

## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ НАСИЧЕНОГО ТРИФАЗНОГО АСИНХРОННОГО МОТОРА В ОДНОФАЗНОМУ СТАНІ

*Пропонується математична модель насиченого трифазного асинхронного мотора в однофазному стані. Диференціальні рівняння електромеханічного стану записано в нормальній формі Коші. Наводяться результати розрахунку на ЕОМ перехідних процесів.*

*Предлагается математическая модель насыщенного трехфазного асинхронного двигателя в однофазном режиме. Дифференциальные уравнения электромеханического состояния записаны в нормальной форме Коши. Приводятся результаты расчета на ЭВМ переходных процессов.*

### ВСТУП

Однофазний стан насиченого трифазного асинхронного мотора – достатньо частий випадок в практиці експлуатації електричних машин. Він може бути наперед передбачуваний за відсутності трифазного джерела живлення, а може бути як аварійний у робочому стані за трифазного живлення. Математична модель такого стану роботи призначена для аналізу роботи мотора автономно, так і як елемента складної системи. Вона узагальнює роботу [1] на випадок складнішого фізичного процесу, яким є явище насичення головного магнетного кола.

### МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ

Тут, як і в [1] математичну модель насиченого трифазного асинхронного мотора в однофазному стані одержимо, виходячи з відомої добре апробованої на практиці моделі трифазного стану мотора. Найзручнішою тут є  $L$ -модель у косогональних координатах [1, 2]. За таких умов диференціальні рівняння згадуваної математичної моделі в розгорнутому вигляді приймають вигляд (обмотка ротора за числом витків вважається приведеною до числа витків обмотки статора) [2]

$$\begin{matrix} \begin{matrix} l_s + l_A & l_{AB} & l_A & l_{AB} \\ l_{BA} & l_s + l_B & l_{BA} & l_B \\ l_A & l_{AB} & l_R + l_A & l_{AB} \\ l_{BA} & l_B & l_{BA} & l_R + l_B \end{matrix} & \frac{d}{dt} & \begin{matrix} i_{SA} \\ i_{SB} \\ i_{RA} \\ i_{RB} \end{matrix} = \\ \begin{matrix} u_{SA} - ((2r_{SA} + r_{SC})i_{SA} + (r_{SC} - r_{SB})i_{SB})/3 \\ u_{SB} - ((r_{SC} - r_{SA})i_{SA} + (2r_{SB} - r_{SC})i_{SB})/3 \\ -\omega(\Psi_{RA} + 2\Psi_{RB})/\sqrt{3} - r_R i_{RA} \\ \omega(2\Psi_{RA} + \Psi_{RB})/\sqrt{3} - r_R i_{RB} \end{matrix} \end{matrix} \quad (1)$$

де  $i_{SA}, i_{SB}$  – фазні струми обмотки статора за умови, що  $i_{SC} = -i_{SA} - i_{SB}$ ;  $u_{SA}, u_{SB}$  – фазні напруги обмотки статора;  $i_{RA}, i_{RB}$  – перетворені струми обмотки ротора;  $\Psi_{RA}, \Psi_{RB}$  – перетворені повні потокозчеплення обмотки ротора;  $\omega$  – кутова швидкість ротора в ел.рад./с;  $l_A, l_B, l_{AB}, l_{BA}$  – диференціальні індуктивності, вони є функціями магнетного стану мотора;  $l_s, l_r$  – індуктивності дисипації обмоток статора й ротора;  $r_s, r_r$  – резистивні опори обмотки статора й ротора, тут

$$u_{SA} = U_m \sin \omega_0 t; \quad u_{SB} = U_m \sin(\omega_0 t - 2\pi/3), \quad (2)$$

де  $U_m$  – амплітуда мережі живлення;  $\omega_0$  – її кутова частота.

Повні потокозчеплення обмотки ротора шукаємо у звичайний спосіб

$$\Psi_{Rk} (k = A, B) = (i_{Sk} + i_{Rk})/\tau + i_{Rk}/\alpha_R; \quad (3)$$

де  $\tau$  – обернена основна статична індуктивність мотора;  $\alpha_s = 1/l_s$ ;  $\alpha_r = 1/l_r$  – обернені індуктивності дисипації обмотки статора й ротора.

Алгоритм обчислення диференціальних індуктивностей ми тут не подаватимемо, бо модель (1) нами не буде на завершальному етапі використовуватись. При потребі його можна знайти в [2].

Якщо тепер від першого рядка рівняння (1) відняти другий і накласти умову обриву фази С:  $i_{SB} = -i_{SA} = -i_s$ , то одержимо рівняння електромагнетного стану мотора [1] у вигляді

$$\begin{matrix} \begin{matrix} l_A + l_B - l_{AB} - l_{BA} + 2l_s & l_A - l_{BA} & l_{AB} - l_B \\ l_A - l_{AB} & l_A + l_R & l_{AB} \\ l_{BA} - l_B & l_{BA} & l_B + l_R \end{matrix} & \frac{d}{dt} & \begin{matrix} i_s \\ i_{RA} \\ i_{RB} \end{matrix} = \end{matrix} \quad (4)$$

$$\begin{matrix} \sqrt{3}U_m \sin(\omega t + 30^\circ) - (r_{SA} + r_{SB})i_s \\ -\omega(\Psi_{RA} + 2\Psi_{RB})/\sqrt{3} - r_R i_{RA} \\ \omega(2\Psi_{RA} + \Psi_{RB})/\sqrt{3} - r_R i_{RB} \end{matrix}$$

Рівняння електромагнетного стану мотора треба доповнити рівняннями механічного руху (штивністю і дисипацією механічних ланок, – як це прийнято в теорії електричних машин, – нехтуємо) [1, 2]

$$\frac{d\omega}{dt} = p_0(M_E - M)/J, \quad (5)$$

де  $M = M(\omega, t)$  – механічний момент;  $J$  – момент інерції;  $p_0$  – кількість пар магнетних полюсів машини;  $M_E$  – електромагнетний момент [1]

$$M_E = -\sqrt{3}p_0 i_s (i_{RA} + i_{RB})/\tau. \quad (6)$$

Диференціальні рівняння (4), (5) – шукана  $L$ -модель однофазного стану трифазного асинхронного мотора. Незручність її в тому, що в процесі числового інтегрування за явним принципом виникає потреба на кожному часовому кроці обертати матрицю коефіцієнтів. Це не тільки ускладнює обчислювальний процес, але, що основне, приводить до суттєвого зменшення точності в результаті чого ми втрачаємо можливість аналізу тривалих перехідних процесів. Тому обернемо матрицю диференціальних індуктивностей аналітично. В результаті одержимо шукану  $A$ -модель

$$\frac{d}{dt} \begin{matrix} i_s \\ i_{RA} \\ i_{RB} \end{matrix} = q \begin{matrix} 1 & A_{SA} & A_{SB} \\ A_{AS} & A_A & A_{AB} \\ A_{BS} & A_{BA} & A_B \end{matrix} \times \quad (7)$$

$$\begin{matrix} \sqrt{3}U_m \sin(\omega t + 30^\circ) - (r_{SA} + r_{SB})i_s \\ -\omega(\Psi_{RA} + 2\Psi_{RB})/\sqrt{3} - r_R i_{RA} \\ \omega(2\Psi_{RA} + \Psi_{RB})/\sqrt{3} - r_R i_{RB} \end{matrix}$$

Тут  $A$ -коефіцієнти мають вигляд

$$\begin{aligned} A_{SA} &= -c_2c_5 - c_3c_8; & A_{SB} &= -c_2c_6 - c_3c_9; \\ A_{AS} &= -c_5c_4 - c_6c_7; & A_{BS} &= -c_8c_4 - c_9c_7; \\ A_A &= c_5/q + A_{AS}A_{SA}; & A_{AB} &= c_6/q + A_{AS}A_{SB}; \\ A_{BA} &= c_8/q + A_{BS}A_{SA}; & A_B &= c_9/q + A_{BS}A_{SB}; \\ q &= 1/(c_1 + c_4A_{SA} + c_7A_{SB}), \end{aligned} \quad (8)$$

де

$$\begin{aligned} \Delta &= g_1g_2; & c_1 &= c_2 - c_3 + 2/\alpha_s; & c_2 &= b(2d_1 - d_3 - d_2) + 1/\tau; \\ c_3 &= b(d_1 + d_3 - 2d_2) - 1/\tau; & c_4 &= \Delta(c_6 + c_9) - 1/\alpha_R; \\ c_5 &= b(2d_2 + d_3)/\Delta + 1/g_1; & c_6 &= -b(d_1 + 2d_3)/\Delta; \\ c_7 &= -\Delta(c_5 + c_8) + 1/\alpha_R; & c_8 &= -b(d_2 + 2d_3)/\Delta; \\ c_9 &= b(2d_2 + d_3)/\Delta + 1/g_1; & d_1 &= i_A^2, & d_2 &= i_B^2, & d_3 &= i_{A'B}^2; \\ b &= \frac{2}{3} \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\tau} \right) \frac{1}{i_m^2}; & g_1 &= \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\alpha_R}; & g_2 &= \frac{1}{\tau} + \frac{1}{\alpha_R}, \end{aligned} \quad (9)$$

причому  $\tau, \rho$  – обернені статична й диференціальна індуктивності, їх знаходимо за характеристикою намагнечування (холостого стану) машини як:

$$\tau = \left[ \frac{\Psi_m(i_m)}{i_m} \right]^{-1}; \quad \rho = \left[ \frac{d\Psi_m(i_m)}{di_m} \right]^{-1}, \quad (10)$$

де  $i_m$  – модуль просторового вектора намагнечувальних струмів

$$i_m = 2\sqrt{(i_A^2 + i_{A'B}^2 + i_B^2)/3}; \quad i_A = i_S + i_{RA}; \quad i_B = -i_S + i_{RB}. \quad (11)$$

Сумісному інтегруванню підлягає система диференціальних рівнянь електромеханічного стану (5), (7). Вхідними даними є:  $r_s, r_R, \alpha_s, \alpha_R, p_0, J$ , а також намагнечувальна крива  $\Psi_m(i_m)$ , і вхідні сигнали:  $U_m, \omega_0, M(\omega, t)$ .

У випадку відсутності насичення ( $\tau = \rho = \alpha_m$ ) матриця коефіцієнтів рівняння (7) зводиться до відповідної матриці [1]

$$A = \frac{T}{2} \begin{array}{|c|c|c|} \hline \alpha_s(\alpha_R + \alpha_m) & -\alpha_s\alpha_R & \dots \\ \hline -\alpha_s\alpha_R & \frac{\alpha_R}{\alpha_R + \alpha_m} \left( \alpha_s\alpha_R + \frac{2\alpha_m}{T} \right) & \dots \\ \hline \alpha_s\alpha_R & -\frac{\alpha_s\alpha_R^2}{\alpha_R + \alpha_m} & \dots \\ \hline \end{array} \quad (12)$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \dots & \frac{\alpha_s\alpha_R}{\alpha_R + \alpha_m} \\ \hline \dots & -\frac{\alpha_s\alpha_R^2}{\alpha_R + \alpha_m} \\ \hline \dots & \frac{\alpha_R}{\alpha_R + \alpha_m} \left( \alpha_s\alpha_R + \frac{2\alpha_m}{T} \right) \\ \hline \end{array},$$

де  $T = 1/(\alpha_s + \alpha_R + \alpha_m)$ .

### РЕЗУЛЬТАТИ СИМУЛЯЦІЇ

Результати сумісного інтегрування (5), (7), ілюструють часові залежності кутової швидкості статора модельного ненавантаженого асинхронного мотора що показані на рис. 1. Перехідний стан здійснений при ненульовій початковій швидкості.

Перехідний процес засвідчує успішний запуск мотора до усталеної робочої швидкості.

### ВИСНОВОК

Запропонована математична модель дає можливість аналізувати перехідні процеси роботи мотора від однофазного живлення. Вона враховує явище

насичення. Її легко адаптувати на глибокопазні мотори, якщо доповнити рівняннями квазістационарного електромагнетного поля, що описують поверхневий процес у пазовому просторі обмотки ротора [3].

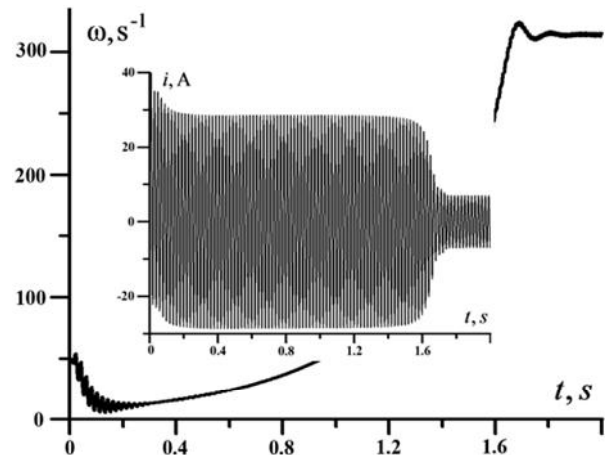


Рис. 1. Залежність  $\omega = \omega(t)$  і  $i_S = i_S(t)$ , при  $\omega(0) = 50$  рад. за с

### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Чабан В.Й., Гоголь З.І. Математична модель трифазного асинхронного мотора в однофазному стані // Електротехніка й електромеханіка. – 2011. – № 3. – С. 43-45.
2. Чабан В.Й. Математичне моделювання електромеханічних процесів. – Львів, 1997. – 344 с.
3. Чабан В.Й. Математичне моделювання в електротехніці. – Л.: Вид-во Тараса Сороки, 2010. – 508 с.

**Bibliography (transliterated):** 1. Chaban V.J., Gogol' Z.I. Matematichna model' trifaznogo asinhronnogo motora v odnofaznomu stani // Elektrotehnika j elektromehaniika. - 2011. - № 3. - S. 43-45. 2. Chaban V.J. Matematichne modelyuvannya elektromehaniichnih procesiv. - L'viv, 1997. - 344 s. 3. Chaban V.J. Matematichne modelyuvannya v elektrotehnicji. -L.: Vid-vo Tarasa Soroki, 2010.-508 s.

Надійшла 28.07.2011

Чабан Василь Йосипович, д.т.н., проф.  
Національний університет "Львівська політехніка"  
й Рясівський університет  
79021, Львів, вул. Кульпарківська, 142, кв. 33.  
тел: (067) 7202181, e-mail: vtchaban@polynet.lviv.ua

Костючко Сергій Миколайович, аспірант  
Національний університет "Львівська політехніка"  
45500, Волинська обл., Локачинський р-н., Локачі,  
вул. Польова, 4  
тел: (068) 5635757, e-mail: siriussk@mail.ru

Чабан Остап Васильович, к.т.н., доц.  
Національний університет "Львівська політехніка"  
79021, Львів, вул. Лазаренка, 38, кв. 14  
тел: (067) 6734482

Tchaban V.Y., Kostyuchko S.M., Tchaban O.V.  
**A mathematical model of a saturated three-phase asynchronous motor in a single-phase state.**

In the paper, a mathematical model of a saturated three-phase asynchronous motor in a single-phase state is presented. Differential equations of electromechanical state are given in Cauchy's normal form. Results of transient process computation are given.

**Key words – three-phase asynchronous motor, single-phase state, mathematical model.**