

В.С. Маляр, А.В. Маляр

## МЕХАНІЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТРИФАЗНИХ АСИНХРОННИХ ДВИГУНІВ ПРИ ОДНОФАЗНОМУ ЖИВЛЕННІ

*Запропоновано метод розрахунку механічних характеристик трифазних асинхронних двигунів, які живляться від однофазної мережі. Обертове магнітне поле створюється завдяки вмиканню послідовно в одну фазу конденсаторів. Задача розв'язується як крайова у трифазній нерухомій системі координат. В математичній моделі двигуна враховується насичення магнітопроводу та витіснення струму. Бібл. 5, рис. 3.*

*Ключові слова:* механічна характеристика, асинхронний двигун, однофазне живлення, крайова задача, проєкційний метод, конденсатор.

*Предложен метод расчета механических характеристик трехфазных асинхронных двигателей, которые питаются от однофазной сети. Вращающееся магнитное поле создается за счет включения последовательно в одну фазу конденсаторов. Задача решается как крайовая в трехфазной системе координат. В математической модели двигателя учитывается насыщение магнитопровода и вытеснение тока. Библ. 5, рис. 3.*

*Ключевые слова:* механическая характеристика, асинхронный двигатель, однофазное питание, крайовая задача, проекционный метод, конденсатор.

**Вступ.** Асинхронні двигуни (АД) в основному виготовляються з трифазними обмотками, які живляться симетричною трифазною системою напруг. Однак на практиці може виникати потреба вмикання їх в однофазну мережу [1], для чого використовують конденсатори, які створюють зсув за фазою струму в одній обмотці, і магнітне поле двигуна стає не пульсуючим, а обертовим, внаслідок чого виникає електромагнітний момент. Крім того, розроблені і знаходять широке застосування конденсаторні електричні двигуни, які призначені для роботи від однофазної мережі [5]. І в першому, і в другому випадках існує проблема розрахунку їх пускових характеристик й вибору ємності конденсаторів.

В технічній літературі відомі методи розрахунку моменту при різних значеннях ємності конденсаторів [1, 2], однак ці методи не мають достатньої точності, оскільки не враховують адекватно такі чинники, як несиметрію живлення, насичення магнітопроводу та витіснення струму. Проблема аналізу роботи несиметричних режимів роботи АД методами математичного моделювання потребує вирішення двох задач: вибору математичної моделі двигуна і методу розрахунку. Ці проблеми взаємопов'язані, тому що з використанням спрощеної математичної моделі АД неможливо адекватно врахувати чинники, які визначають точність розрахунків, а застосування більш складних моделей потребує застосування відповідного математичного апарату.

**Метою роботи** є розроблення методу і алгоритму розрахунку механічних характеристик асинхронних двигунів, які живляться від однофазної мережі.

**Система рівнянь.** Трифазний АД з конденсаторами в одній фазі за визначенням є несиметричним зі сторони статора, а тому для аналізу електромагнітних процесів у них найбільш адекватною і оптимальною є трифазна система координат, але не фізична, а так звана загальмована [4]. В цій системі контури статора не перетворюються, що дає змогу адекватно описати

процеси в них, а трифазна обмотка ротора замінюється еквівалентною нерухомою трифазною, осі якої збігаються з осями обмотки статора.

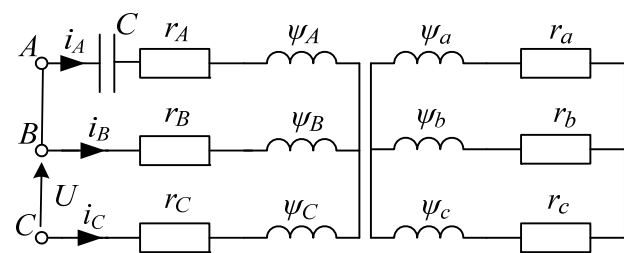


Рис. 1

Система рівнянь, які описують електромагнітні процеси в АД, трифазна обмотка статора якого живиться від однофазної мережі за зображеною на рис. 1 схемою, має вигляд [4]

$$\frac{d\psi_A}{dt} - \frac{d\psi_B}{dt} = -r_A i_A + r_B i_B - u_k;$$

$$\frac{d\psi_B}{dt} - \frac{d\psi_C}{dt} = -r_B i_B + r_C i_C + u_{BC};$$

$$i_A + i_B + i_C = 0;$$

$$\frac{d\psi_a}{dt} - \frac{d\psi_b}{dt} = -r_a i_a + r_b i_b - \alpha(\psi_b - 2\psi_c + \psi_a); \quad (1)$$

$$\frac{d\psi_b}{dt} - \frac{d\psi_c}{dt} = -r_b i_b + r_c i_c - \alpha(\psi_c - 2\psi_a + \psi_b);$$

$$i_a + i_b + i_c = 0;$$

$$\frac{du_k}{dt} = \frac{i_A}{C},$$

де  $u_{BC} = \sqrt{3}U_m \sin(\omega_0 t - \pi/2)$  – лінійна напруга живлення;  $U_m$ ,  $\omega_0$  – амплітуда фазної напруги та кутова частота;  $\alpha = \omega_0(1-s)/\sqrt{3}$ ;  $s$  – ковзання;  $\psi_\xi$ ,  $i_\xi$ ,  $r_\xi$  ( $\xi=A, B, C, a, b, c$ ) – потокозчеплення, струми та активні опори контурів;  $u_k$  – напруга на конденсаторі ємністю  $C$ .

© В.С. Маляр, А.В. Маляр

**Метод і алгоритм розрахунку.** Запишемо систему (1) одним векторним рівнянням  $m = 7$ -го порядку вигляду

$$A \frac{d\vec{y}}{dt} = B\vec{y} + D\vec{x} + \vec{u}, \quad (2)$$

де

$$\vec{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & & & \\ & 1 & -1 & & & & \\ & & & 1 & -1 & & \\ & & & & 1 & -1 & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix};$$

$$\vec{y} = \begin{matrix} \psi_A \\ \psi_B \\ \psi_C \\ \psi_a \\ \psi_b \\ \psi_c \\ u_k \end{matrix}; \quad \vec{x} = \begin{matrix} i_A \\ i_B \\ i_C \\ i_a \\ i_b \\ i_c \\ u_k \end{matrix}; \quad \vec{u} = \begin{matrix} 0 \\ u_{BC} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix};$$

$$\vec{B} = \begin{bmatrix} & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & \alpha & \alpha & -2\alpha & \\ & & & -2\alpha & \alpha & \alpha & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{bmatrix};$$

$$\vec{D} = \begin{bmatrix} -r_A & r_B & & & & & -1 \\ & -r_B & r_C & & & & \\ 1 & 1 & 1 & & & & \\ & & & -r_a & r_b & & \\ & & & & -r_b & r_c & \\ & & & 1 & 1 & 1 & \\ & & & & & & \end{bmatrix}.$$

Система ДР (2) у формі Коші має вигляд

$$\frac{d\vec{y}(\vec{x}, t)}{dt} = z(\vec{y}, \vec{x}, \vec{u}, t). \quad (3)$$

Оскільки вектор  $\vec{u}(t) = \vec{u}(t+T)$  є періодичною функцією часу, в усталеному режимі (при  $s = \text{const}$ ) розв'язком системи ДР (3) є  $T$ -періодичні залежності компонент вектора  $\vec{x}(t) = \vec{x}(t+T)$ . Визначення періодичних функціональних залежностей компонент вектора  $\vec{x}$  шляхом розрахунку перехідного процесу до усталення неприйнятний з багатьох міркувань. Така задача найбільш ефективно може бути розв'язана в позачасовій області шляхом розв'язування крайової задачі розробленим на основі загальної теорії нелінійних коливань проєкційним методом, теоретичною основою якого є апроксимація координат стану

сплайнами третього порядку [3]. Формування крайової задачі здійснюється на сітці  $n$  вузлових точок періоду  $T$ . Результатом апроксимації одного ДР системи (3) є система алгебричних рівнянь  $n$ -го порядку

$$H\vec{Y} - \vec{Z} = \vec{U}, \quad (4)$$

де  $H$  – матриця переходу від неперервних координат до їх вузлових значень, елементи якої визначаються лише сіткою вузлів [3];  $\vec{Y} = (\overline{y_1}, \overline{y_n})^*$ ;  $\vec{Z} = (\overline{z_1}, \overline{z_n})^*$ ;  $\vec{U} = (\overline{u_1}, \overline{u_n})^*$ , а системи ДР (2) –  $m$  векторних рівнянь вигляду (4)

$$H_c \vec{Y}_c - \vec{Z}_c = \vec{U}_c, \quad (5)$$

де  $H_c = \text{diag}(H_1, H_m)$ ;  $\vec{Y}_c = (\overline{Y_1}, \overline{Y}_m)^*$ ;  $\vec{Z}_c = (\overline{Z_1}, \overline{Z}_m)^*$ ;  $\vec{U}_c = (\overline{U_1}, \overline{U}_m)^*$ .

Нелінійна система (5) алгебричних рівнянь  $mn$ -го порядку є дискретним відображенням нелінійної системи ДР (2) порядку  $m$  і апроксимує її на періоді  $T$ . Її розв'язком є вектор  $\vec{X}$ , компонентами якого є значення струмів віток та напруги на конденсаторі у вузлах сітки. За її допомогою можна не тільки розрахувати усталений режим, але й дослідити вплив на режим роботи двигуна зміни будь-якої координати, що входить до цієї системи. Для розрахунку усталеного режиму при заданому ковзанні застосовується метод продовження по параметру. Для цього в систему (5) вводимо параметр  $\varepsilon$  шляхом множення вектора прикладених напруг на  $\varepsilon$  і диференціюємо її по ньому. У результаті отримаємо диференціальне рівняння (ДР)

$$W \frac{d\vec{X}_c}{d\varepsilon} = \vec{U}_c, \quad (6)$$

де  $W = \left( H_c - \frac{\partial \vec{Z}_c}{\partial \vec{Y}_c} \right) \frac{\partial \vec{Y}_c}{\partial \vec{X}_c} - \frac{\partial \vec{Z}_c}{\partial \vec{X}_c}$  – матриця Якобі, блочні

елементи якої  $\left. \frac{\partial \vec{y}}{\partial \vec{x}} \right|_j$ ,  $\left. \frac{\partial \vec{z}}{\partial \vec{y}} \right|_j$ ,  $\left. \frac{\partial \vec{z}}{\partial \vec{x}} \right|_j$  визначаються значеннями параметрів АД в  $j$ -му вузлі.

$$\left. \frac{\partial \vec{y}}{\partial \vec{x}} \right|_j = \begin{bmatrix} L_j & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \left. \frac{\partial \vec{z}}{\partial \vec{y}} \right|_j = B; \quad \left. \frac{\partial \vec{z}}{\partial \vec{x}} \right|_j = D;$$

$$L_j = \begin{bmatrix} L_{AAj} & L_{ABj} & L_{ACj} & L_{Aaj} & L_{Abj} & L_{Acj} \\ L_{BAj} & L_{BBj} & L_{BCj} & L_{Baj} & L_{Bbj} & L_{Bcj} \\ L_{CAj} & L_{CBj} & L_{CCj} & L_{Caj} & L_{Cbj} & L_{Ccj} \\ L_{aAj} & L_{aBj} & L_{aCj} & L_{aaj} & L_{abj} & L_{acj} \\ L_{bAj} & L_{bBj} & L_{bCj} & L_{baj} & L_{bbj} & L_{bcj} \\ L_{cAj} & L_{cBj} & L_{cCj} & L_{caj} & L_{cbj} & L_{ccj} \end{bmatrix}.$$

Інтегруючи систему ДР (6) по  $\varepsilon$  від  $\varepsilon = 0$  до  $\varepsilon = 1$ , знаходимо значення вектора  $\vec{X}$  при заданій нарузі живлення, яке можна уточнити методом Ньютона.

Для дослідження впливу на режим роботи АД зміни будь-якої координати необхідно, вважаючи вектор прикладеної напруги незмінним, продиференцію-

вати систему (5) по цій координаті як параметру. Зокрема у разі розрахунку механічної характеристики отримаємо систему ДР

$$W \frac{d\vec{X}_c}{ds} = \frac{\partial \vec{Z}_c}{\partial s}, \quad (7)$$

інтегруючи яку, отримаємо багатовимірну характеристику. При цьому матриця Якобі така, як в (6), а вектор правих частин складається з  $n$  векторів вигляду

$$\left. \frac{\partial \vec{Z}}{\partial s} \right|_j = \frac{\partial B}{\partial s} \vec{y}_j,$$

де  $\partial B / \partial s$  дорівнює матриці  $B$ , в якій  $\alpha = -\omega_l / \sqrt{3}$ .

Задача розрахунку механічної характеристики розв'язується в два етапи: на першому розраховуємо усталений режим при ковзанні  $s = 1,0$ , а на другому – залежності координат в функції ковзання від  $s = 1,0$  до заданого значення. І на їх основі механічну характеристику  $M_e = M_e(s)$ . Електромагнітний момент АД обчислюється за формулою [4]

$$M_e = \frac{P}{\sqrt{3}} I_\mu \left( (i_{\mu B} - i_{\mu C}) \dot{I}_A + (i_{\mu C} - i_{\mu A}) \dot{I}_B + (i_{\mu A} - i_{\mu B}) \dot{I}_C \right).$$

Для визначення елементів матриці  $L_j$  диференціальних індуктивностей використовується характеристика намагнічування головного магнітного шляху і залежності потокозчеплень розсіювання статора ( $s$ ) та ротора ( $r$ ) від відповідних струмів [4]

$$\psi_\mu = \psi_\mu(i_\mu), \quad \psi_{\sigma s} = \psi_{\sigma s}(i_s), \quad \psi_{\sigma r} = \psi_{\sigma r}(i_r),$$

де  $i_s, i_r$  – модулі зображувальних векторів цих струмів.

З метою врахування витіснення струму в стержнях ротора кожен з них разом із короткозамканими кільцями розділяється по висоті на  $k$  шарів. Тобто вважається, що на роторі є  $k$  короткозамкнених обмоток з відповідними розмірами і кожна з них еквівалентується трифазною. За таких умов в системі рівнянь (1) замість трьох рівнянь для ротора необхідно записати  $3k$  рівнянь вигляду

$$\frac{d\psi_{ak}}{dt} - \frac{d\psi_{bk}}{dt} = -r_{ak}i_{ak} + r_{bk}i_{bk} - \alpha(\psi_{bk} - 2\psi_{ck} + \psi_{ak});$$

$$\frac{d\psi_{bk}}{dt} - \frac{d\psi_{ck}}{dt} = -r_{bk}i_{bk} + r_{ck}i_{ck} - \alpha(\psi_{ck} - 2\psi_{ak} + \psi_{bk});$$

$$i_{ak} + i_{bk} + i_{ck} = 0.$$

Збільшення кількості рівнянь не призводить до зміни алгоритму розрахунку і мало впливає на обсяг обчислень, оскільки матриця Якобі слабо заповнена, що дає змогу для розв'язування системи рівнянь використовувати алгоритм, який враховує її структуру.

Приклад результатів математичного моделювання наведено на рис. 2, 3.

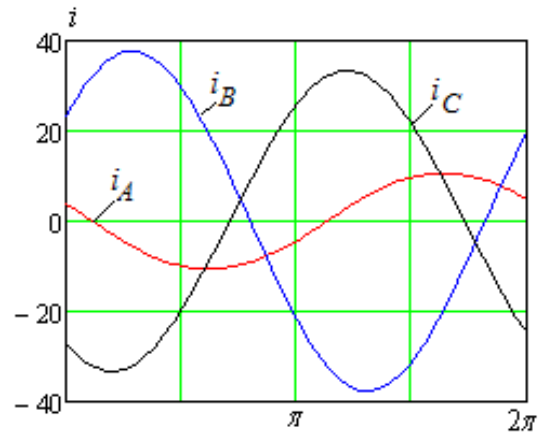


Рис. 2. Періодичні залежності струмів фаз двигуна 4A80B2Y3 при ковзанні  $s = 1,0$  і ємності конденсаторів  $C = 100$  мкФ

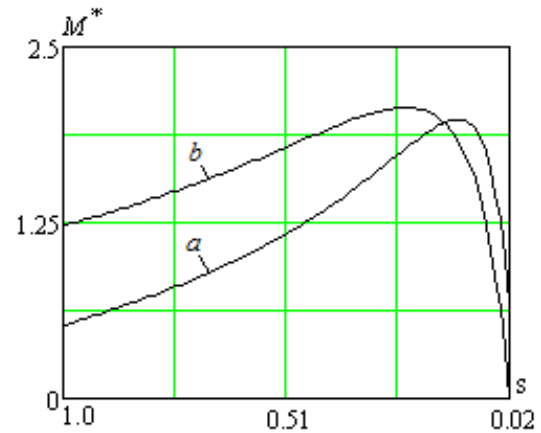


Рис. 3. Статичні механічні характеристики двигуна 4A80B2Y3 при різних ємностях конденсаторів:  $C = 100$  мкФ (a) і  $C = 200$  мкФ (b)

### Висновок.

Розроблений метод розрахунку статичних механічних характеристик трифазних АД з короткозамкненим ротором, які живляться від однофазної мережі, дає змогу досліджувати вплив ємності конденсаторів на перебіг процесу пуску і вибирати таке її значення, яке забезпечує необхідний пусковий момент. В основу розробленого алгоритму покладено математичну модель АД, в якій враховується насичення магнітопроводу й витіснення струму в стержнях ротора, і диференціальний метод розрахунку статичних характеристик на основі розв'язування крайової задачі для системи диференціальних рівнянь електричної рівноваги.

### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Беспалов В.Я., Мощинский Ю.А., Петров А.П. Динамические показатели трехфазных асинхронных двигателей, включаемых в однофазную сеть // Электротехника. – 2000. – №1. – С. 13-19.
2. Бешта А.С., Семин А.А. Определение параметров схемы замещения асинхронного двигателя при несимметричном питании статоров // Электромеханичні та енергозберігаючі системи. – 2014. – №2. – С. 10-16.
3. Маляр В.С., Маляр А.В. Математическое моделирование периодических режимов работы электротехнических

устройств // Электронное моделирование. – 2005. – Т.27. – №3. – С. 39-53.

4. Фильц Р.В. Математические основы теории электромеханических преобразователей. – К.: Наукова думка, 1979. – 208 с.

5. Шуруб Ю.В. Математическая модель асинхронного конденсаторного двигателя с тиристорным управлением // Технічна електродинаміка. – 1999. – №4. – С. 52-56.

#### REFERENCES

1. Bepalov V.Ya., Moshchynsky Yu.A., Petrov A.P. Dynamic indicators of three-phase induction motors connected to single-phase supply. *Elektrotehnika – Electrical engineering*, 2000, no.1, pp. 13-19. (Rus).

2. Beshta A.S., Semin A.A. Evaluation of parameters of the equivalent circuit of the induction motor for asymmetrical power supply to the stator. *Elektromekhanichni i enerhozberhachiuchy systemy – Electromechanical and energy saving systems*, 2014, vol. 2, pp. 10-16. (Rus).

3. Malyar V.S., Malyar A.V. Mathematical modeling of periodic modes of electrotechnical devices. *Electronnoe modelirovanie – Electronic Modeling*, 2005, vol.27, no.3, pp. 39-53. (Rus).

4. Fyl'ts R.V. *Matematicheskie osnovy teorii elektromekhanicheskikh preobrazovatelei* [Mathematical foundations of the theory of electromechanical transducers]. Kyiv, Naukova Dumka Publ., 1979. 208 p. (Rus).

5. Shurub Yu.V. A mathematical model of an asynchronous capacitor engine with a thyristor control. *Tekhnichna elektrodynamika – Technical electrodynamics*, 1999, no.4, pp. 52-56. (Rus).

Надійшла (received) 09.03.2016

Маляр Василь Сафронович<sup>1</sup>, д.т.н., професор,  
Маляр Андрій Васильович<sup>1</sup>, д.т.н., професор,  
<sup>1</sup>Національний університет «Львівська політехніка»,  
79013, Львів, вул. С. Бандери, 12,  
тел/phone +38 032 2582119,  
e-mail: svmalyar@polynet.lviv.ua

V.S. Malyar<sup>1</sup>, A.V. Malyar<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Lviv Polytechnic National University,  
12, S. Bandera Str., Lviv, 79013, Ukraine.

#### **Mechanical characteristics of three-phase induction motors with single-phase power supply.**

**Aim.** Development of a method for calculating mechanical characteristics of three-phase induction motors with single-phase power supply. **Methods.** The developed algorithm is based on the high-adequacy mathematical model of motor and projection method for solving the boundary problem for equations of electrical circuits balance presented in the three-phase coordinate system. As a result of asymmetry of power supply to the stator windings, in steady state, flux-linkage and current change according to the periodic law. They are determined by solving the boundary problem. **Results.** The developed mathematical model allows determining periodic dependence of coordinates as a function of slip and, based on them, mechanical characteristics of motors. **Academic novelty.** The developed method relies on a completely new mathematical approach to calculation of stationary modes of nonlinear electromagnetic circuits, which allows obtaining periodic solution in a timeless domain. **Practical value.** Using the developed calculation algorithm, one can select capacitance required to start an induction motor with single-phase power supply and calculate static mechanical characteristics at a given capacitance. References 5, figures 3.

**Key words:** mechanical characteristic, induction motor, single-phase power supply, boundary problem, projection method, capacitor.