УДК 621.3.01

П.Я. Придубков, І.В. Хоменко

ЧОТИРИМІРНИЙ ПРОСТІР І ВЕКТОР СТРУМУ ЗСУВУ

Розглянуто використання векторного і скалярного потенціалів при розрахунку основних векторів електромагнітного поля, показано формування компонент чотиритензора даного поля похідними чотиримірного потенціалу, встановлено співвідношення, що виражає струм зсуву через потенціали.

Рассмотрено использование векторного и скалярного потенциалов при расчёте основных векторов электромагнитного поля, показано формирование компонент четырёхтензора данного поля производными четырёхмерного потенциала, установлено соотношение, выражающее ток смещения через потенциалы.

ВСТУП

Повне й точне дослідження процесів, що відбуваються в електромагнітних полях, які змінюються в часі, може бути виконане й описано за допомогою системи рівнянь Максвелла:

$$[\nabla\,\mathbf{H}] = \partial\mathbf{D}/\partial t + \boldsymbol{\delta}\,,\ [\nabla\,\mathbf{E}] = -\partial\mathbf{B}/\partial t\,,\ \nabla\boldsymbol{D} = \rho,\ \nabla\boldsymbol{B} = 0. \quad \text{(I)}$$

Дана система являє собою формулювання основних постулатів або аксіом електродинаміки. Її утворюють взаємозалежні рівняння першого порядку в частинних похідних, що визначають зміну складових електричних і магнітних полів. Для простих конфігурацій рівняння Максвелла можуть бути вирішені безпосередньо. Однак уведення допоміжних величин – скалярного φ й векторного $\boldsymbol{A}$ потенціалів дозволяє звести систему до меншого числа рівнянь другого порядку, що істотно полегшує її рішення [1]. При цьому деякі з рівнянь Максвелла задовольняються автоматично.

Оскільки дивергенція ротора дорівнює нулю, то відповідно до рівняння Максвелла, що виражає принцип безперервності магнітного потоку ($\nabla\boldsymbol{B} = 0$), вектор $\boldsymbol{B}$ можна виразити через векторний потенціал $\boldsymbol{A}$:

$$\mathbf{B} = [\nabla\,\mathbf{A}]. \quad (1)$$

Підстановка останнього виражения в друге рівняння Максвелла ($[\nabla\boldsymbol{E}] = -\partial\boldsymbol{B}/\partial t$) зі зміною порядку диференціювання за часом і по просторових координатах дозволяє одержати співвідношення [2]:

$$\mathrm{rot}(\mathbf{E} + \partial\mathbf{A}/\partial t) = 0\,.$$

Величину в круглих дужках можна представити у вигляді градієнта деякої функції скалярного потенціалу φ, тому що ротор градієнта тотожно дорівнює нулю:

$$\mathbf{E} + \partial\mathbf{A}/\partial t = \nabla\varphi\,.$$

Отже

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \partial\mathbf{A}/\partial t\,. \quad (2)$$

Формулами (1) і (2) вектори електромагнітного поля $\boldsymbol{E}$ й $\boldsymbol{B}$ виражаються через чотири скалярні функції: A_x, A_y, A_z і φ.

ОСНОВНА ЧАСТИНА

Завдання векторного й скалярного потенціалів однозначно визначає електромагнітне поле. Поля $\boldsymbol{B}$ й $\boldsymbol{E}$, знайдені через потенціали $\boldsymbol{A}$ й φ співвідношеннями (1) і (2), тотожно задовольняють рівнянням Максвелла $\nabla\boldsymbol{B} = 0$ й $[\nabla\boldsymbol{E}] = -\partial\boldsymbol{B}/\partial t$ відповідно.

Рівняння Максвелла $\nabla\boldsymbol{D} = \rho$ або $\nabla\boldsymbol{E} = \rho/\varepsilon_a$ (рівняння теореми Гауса в диференціальній формі) також може бути записане через потенціали [1], використовуючи вираз (2):

$$\nabla(-\nabla\varphi - \partial\mathbf{A}/\partial t) = \rho/\varepsilon_a$$

або

$$\nabla^2\varphi + \frac{\partial}{\partial t}\nabla\mathbf{A} = -\frac{\rho}{\varepsilon_a}\,. \quad (3)$$

Щоб скласти перше рівняння Максвелла $[\nabla\boldsymbol{H}] = -\partial\boldsymbol{D}/\partial t + \boldsymbol{\delta}$ щодо векторного потенціалу необхідно помножити його ліву і праву частину на магнітну проникність середовища μ_a:

$$[\nabla\mathbf{B}] = \mu_a\,\partial\mathbf{D}/\partial t + \mu_a\boldsymbol{\delta}\,.$$

Для однорідних і ізотропних середовищ $\boldsymbol{D} = \varepsilon_a\boldsymbol{E}$, тому:

$$[\nabla\mathbf{B}] = \mu_a\varepsilon_a\,\partial\mathbf{E}/\partial t + \mu_a\boldsymbol{\delta}\,.$$

Приймаючи до уваги рівняння (1), відповідно до якого $\boldsymbol{B} = [\nabla\boldsymbol{A}]$, отже

$$[\nabla[\nabla\mathbf{A}]] = \mu_a\varepsilon_a\,\partial\mathbf{E}/\partial t + \mu_a\boldsymbol{\delta}\,.$$

Відповідно до однієї з основних формул векторного аналізу $[\nabla[\nabla\boldsymbol{A}]] = \nabla(\nabla\boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A}$, таким чином:

$$\nabla(\nabla\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A} = \mu_a\varepsilon_a\,\partial\mathbf{E}/\partial t + \mu_a\boldsymbol{\delta}\,.$$

Похідна $\partial\boldsymbol{E}/\partial t$, що бере участь в останнім рівнянні, також може бути виражена через потенціали відповідно до формули (2):

$$\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = -\nabla\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}\,,$$

тому:

$$\nabla(\nabla\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A} = -\mu_a\varepsilon_a\,\partial^2\mathbf{A}/\partial t^2 - \nabla\mu_a\varepsilon_a\,\partial\varphi/\partial t + \mu_a\boldsymbol{\delta}\,.$$

Отримане співвідношення може бути переписане в такий спосіб:

$$\nabla(\nabla\,\mathbf{A} + \mu_a\varepsilon_a\,\partial\varphi/\partial t) - \nabla^2\mathbf{A} + \mu_a\varepsilon_a\,\partial^2\mathbf{A}/\partial t^2 = \mu_a\boldsymbol{\delta}\,. \quad (4)$$

Таким чином, система (I) чотирьох рівнянь Максвелла зведена до двох взаємозалежних рівнянь (3) і (4). Для одержання окремих рівнянь для потенціалів φ і $\boldsymbol{A}$ необхідно скористатися свободою в їхньому визначенні. Тому що магнітна індукція $\boldsymbol{B}$ пов'язана з векторним потенціалом $\boldsymbol{A}$ співвідношенням (1), то потенціал $\boldsymbol{A}$ визначений лише з точністю до адитивної векторної функції, що є градієнтом довільної функції Λ. Магнітне поле $\boldsymbol{B}$ не змінюється при перетворенні, якщо:

$$\mathbf{A} \to \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \mathrm{grad}\Lambda\,. \quad (5)$$

Щоб при цьому залишалося незмінним також і електричне поле $\boldsymbol{E}$ (2), варто одночасно перетворити й скалярний потенціал:

$$\varphi \to \varphi' = \varphi - \partial\Lambda/\partial t\,. \quad (6)$$

Вираження (5) і (6) дозволяють, зокрема, вибрати таку систему потенціалів, у якій виконується рівність:

$$\nabla\mathbf{A} + \mu_a\varepsilon_a\,\partial\varphi/\partial t = 0\,, \quad (7)$$

тобто дозволяють накласти на потенціали додаткову умову Лоренца (слід зазначити, що цій умові можна задовольнити завжди). При цьому рівняння (3) і (4) зводяться до двох окремих не однорідних хвильових рівнянь для $\boldsymbol{A}$ й φ:

$$\nabla^2\varphi - \mu_a\varepsilon_a\,\partial^2\varphi/\partial t^2 = -\rho \quad (8)$$

і

$$\nabla^2\mathbf{A} - \mu_a\varepsilon_a\,\partial^2\mathbf{A}/\partial t^2 = -\mu_a\boldsymbol{\delta}\,. \quad (9)$$

Таким чином:

$$\boldsymbol{\delta} = \varepsilon_a\,\partial^2\mathbf{A}/\partial t^2 - (1/\mu_a)\nabla^2\mathbf{A}\,. \quad (10)$$

Рівняння (8) і (9) у сукупності з (7) утворять систему рівнянь, повністю еквівалентну рівнянням Максвелла.

Електромагнітні потенціали теорії Лоренца: скалярний φ і векторний $\boldsymbol{A}$ мають просте чотиримірне тлумачення. Як уперше було відзначено Минковским [3], вони можуть бути з'єднані в один вектор чотиримірного світу – чотиримірний потенціал:

$$\mathbf{A}_\mu = \left(\mathbf{A}, \mathbf{A}_t\right), \qquad (11)$$

тут: $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}_x, \boldsymbol{A}_y, \boldsymbol{A}_z)$ – тримірний векторний потенціал, $\boldsymbol{A}_t = (j/c)\varphi$ – часовий компонент чотиривектора.

Умову Лоренца (7) можна записати через чотиримірну дивергенцію чотиривектора $\boldsymbol{A}_\mu$ [4]. Тому що:

$$\nabla_\mu A_\mu = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} + \frac{\partial\left(j\varphi/c\right)}{\partial\left(jct\right)} = \nabla\mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

виходить, що умова Лоренца в чотиримірному запису має вигляд:

$$\nabla_\mu A_\mu = 0 .$$

Дана умова в теорії Лоренца використовується для однозначного визначення складових чотиримірного вектора $\boldsymbol{A}_\mu$.

В електродинаміці магнітну індукцію $\boldsymbol{B}$, як і напруженість електричного поля $\boldsymbol{E}$ зручно виражати через векторний і скалярний потенціали $\boldsymbol{A}$ й φ за формулами (1) і (2).

При використанні компонентів чотиривектора $\boldsymbol{A}_\mu$ комплексного чотиримірного простору вектори електромагнітного поля описуються наступними співвідношеннями:

$$B_x \equiv B_1 = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}, \qquad (12)$$

$$E_x \equiv E_1 = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} = -\frac{c}{j}\frac{\partial A_4}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_4} jc = \frac{c}{j}\left(\frac{\partial A_1}{\partial x_4} - \frac{\partial A_4}{\partial x_1}\right). \qquad (13)$$

Останні члени в (12) і (13) записані на підставі визначення складових чотиримірного потенціалу. Аналогічно, використовуючи компоненти чотиривектора $\boldsymbol{A}_\mu$., можна описати й інші складові векторів $\boldsymbol{E}$ і $\boldsymbol{B}$ електромагнітного поля. Ці комбінації утворять антисиметричний чотиритензор другого рангу:

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \quad \left(\mu, \nu = 1, 2, 3, 4\right), \qquad (14)$$

У такого тензора діагональні компоненти, тобто компоненти, що мають два однакових індекси, дорівнюють нулю.

Компоненти $\boldsymbol{F}_{4\nu}$ цього чотиритензора дорівнюють величинам $(j/c)\boldsymbol{E}_\nu$ відповідно, у той час як компоненти $\boldsymbol{F}_{\mu 4}$ дорівнюють величинам $-(j/c)\boldsymbol{E}_\mu$.

Таким чином, усі компоненти вектора напруженості електричного поля можна виразити через комбінації похідних від компонентів чотиривектора $\boldsymbol{A}_\mu$ по чотиримірних координатах відповідно до рівняння (2):

$$E_\mu = \frac{c}{j}\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_4} - \frac{\partial A_4}{\partial x_\mu}\right) = -\frac{\partial A_\mu}{\partial t} - \nabla_\mu\varphi . \qquad (15)$$

Часовий компонент даного вектора визначається виразом:

$$E_t = -\partial\varphi/\partial x_4 - \partial A_4/\partial t \equiv E_4 = -\nabla_t\varphi - \partial A_t/\partial t \qquad (16)$$

і має дві складові рівні по величині, але протилежні за знаком. Одна з них описується часовим компонентом чотиримірного градієнта скалярної функції $\nabla_t\varphi$, інша – похідної від часової складової чотиримірного потенціалу $\partial\boldsymbol{A}_t/\partial t$.

Для однорідних і ізотропних середовищ вектор електричного зсуву $\boldsymbol{D}$ й вектор напруженості $\boldsymbol{E}$ електричного поля зв'язані співвідношенням $\boldsymbol{D} = \varepsilon_a\boldsymbol{E}$. Отже, складові вектора електричної індукції також можуть бути виражені через компоненти чотиривектора $\boldsymbol{A}_\mu$:

$$D_\mu = \varepsilon_a E_\mu = \varepsilon_a \frac{c}{j}\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_4} - \frac{\partial A_4}{\partial x_\mu}\right) = \varepsilon_a\left(-\frac{\partial A_\mu}{\partial t} - \nabla_\mu\varphi\right). \qquad (17)$$

Таким чином, складові току зсуву визначаються компонентами чотиримірного потенціалу $\boldsymbol{A}_\mu$:

$$\delta_{\mu\,\text{см}} = \frac{\partial D_\mu}{\partial t} = \varepsilon_a\frac{\partial E_\mu}{\partial t} = \varepsilon_a\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial A_\mu}{\partial t} - \nabla_\mu\varphi\right). \qquad (18)$$

ВИСНОВКИ

Отриманий вираз (18) свідчить про те, що вектор щільності зсуву може бути описаний чотиримірним потенціалом, Таким чином, струм зсуву варто розглядати в чотиримірному просторі, з огляду на всі його компоненти. Таке подання вектора струму зсуву спрощує розрахунок основних векторів електродинаміки й дозволяє врахувати при цьому активну складову струму зсуву, тобто активні втрати в діелектрику.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРИ

1. Джексон Дж. Классическая электродинамика. – М.: Мир, 1965. – 702 с.
2. Меерович Э.А., Мейерович Б.Э. Методы релятивисткой электродинамики в электротехнике и электрофизике. – М.: Энергоатомиздат, 1987. – 232 с.
3. Паули В. Теория относительности. – М.: Наука. Гл. ред. Физ.-мат. лит., 1991. – 328 с.
4. Угаров В.А. Специальная теория относительности. – М.: Наука. Гл. ред. Физ.-мат. лит., 1977. – 384 с.

Bibliography (transliterated): *1.* Dzhekson Dzh. Klassicheskaya `elektrodinamika. - M.: Mir, 1965. - 702 s. *2.* Meerovich `E.A., Mejerovich B.`E. Metody relyativistkoj `elektrodinamiki v `elektrotehnike i `elektrofizike. - M.: `Energoatomizdat, 1987. - 232 s. *3.* Pauli V. Teoriya otnositel'nosti. - M.: Nauka. Gl. red. Fiz.-mat. lit., 1991. - 328 s. *4.* Ugarov V.A. Special'naya teoriya otnositel'nosti. - M.: Nauka. Gl. red. Fiz.-mat. lit., 1977. - 384 s.

Поступила 03.10.2011

Придубков Павло Якович, к.т.н., доц.
доцент кафедри "Електротехніка та електричні машини"
Українська державна академія залізничного транспорту
61050, Харків, пл. Фейербаха, 7
тел. (057) 7301996

Хоменко Ігор Васильович, к.т.н., доц.
доцент кафедри "Передача електричної енергії"
Національний технічний університет
"Харківський політехнічний інститут"
61002, Харків, вул. Фрунзе 21

Pridubkov P.Y., Khomenko I.V.

Four-dimentional space and a bias current vector.

Application of vector and scalar potentials for computation of the principal electromagnetic field vectors is considered. Formation of the given field 4-D tensor components with 4-D potential derivatives is shown, expression for bias current in terms of the potentials is derived.

Key words – **electromagnetic field, vector and scalar potentials, bias current.**