

Ульев Л.М.

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛАМИНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ В СООСНОМ КОНИЧЕСКОМ ДИФFUЗОРЕ С ОБЩЕЙ ВЕРШИНОЙ ГРАНИЦ

Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»

Введение

Изучение ламинарных течений в каналах различной геометрии является одной из фундаментальных задач гидродинамики, так как на его основе проводится исследование ряда других проблем, возникающих при конструировании и расчете проточных частей промышленных аппаратов и теплообмена в них. Например, при проектировании полимерного оборудования [1, 2] или при проектировании объемных гидравлических устройств [3, 4] появляется необходимость рассчитывать параметры ламинарного течения в соосных конических диффузорах.

В работах [5, 6] автором получено решение задачи диффузорного ламинарного течения при пренебрежимо малых значениях числа Рейнольдса между соосными коническими поверхностями с переменной шириной канала вдоль канала:

$$h = h_0 + b(R - R_0), \quad (1)$$

где параметр b является тангенсом разности полууглов раскрытия внешней и внутренней границ канала (рис. 1), т.е. $b = \operatorname{tg}(\alpha - \alpha_1)$, и, следовательно, из геометрических соотношений он должен удовлетворять условию:

$$b > \frac{h_0}{R_0 - R_1}. \quad (2)$$

Решение, полученное автором в [5, 6], описывает течение практически во всем возможном диапазоне изменения параметра b , за исключением одного значения:

$$b = \frac{h_0}{R_0}, \quad (3)$$

при котором зависимость, определяющая распределение безразмерного давления вдоль канала, расходится [5, 6].

Как видно из рисунка 1, данное значение b соответствует случаю течения в канале, сформированном коническими поверхностями с общей вершиной.

В работах [7, 8] автором получено точное решение задачи ползущего [10] диффузорного течения в соосных конических каналах с общей вершиной границ для малых чисел Рейнольдса, которое в безразмерных переменных:

$$\xi = \frac{r}{h_0}, \quad v = \frac{V}{V_0}, \quad \ddot{I} = \frac{(P - P_0)h_0}{\mu V_0}, \quad V_0 = \frac{Q}{S_0}, \quad (4)$$

где $S_0 = 2\pi h_0^2 \xi_0^2 (\cos \alpha_1 - \cos \alpha)$ – площадь поверхности поперечного сечения канала сферической координатной поверхностью на входе в канал запишется, как:

$$v = \frac{\lambda}{6\xi^2} (A \cdot P_2(\tau) + B \cdot Q_2(\tau) - 1), \quad (5)$$

$$\bar{P}(\xi) = \frac{\lambda + 6\xi_0^2}{3\xi_0^2} \left[\left(\frac{\xi_0}{\xi} \right)^3 - 1 \right], \quad (6)$$

где $P_2(\tau) = 0.5(3\tau^2 - 1)$, $Q_2(\tau) = \frac{1}{2}P_2(\tau) \ln \frac{1+\tau}{1-\tau} - \frac{3}{2}\tau$ – многочлены Лежандра первого и второго рода и второго порядка, \bar{P} – среднее по поперечному сечению канала давление,

$$A = \frac{Q_2(\tau_2) - Q_2(\tau_1)}{P_2(\tau_1)Q_2(\tau_2) - P_2(\tau_2)Q_2(\tau_1)}, \quad B = \frac{P_2(\tau_2) - P_2(\tau_1)}{P_2(\tau_1)Q_2(\tau_2) - P_2(\tau_2)Q_2(\tau_1)}, \quad C = \frac{A}{2}(\tau_2^2 + \tau_2\tau_1 + \tau_1^2 - 1),$$

$$\lambda = \frac{6\xi_1^2}{C + \frac{B}{4} \left[\frac{\tau_2(\tau_2^2 - 1)}{\tau_1 - \tau_2} \ln \frac{1+\tau_2}{1-\tau_2} - \frac{\tau_1(\tau_1^2 - 1)}{\tau_2 - \tau_1} \ln \frac{1+\tau_1}{1-\tau_1} - 2(\tau_2 + \tau_1) \right] - 1}, \quad \tau = \cos \theta.$$

Решение (5), (6) получено в сферической системе координат, в которой обе границы канала являются координатными поверхностями, поэтому оно учитывает все особенности геометрии канала. В то же время это решение достаточно громоздко для дальнейшего исследования течения.

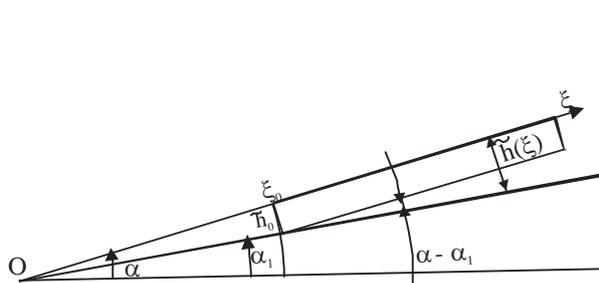


Рисунок 1 – Геометрия соосного конического диффузора с общей вершиной: \bar{h}_0 – безразмерная ширина канала на входе; $\tilde{h}(\xi)$ – текущая безразмерная ширина канала; α, α_1 – полуугол раскрытия внешней и внутренней конической границы канала; ξ_0, ξ – безразмерная радиальная координата входа и текущая

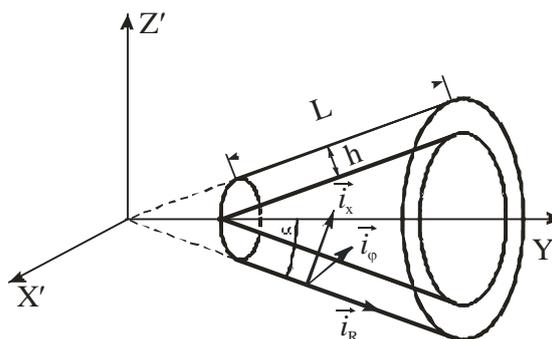


Рисунок 2 – Связь биконической системы координат с геометрией канала: L – длина конической части канала, м; h – ширина зазора, м; $\mathbf{i}_R, \mathbf{i}_X, \mathbf{i}_\varphi$ – орты в биконической системе координат

В данной работе мы получим более компактное, приближенное решение указанной задачи и сравним его с ранее полученным, точным решением (5), (6).

Математическая постановка задачи и ее приближенное решение

Рассматривать течение в соосном коническом диффузоре с общей вершиной его границ будем в биконических координатах [5, 6] (рис. 2), определяемом преобразованием:

$$Z' = R \cos \alpha + X \sin \alpha, \quad (7)$$

$$Y' = (R \sin \alpha - X \cos \alpha) \sin \varphi = \Omega \times \sin \varphi, \quad (8)$$

$$X' = (R \sin \alpha - X \cos \alpha) \cos \varphi = \Omega \times \cos \varphi. \quad (9)$$

Для решения задачи в биконической системе координат используем безразмерные координаты (4), в которых средняя безразмерная скорость жидкости на входе в канал определяется по площади поверхности поперечного сечения входа в канал координатной конической поверхностью:

$$V_0 = \frac{Q}{\pi h_0 (2R_0 \sin \alpha - h_0 \cos \alpha)}, \quad (10)$$

и введена безразмерная координата $\chi = \frac{X}{h_0}$.

Для дальнейшего анализа течения воспользуемся оценками величины членов в уравнениях гидродинамики, которые автор выполнил в работах [5-8, 10-12], т.е. будем рассматривать диффузорное течение в соосном коническом канале переменной ширины с пренебрежимо малыми числами Рейнольдса и при выполнении условия $V_z = o(V_r)$. Данные оценки позволяют систему уравнений движения для аксиальносимметричного диффузорного течения несжимаемой жидкости в рассматриваемых каналах редуцировать к одному уравнению, которое в выбранных масштабах запишется в виде:

$$\frac{\partial \ddot{I}}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 v}{\partial \chi^2}. \quad (11)$$

Граничными и начальными условиями для (11) являются условия прилипания жидкости на стенках канала и заданное давление на входе в канал:

$$v = 0, \chi = 0, \quad (12)$$

$$v = 0, \chi = \frac{\xi}{\xi_0}, \quad (13)$$

$$\Pi = 0, \xi = \xi_0, \quad (14)$$

где $\tilde{h}(\xi) = \xi/\xi_0$ – изменение безразмерной ширины канала вдоль течения.

Уравнение неразрывности будем использовать в виде условия постоянства расхода жидкости через произвольное поперечное сечение канала:

$$\int_0^{\xi/\xi_0} (\xi \sin \alpha - \chi \cos \alpha) v d\chi = \frac{1}{2} (2\xi_0 \sin \alpha - \cos \alpha). \quad (15)$$

Заметим, что условие (14) означает возможность использования в уравнениях движения несжимаемой жидкости вместо абсолютного давления P , разность $\Delta P = P - P_0$, т.е. перепад давления. В этом случае P_0 является произвольной постоянной, и для дальнейшего исследования важен только перепад давления вдоль течения.

Исключительно из геометрических свойств канала получаем выражения, определяющее распределение безразмерной площади поверхности поперечного сечения канала вдоль течения:

$$\tilde{s} = \frac{S}{S_0} = \left(\frac{\xi}{\xi_0} \right)^2 = \frac{1}{\tilde{h}^2}, \quad (16)$$

и безразмерной средней скорости течения жидкости:

$$\bar{v} = \left(\frac{\xi_0}{\xi} \right)^2 = \frac{1}{\tilde{s}}. \quad (17)$$

Интегрируя уравнение (11) с условиями (12)-(15), получим выражения, описывающие распределение безразмерной скорости

$$v = 6 \left(\frac{\xi_0}{\xi} \right)^3 \left[\chi - \left(\frac{\xi_0}{\xi} \right) \chi^2 \right] = \frac{6}{\tilde{h}^4} (\tilde{h}\chi - \chi^2), \quad (18)$$

безразмерного градиента давления

$$\frac{d\ddot{i}}{d\xi} = -12 \left(\frac{\xi_0}{\xi} \right)^4 = -12\bar{v}^2, \quad (19)$$

и безразмерного давления:

$$\ddot{i}(\xi) = 4\xi_0 \left[\left(\frac{\xi_0}{\xi} \right)^3 - 1 \right]. \quad (20)$$

Значение ξ_0 в нашем случае можно определить с помощью величины разности полууглов раскрытия граничных поверхностей канала:

$$\xi_0 = \text{ctg}(\alpha - \alpha_1). \quad (21)$$

Краткий анализ полученного решения

Рассматриваемое в данном случае течение в соосном коническом диффузоре с общей вершиной границ имеет особенность, характерную для диффузорного течения в соосных конических каналах с увеличивающейся шириной вдоль течения. Это – конечная величина безразмерного давления при стремлении радиальной координаты *ad infinitum*. Переходя к пределу $\xi \rightarrow \infty$ в (20), получим:

$$\Pi(\infty) = -4\xi_0. \quad (22)$$

Выражения (22) и (20) позволяют определить безразмерную радиальную координату, на которой безразмерное давление будет отличаться от $\Pi(\infty)$ не более, чем на 1%:

$$\xi_\infty = 4.64\xi_0, \quad (23)$$

которая может иметь важное значение для практических расчетов.

Сравнение распределений безразмерных давлений (6) и (20) в широком диапазоне изменения параметров задачи дает хорошее согласие, несмотря на некоторое различие масштабных множителей в сферических и биконических координатах.

Относительное отклонение между (6) и (20) в канале с полууглами раскрытия граничных конических поверхностей $\alpha = 20^\circ$, $\alpha_1 = 10^\circ$ не превышает 1% (рис. 3), а при изменении разности $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_1$ в пределах интервала $[0, 30^\circ]$ может увеличиться до 9%. Данный результат позволяет в практически интересном диапазоне изменения параметров задачи упростить вычисление константы разделения λ [8] в (6). Действительно, сравнивая (6) и (20), получаем выражение:

$$\lambda = 12\xi_0^4 - 6\xi_0. \quad (24)$$

Распределение безразмерной скорости (18) является симметричным относительно срединной поверхности канала, выбранной в биконических координатах. В то же время распределение (5) по поперечной координате θ существенно несимметрично. Для сравнения безразмерных скоростей (5) и (18) рассмотрим их распределения на поперечных сечениях канала сферическими координатными поверхностями. Координаты точек на сферических поверхностях радиуса ξ_C в биконической системе координат определяются, как:

$$\xi_i = \xi_C \cos(\alpha_1 - \theta_i), \quad (25)$$

$$\chi_i = \xi_C \sin(\alpha - \theta_i), \quad (26)$$

что и позволяет построить распределения скоростей (рис. 4).

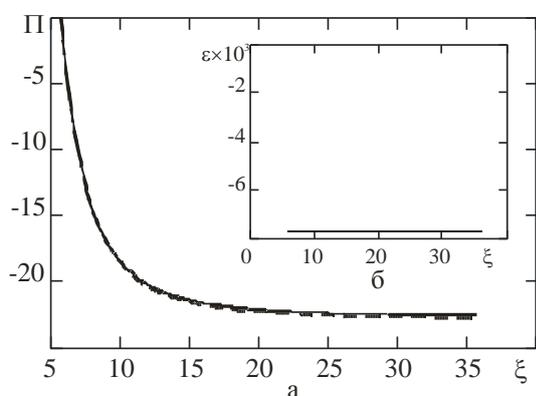


Рисунок 3 а – распределение безразмерного давления в соосном коническом диффузоре с общей вершиной границ и полууглами их раскрытия: $\alpha = 20^\circ$, $\alpha_1 = 10^\circ$.
Сплошная линия – расчет по зависимости (20), штриховая по зависимости (6). б – распределение относительного отклонения зависимости (20) от (6)

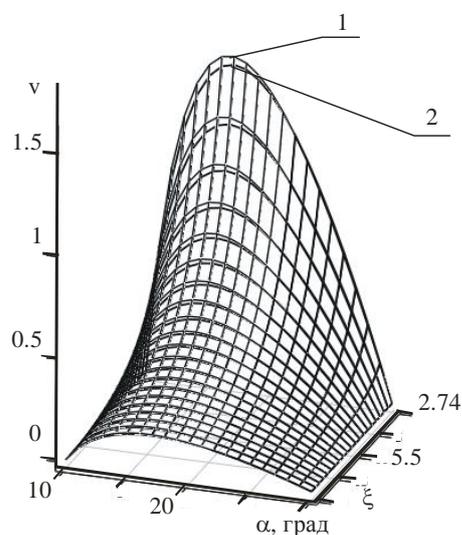


Рисунок 4 – Распределение безразмерной скорости в соосном коническом диффузоре с общей вершиной границ. 1 – Распределение, полученное в биконических координатах; 2 – в сферических

Мы видим, что распределение (18) на сферических поперечных сечениях канала несимметрично и близко к распределению (5). Данный результат *a priori* не очевиден, но становится предельно ясен после анализа полученного решения.

Заключение

Получено приближенное решение задачи ламинарного диффузорного течения с пренебрежимо малыми числами Рейнольдса в соосных конических каналах с общей вершиной границ. Решение, полученное в биконической системе координат, хорошо согласуется с точным решением и удобно для практических применений и использования в дальнейшем исследовании течения.

Обозначения

h – ширина канала, м; P , P_0 – давление текущее и на входе, Па; Q – объёмный расход, м³/с; R , R_0 , R_1 – координата радиальная, выхода из канала и входа в него, м; V – скорость, м/с; X' , Y' , Z' – координаты в декартовой системе, м; X – поперечная бикониче-

ская координата, м; α , α_1 – половина угла раскрытия внешней и внутренней конической поверхности, рад; φ – азимутальная биконическая координата, рад.

Литература

1. Басов Н.И., Казанков Ю.В., Любартович В.А. Расчет и конструирование оборудования для производства и переработки полимерных материалов. М.: Химия. 1986. С. 488.
2. Технология нанесения покрытий на поверхности / О.М. Яхно, С.Г. Кравченко, В.С. Кривошеев и др. – К.: Техника. 1993. С. 121.
3. Осипов А.Ф. Объемные гидравлические машины. М.: Машиностроение. 1966. С. 160.
4. Гидравлика, гидромашины и гидроприводы / Т.М. Башта, С.С. Руднев, Б.Б. Некрасов и др. – М.: Машиностроение. 1982. С. 423.
5. Ульев Л.М. Медленные течения в коаксиальных конических щелях переменной ширины // Вестник ХГПУ. 1999. Вып. 34. С. 3-8.
6. Ульев Л.М. Ламинарное диффузорное течение в соосном коническом канале переменной ширины с частичным учетом сил инерции // Вестник ХГПУ. 2003. Вып. 17. С. 143-153.
7. Ульев Л.М. Медленные течения в коаксиальных конических каналах // Вестник ХГПУ. Механика. Машиностроение. Харьков, ХГПУ. 1997. Вып. 7. Ч. 2. С. 22-31.
8. Ульев Л.М. Медленные течения между соосными коническими поверхностями // ИФЖ. 1998. Т. 71, №. 6. С. 1092- 1098.
9. Гогос К., Тадмор З. Теоретические основы переработки полимеров. – М.: Химия, 1984. С. 632.
10. Ульев Л.М. Решение задачи ламинарного диффузорного течения в соосном коническом канале постоянной ширины с частичным учетом инерционных свойств // Вестник НТУ “ХПИ”. 2002. № 6. Харьков. НТУ “ХПИ”. С. 66-71.
11. Ульев Л.М. Решение задачи ламинарного течения между коническими поверхностями с общей вершиной при частичном учете инерционных свойств // Вестник НТУ “ХПИ”. 2001. № 3. Харьков. НТУ “ХПИ”. С. 224-235.
12. Ulyev L.M. Solution of Slow Steady State Flow Problem in a Constant Width Channel with Taking into account curvature distinction of its Boundaries // 15th International Congress of Chemical and Process Engineering, CHISA’2002, Praha, 2002, Summaries Vol. 3. Fluid Flow. Multiphase System. Praha. 2002. P. 178 –179. (Paper No. P5. 102. P. 11).

УДК 532.5: 678.027

Ульев Л.М.

**НАБЛИЖЕНЕ РІШЕННЯ ЗАДАЧІ ЛАМІНАРНОЇ ТЕЧІЇ У СПІВВІСНОМУ
КОНІЧНОМУ ДИФУЗОРИ З СПІЛЬНОЮ ВЕРШИНОЮ МЕЖ**

Одержано наближено рішення задачі ламінарної дифузорної течії з зневажено малими числами Рейнольдса у співвісному конічному каналі з спільною вершиною меж. Рішення, яке побудовано у біконічній системі координат, добре погоджується з точним рішенням та зручно до використання у практиці та до подальшого вивчення даної течії.