного критерия – величины создаваемого магнитного момента (ММ), также важны минимально возможные значения таких параметров: потребляемая мощность, масса, габаритные размеры и др. Немаловажным фактором, повышающим интерес к аналитическим моделям, является существенное упрощение анализа и синтеза моделей при использовании современной компьютерной техники и программных пакетов (Maple), позволяющих не только визуализировать результаты математического расчета, но и упростить ее аналитическое представление.

Как известно [1], к важным факторам, требующим учета при создании модели МИО, следует отнести зависимость ММ от формы и размеров сердечника. Поскольку наиболее технологичной формой для сердечника внутри токовой катушки является круговой цилиндр, то очевидно, что аналитическая модель его ММ примет наиболее простой вид при использовании цилиндрической системы координат, а выражение для магнитного поля (МП) – на основе цилиндрических гармоник.

Целью работы является построение аналитической модели МП равномерно намагниченного вдоль аксиальной оси цилиндра на основе цилиндрических гармоник скалярного потенциала.

### ИСХОДНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Будем рассматривать МП, создаваемое равномерно намагниченным вдоль аксиальной оси цилиндром с высотой  $h$  и радиусом  $R$  (рис. 1). При этом воспользуемся двумя моделями: на основе фиктивных магнитных зарядов и на основе пространственного распределения намагниченности.

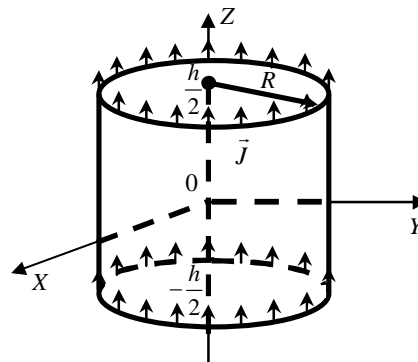


Рис. 1. Однородно намагниченный цилиндр

В первом случае ввиду равномерного распределения магнитных диполей можно считать, что МП создается магнитными зарядами, равномерно распределенными по торцевым поверхностям цилиндра (рис. 2).

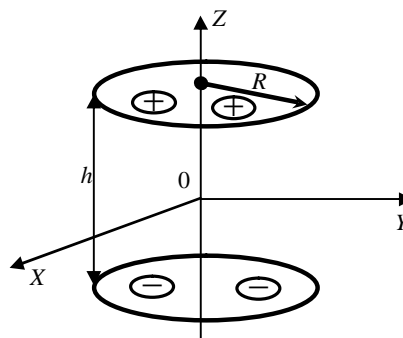


Рис. 2. Фиктивные магнитные заряды на торцевой поверхности цилиндра

Причем, магнитный заряд  $q_m$  на каждой из торцевых поверхностей:

$$q_m = \frac{M}{h}, \quad (1)$$

где  $M$  – суммарный дипольный магнитный момент цилиндра, такой, что  $M = J \cdot V$ .

Тогда для каждого элементарного заряда  $dq_m$  на элементе торцевой поверхности  $dS$  в цилиндрической системе координат справедливо:

$$dq_m = \frac{M}{V} dS = Jr' d\phi dr'. \quad (2)$$

Во втором случае, при использовании модели намагниченности, по ее определению имеем:

$$d\bar{M} = \bar{J}dV = \text{const.} \quad (3)$$

При этом магнитный потенциал цилиндра связан с потенциалом диполей следующим соотношением:

$$U = \int_V dU_\delta, \quad (4)$$

где  $U$  – потенциал, создаваемый намагниченным цилиндром,  $U_\delta$  – потенциал диполя. Здесь мы полагаем распределение диполей непрерывным по всему объему  $V$  цилиндра.

#### МОДЕЛЬ ПОВЕРХНОСТНЫХ ЗАРЯДОВ

Сначала вычислим магнитный потенциал, создаваемый одной торцевой поверхностью в произвольной точке пространства, заданной цилиндрическими координатами  $(r, \varphi, z)$ .

Согласно принципу суперпозиции, общий потенциал равен сумме потенциалов, создаваемых в данной точке каждым элементарным зарядом:

$$U = \int_S dU. \quad (5)$$

Потенциал точечного заряда представляется в виде:

$$dU = \frac{1}{4\pi} \frac{dq_M}{|\vec{\rho} - \vec{\rho}'|}. \quad (6)$$

В свою очередь, для дальнейших вычислений, обратное расстояние в цилиндрической системе координат удобно представить в следующем виде [2]:

$$\frac{1}{|\vec{\rho} - \vec{\rho}'|} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2 - \delta_n^0) \cos n(\varphi - \varphi') \times \left( \int_0^{\infty} K_n(\lambda r) I_n(\lambda r') \cos \lambda(z - z') d\lambda \right), \quad (7)$$

где  $I_n$  и  $K_n$  – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода  $n$ -го порядка.

Используя выражение (7), для потенциала положительно заряженного торца цилиндра будем иметь:

$$U_+ = \frac{J}{2\pi^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2 - \delta_n^0) \cos n(\varphi - \varphi') \times \left( \int_0^{\infty} K_n(\lambda r) I_n(\lambda r') \cos \lambda \left( z - \frac{h}{2} \right) d\lambda \right) r' d\varphi dr'. \quad (8)$$

Вычислив данный двойной интеграл, получим следующее представление для потенциала положительно заряженного торца цилиндра при  $r \leq R$ :

$$U_+ = \frac{J}{\pi} \int_0^{\infty} \left( \frac{1}{\lambda^2} - \frac{R}{\lambda} K_1(\lambda R) I_0(\lambda r) \right) \cos \lambda \left( z - \frac{h}{2} \right) d\lambda, \quad (9)$$

а для  $r > R$ :

$$U_+ = \frac{JR}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda} I_1(\lambda R) K_0(\lambda r) \cos \lambda \left( z - \frac{h}{2} \right) d\lambda d\lambda. \quad (10)$$

Соответственно, потенциал отрицательно заряженного торца имеет противоположный знак. Тогда суммарный потенциал системы двух противоположно заряженных торцов будет равен:

$$\begin{cases} U_1 = \frac{2J}{\pi} \int_0^{\infty} \left( \frac{1}{\lambda^2} - \frac{R}{\lambda} K_1(\lambda R) I_0(\lambda r) \right) \sin \lambda \frac{h}{2} \sin \lambda z d\lambda, \\ r \leq R, \\ U_2 = \frac{2JR}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda} I_1(\lambda R) K_0(\lambda r) \sin \lambda \frac{h}{2} \sin \lambda z d\lambda, \\ r > R. \end{cases} \quad (11)$$

Учитывая, что

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda^2} \sin \lambda \frac{h}{2} \sin \lambda z d\lambda = \frac{\pi}{2} \begin{cases} -\frac{h}{2}, z < -\frac{h}{2}, \\ z, |z| \leq \frac{h}{2}, \\ \frac{h}{2}, z > \frac{h}{2}; \end{cases} \quad (12)$$

выражение (11) можно представить в виде:

- внутри цилиндра: ( $|z| \leq h/2, r \leq R$ ):

$$U_1 = J \left[ z - \frac{2R}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda} K_1(\lambda R) I_0(\lambda r) \sin \lambda \frac{h}{2} \sin \lambda z d\lambda \right]; \quad (13)$$

- вне цилиндра: ( $|z| \geq h/2, r \leq R$ ):

$$U_1 = J \left[ \pm \frac{h}{2} - \frac{2R}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda} K_1(\lambda R) I_0(\lambda r) \sin \lambda \frac{h}{2} \sin \lambda z d\lambda \right]; \quad (14)$$

-  $r > R$ :

$$U_2 = \frac{2JR}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda} I_1(\lambda R) K_0(\lambda r) \sin \lambda \frac{h}{2} \sin \lambda z d\lambda. \quad (15)$$

Компоненты поля выражаются через скалярный потенциал следующим образом:

$$H_r = -\frac{\partial U}{\partial r}, H_z = -\frac{\partial U}{\partial z}. \quad (16)$$

Получим следующие представления для напряженности магнитного поля, создаваемой однородно намагниченным цилиндром:

- поле внутри цилиндра ( $|z| \leq h/2, r \leq R$ ):

$$H_{1r} = \frac{2JR}{\pi} \int_0^{\infty} K_1(\lambda R) I_1(\lambda r) \sin \lambda \frac{h}{2} \sin \lambda z d\lambda, \quad (17)$$

$$H_{1z} = -J + \frac{2JR}{\pi} \int_0^{\infty} K_1(\lambda R) I_0(\lambda r) \sin \lambda \frac{h}{2} \cos \lambda z d\lambda,$$

- поле вне цилиндра ( $|z| \geq h/2, r \leq R$ ):

$$H_{1r} = \frac{2JR}{\pi} \int_0^{\infty} K_1(\lambda R) I_1(\lambda r) \sin \lambda \frac{h}{2} \sin \lambda z d\lambda, \quad (18)$$

$$H_{1z} = \frac{2JR}{\pi} \int_0^{\infty} K_1(\lambda R) I_0(\lambda r) \sin \lambda \frac{h}{2} \cos \lambda z d\lambda.$$

-  $r > R$ :

$$H_{2r} = \frac{2JR}{\pi} \int_0^{\infty} I_1(\lambda R) K_1(\lambda r) \sin \lambda \frac{h}{2} \sin \lambda z d\lambda, \quad (19)$$

$$H_{2z} = -\frac{2JR}{\pi} \int_0^{\infty} I_1(\lambda R) K_0(\lambda r) \sin \lambda \frac{h}{2} \cos \lambda z d\lambda.$$

Легко видеть, что (18, 19) эквивалентны выражениям для внешнего магнитного поля однослойного

бесконечно тонкого соленоида, полученными в [3] (рис. 3, 4). Отличие для внутреннего решения заключается в дополнительном слагаемом, определяемым намагниченностью  $J$  цилиндра.

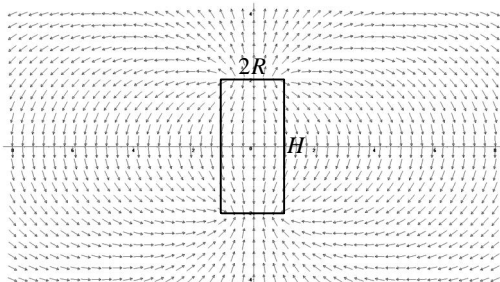


Рис.3. Распределение поля однородно намагниченного цилиндра, полученное в программе Maple

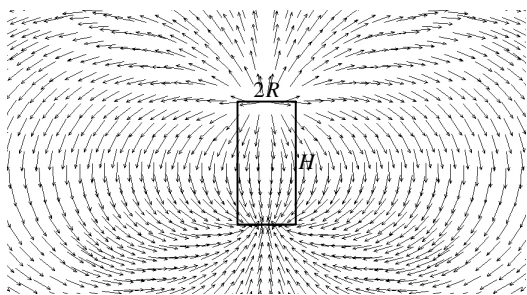


Рис.4. Распределение поля однородно намагниченного цилиндра, полученное в программе Ansys

#### МОДЕЛЬ РАВНОМЕРНОЙ НАМАГНИЧЕННОСТИ

Представим поле однородно намагниченного цилиндра как суперпозицию полей магнитных диполей, равномерно распределенных по всему объему цилиндра.

Известно [2], что потенциал элементарного объема  $dV$  представляется через ММ, его координаты и координаты точки наблюдения следующим образом:

$$U_{\partial} = \frac{d\vec{M}}{4\pi} \text{grad} \left( \frac{1}{|\vec{\rho} - \vec{\rho}'|} \right). \quad (20)$$

Тогда, исходя из выражения (7) и учитывая, что каждый элементарный объем имеет единственную составляющую ММ по  $z$ , получим следующее выражение для потенциала:

$$U_{\partial} = \frac{dM_z}{2\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} (2 - \delta_n^0) \cos n(\varphi - \varphi') \times \left( \int_0^{\infty} \lambda K_n(\lambda r) I_n(\lambda r') \sin \lambda(z - z') d\lambda \right). \quad (21)$$

В соответствии с уравнением (4) магнитный потенциал однородно намагниченного цилиндра представится в виде:

$$U = \frac{J}{2\pi^2} \int_0^R \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2 - \delta_n^0) \cos n(\varphi - \varphi') \times \left( \int_0^{\infty} \lambda K_n(\lambda r) I_n(\lambda r') \sin \lambda(z - z') d\lambda \right) r' d\varphi' dz' dr'. \quad (22)$$

В результате интегрирования получим выражение (9):

$$\begin{cases} U_1 = \frac{2J}{\pi} \int_0^{\infty} \left( \frac{1}{\lambda^2} - \frac{R}{\lambda} K_1(\lambda R) I_0(\lambda r) \right) \sin \lambda \frac{h}{2} \sin \lambda z d\lambda, \\ r \leq R, \\ U_2 = \frac{2JR}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda} I_1(\lambda R) K_0(\lambda r) \sin \lambda \frac{h}{2} \sin \lambda z d\lambda, r > R. \end{cases} \quad (23)$$

#### ВЫВОДЫ

В результате анализа внешнего и внутреннего магнитного поля однородно намагниченного цилиндра, представленного с помощью цилиндрических гармоник, подтверждена его эквивалентность с внешним магнитным полем бесконечно тонкого соленоида тех же размеров.

Полученные выражения для размагничивающего МП внутри намагниченного цилиндра отличаются от соотношений для поля внутри соленоида на величину намагниченности, тем самым показана эквивалентность распределений магнитной индукции внутри однородно намагниченного цилиндра и соответствующего соленоида.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коваленко А.П. Магнитные системы управления космическими летательными аппаратами. – М.: Машиностроение, 1975. – 248 с.
2. Smythe W. Static and Dynamic Electricity. – ISBN: 0891169172, Publisher: Hemisphere Publishing Corporation, 1989. – 623 p.
3. Гетьман А.В., Константинов А.В. Аналитическое представление магнитного поля соленоида с помощью цилиндрических гармоник. // Электротехніка і електромеханіка. – 2010. – № 5. – С. 43-45.

**Bibliography (transliterated):** 1. Kovalenko A.P. Magnitnye sistemy upravleniya kosmicheskimi letatel'nymi apparatami. - M.: Mashinostroenie, 1975. - 248 s. 2. Smythe W. Static and Dynamic Electricity. - ISBN: 0891169172, Publisher: Hemisphere Publishing Corporation, 1989. - 623 p. 3. Get'man A.V., Konstantinov A.V. Analiticheskoe predstavlenie magnitnogo polya solenoيدا s pomoshch'yu cilindricheskikh garmonik. // Elektrotehnika i elektromehanika. - 2010. - № 5. - S. 43-45.

Поступила 24.06.2011

Гетьман Андрей Владимирович, к.т.н., с.н.с.,  
Константинов Александр Викторович  
Научно-технический центр магнетизма технических объектов  
Национальной академии наук Украины  
61062, Харьков, ул. Индустриальная, 19  
тел. (057) 99-11-75  
e-mail: ntcmt@ukrpost.ua

Getman A.V., Konstantinov A.V.

#### Cylindrical harmonics of magnetic field of a uniformly magnetized cylinder.

Application of cylindrical harmonics apparatus to magnetic field of a uniformly magnetized cylinder is considered. Results are obtained under utilization of two magnetized cylinder models: one based on fictitious magnetic charges and the other based on spatial distribution of magnetic dipoles.

**Key words** – magnetic field, cylindrical harmonics, modified Bessel functions.