

УДК 532.5; 678.027

Ульев Л.М.

**ОЦЕНКА ПЕРЕПАДА ДАВЛЕНИЯ НА НАЧАЛЬНОМ
ГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ УЧАСТКЕ ЛАМИНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ
В СООСНОМ КОНИЧЕСКОМ ДИФФУЗОРЕ**

Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»

Введение

Изучение течения в начальных участках каналов различной геометрии является одной из фундаментальных и важных задач гидродинамики, так как на его основе проводится исследование ряда других проблем, возникающих при создании оборудования в различных отраслях промышленности.

В работах [1,2] автор решил задачу развития ламинарного течения в соосном коническом канале операционным методом Лапласа-Карсона. Для этого диффузорное течение в соосном коническом канале аппроксимировалось радиальным расходящимся течением в плоском цилиндрическом секторе (рис. 1). При этом соосный канал, образованный коническими поверхностями с полууглом раскрытия α , как бы разрезается вдоль одной из образующих линий конических поверхностей и разворачивается на плоскость (рис. 1). Верхняя и нижняя стенки канала считаются идентичными, что справедливо в том случае, когда в коническом канале мы можем пренебречь различием в кривизне его границ. В работах [3,4] показано, что это можно сделать при выполнении условия $R_0 \geq 2.22h \operatorname{ctg} \alpha$. Поэтому плоский канал будет представлять собой часть цилиндрического сектора с углом раскрытия $\varphi = 2\pi \sin \alpha$, высотой h и ограниченного радиусами R_0 и R_1 (рис. 1б).

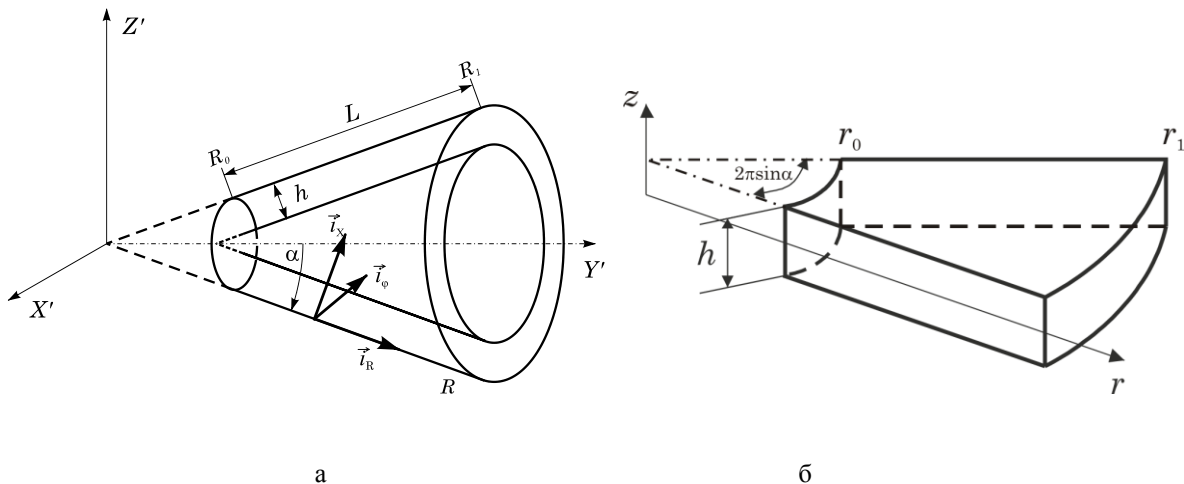


Рисунок 1 – Геометрия соосного конического канала:

а – соосный конический канал; б – разворот соосного конического канала на плоскость.
 L – длина образующей границ канала, R_0, R_1 – радиальные координаты входа и выхода из канала, h – ширина канала, α – полуугол раскрытия конических поверхностей,
 r, z – радиальная и аксиальная цилиндрические координаты

Течение в таком канале удобно описывать в цилиндрических координатах, связанных с геометрией канала. Вследствие аксиальной симметрии течения жидкости в

коническом канале (рис. 1а) аксиальная составляющая скорости жидкости отсутствует, поэтому в плоском канале будет отсутствовать угловая составляющая скорости, а в [5] показано, что при ламинарном течении в таких каналах выполняется условие $V_z = o(V_r)$.

Оценка членов в уравнениях гидродинамики позволила редуцировать систему уравнений движения к одному уравнению, записанному в форме Озеена, для которого условиями однозначности явились: постоянство расхода в любом поперечном сечении канала, заданная величина давления на входе в канал и условия прилипания на его стенках. В результате решения сформулированной задачи в цилиндрических координатах мы получили распределение скорости в канале, которое в безразмерных переменных и параметрах:

$$\xi = \frac{r}{r_0}, \chi = \frac{2z}{h}, v = \frac{V_r}{V_0}, R = \frac{\rho V_0 h^2}{4\mu r_0}, \Pi = \frac{(P-P_0)h^2}{4\mu V_0 r_0} \quad (1)$$

имеет вид:

$$v = \frac{3}{2}(1-\chi^2)\frac{1}{\xi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{v_k^2} \left(1 - \frac{\cos v_k \chi}{\cos v_k}\right) \left[\int_0^{\xi^2-1} \frac{e^{-\frac{v_k^2 \tau}{2R}}}{\sqrt{(\xi^2-\tau)^3}} d\tau - 2e^{-\frac{v_k^2(\xi^2-1)}{2R}} \right], \quad (2)$$

$$\Pi(\xi) = \frac{R(\xi^2-1)}{2\xi^2} + \int_1^{\xi} \frac{\partial v}{\partial \chi} \Big|_{\chi=1} d\xi, \quad (3)$$

где $V_0 = \frac{Q}{2\pi r_0 h \sin \alpha}$ – средняя скорость течения на входе в канал, а v_k – это корни уравнения $\operatorname{tg} v = v$ [1].

В работе [2] были получены простые выражения для вычисления значений безразмерных координат $\xi_{н.г.}$, до которых распространяется начальный гидродинамический участок, и длины начального гидродинамического участка $\Delta \xi_{н.г.}$ при ламинарном диффузорном течении ньютоновской жидкости в секториальном канале постоянной ширины:

$$\xi_{н.г.} = 1 + 0.179R, \Delta \xi_{н.г.} = 0.179R, 0 < R \leq 0.95, \quad (4)$$

$$\xi_{н.г.} = 1.354\sqrt{R}, \Delta \xi_{н.г.} = 1.354\sqrt{R} - 1, 0.95 < R < 170. \quad (5)$$

В работах [6,7] автор получил выражения для расчета давления в соосном коническом и секториальном диффузорах постоянной ширины при установившемся ламинарном течении, но выражения для вычисления перепада давления в этих каналах с учетом течения на начальном гидродинамическом участке до сих пор отсутствует. Соотношение (3) достаточно громоздко и неудобно для технических расчетов. Поэтому в данной работе мы с помощью выражений (3)–(5) и результатов, представленных в работе [7], получим простые соотношения для определения перепада давления в секториальном диффузоре с учетом эффектов развития ламинарного течения в пределах начального гидродинамического участка.

Оценка перепада давления на начальном гидродинамическом участке

На начальном гидродинамическом участке под действием сил вязкости формируется стабилизированное распределение скорости от профиля, заданного на входном срезе канала. Понятие стабилизированного распределения скорости при диффузорном течении автором определено в работе [2].

При решении задачи ламинарного диффузорного течения в секториальном канале выбирался на входе в канал равномерный профиль скорости, что, как правило, справедливо, когда жидкость поступает в канал из большого резервуара, а края канала на его входе скруглены [8].

В пределах начального гидродинамического участка наблюдаются наибольшие скорости сдвига на границах канала [1], а значит здесь наибольшие напряжения сдвига на стенках канала, и поэтому здесь происходит наибольшее изменение давления на единице длины канала, вызванное диссипативными силами.

Распределение безразмерного давления при ламинарном течении в секториальном диффузоре постоянной ширины с учетом начального гидродинамического участка определяется выражением (3). Проинтегрировав первый член в (3), мы можем его записать в виде:

$$\Pi(\xi) = \frac{R(\xi^2 - 1)}{2\xi^2} - 3\ln \xi + \int_1^\xi \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \int_0^{\xi^2-1} \frac{\exp\left(\frac{v_k^2 \tau}{2R}\right)}{\sqrt{(\xi^2 - \tau)^3}} d\tau - 2 \exp\left[\frac{v_k^2 (\xi^2 - 1)}{2R}\right] \right\} d\xi. \quad (6)$$

Сравнивая зависимость (6) с выражением, полученным нами для определения распределения безразмерного давления с учетом характерной инерционной силы при стабилизированном течении [7] мы можем сказать, что первый член правой части (6) является динамической составляющей безразмерного давления, а второй член определяет диссипативную составляющую безразмерного давления в случае стабилизированного течения. Третий член (6), по сути, также является диссипативным, но он определяет добавку к безразмерному давлению в стабилизированном течении, возникающую вследствие непараболичности профиля скорости, а в рассматриваемом случае профиля скорости более наполненного, чем квадратичный параболический профиль стабилизированного течения [5].

Третий член (6) и определяет величину дополнительного изменения давления на начальном гидродинамическом участке. Поэтому для нахождения величины дополнительного изменения безразмерного давления на участке гидродинамической стабилизации течения нам необходимо проинтегрировать этот член от 1 до $\xi_{н.г.}$.

Заметим, что при ламинарном течении в трубах величину дополнительного перепада давления на участке стабилизации течения называют поправкой на входовые эффекты или входовой поправкой давления. Вычислена она может быть, например, по методу Бэгли [9]. В этом случае входовая поправка называется поправкой Бэгли.

И поскольку ранее, практически во всех главах данной монографии, мы отмечали, что до сих пор не существовало надежных научно обоснованных методов расчета давления при ламинарных течениях в соосных конических и секториальных каналах, поэтому не существовало и методов оценки входовых эффектов в таких течениях.

Обозначим безразмерную величину поправки на входовые эффекты через Π_{ent} , и тогда, учитывая, что мы хотим создать простой метод вычисления этой поправки, при-
 мем во внимание только первый член суммы ряда под знаком интеграла в (6). Этот
 член соответствует первому и наибольшему корню v_1 . Остальные корни этого уравне-
 ния быстро убывают по величине. После такого упрощения можем записать для Π_{ent} :

$$\Pi_{ent} = \int_1^{\xi} \left\{ \int_0^{\xi^2-1} \frac{\exp\left(\frac{v_1^2 \tau}{2R}\right)}{\sqrt{(\xi^2 - \tau)^3}} d\tau - 2 \exp\left[\frac{v_1^2 (\xi^2 - 1)}{2R}\right] \right\} d\xi. \quad (7)$$

Понятно, что сначала необходимо получить выражение, определяющее величину
 внутреннего интеграла, который автор вычислил в работе [2]. Обозначая его через
 $I(\xi)$, перепишем выражение для вычисления входовой поправки безразмерного давле-
 ния (7) в виде

$$\Pi_{ent} = \int_1^{\xi_{н.г}} \left\{ I(\xi) - 2 \exp\left[\frac{v_1^2 (\xi^2 - 1)}{2R}\right] \right\} d\xi, \quad (8)$$

где $I(\xi)$ мы определили в работе [2] выражением:

$$I(\xi) = -\frac{2}{3} \xi^2 e^{-\frac{v_1^2 \xi^2}{3R}} \left\{ \text{Ei}^* \left[\frac{v_1^2}{6R} (3 - \xi^2) \right] - \text{Ei}^* \left(\frac{v_1^2 \xi^2}{3R} \right) \right\}, \quad (9)$$

а выражение

$$\text{Ei}^*(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt, \quad (10)$$

это интегральная показательная функция [10].

Также, как и при определении длины начального гидродинамического участка
 $\Delta \xi_{н.г}$, мы оценим величину (8) для условно малых чисел R , т.е. таких, для которых мож-
 но считать координатой стабилизации течения величину безразмерной координаты $\xi_{н.г}$,
 определенную в (8) и условно больших числах R , для которых $\xi_{н.г}$ определяется вели-
 чиной (5). В дальнейшем мы уточним интервалы изменения параметра R , которые бу-
 дут использоваться при оценке Π_{ent} .

Сначала выполним оценку Π_{ent} для малых значений R . Легко проверить, что для
 малых значений R выполнены условия, определенные автором в работе [2], при кото-
 рых возможна аппроксимация интегральной показательной функции $\text{Ei}^*(x)$ отноше-
 нием:

$$Ei^*(x) \approx \frac{e^x}{x}. \quad (11)$$

А это значит, что упрощение подынтегрального выражения (8) нами уже сделано в работе [2], используя которое мы можем записать:

$$I(\xi) - 2 \exp\left[\frac{v_1^2(\xi^2 - 1)}{2R}\right] \approx -2 \exp\left[-\frac{10}{R}(\xi^2 - 1)\right]. \quad (12)$$

В (12) мы учли, что $v_1^2 \approx 20$, и для оценки величины Π_{ent} такой точности вполне будет достаточно.

Подставляя (12) в (8), получим выражение для Π_{ent} :

$$\Pi_{ent} = -2 \exp\left(\frac{10}{R}\right) \int_1^{\xi_{н.г}} \exp\left(-\frac{10}{R}\xi^2\right) d\xi. \quad (13)$$

Вводя замену переменной интегрирования $y = \sqrt{\frac{10}{R}}\xi$, перепишем (13) в виде выражения с интегралом по переменной y :

$$\Pi_{ent} = -2 \exp\left(\frac{10}{R}\right) \sqrt{\frac{R}{10}} \int_{\frac{10}{R}}^{\frac{10}{R}\xi_{н.г}} \exp(-y^2) dy, \quad (14)$$

интегрирование которого приводит к результату:

$$\Pi_{ent} = -2 \exp\left(\frac{10}{R}\right) \sqrt{\frac{R}{10}} \left[\operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{R}{10}}\xi_{н.г}\right) - \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{R}{10}}\right) \right], \quad (15)$$

где $\operatorname{erf}(x)$ – это интеграл вероятности [10]. Для оценки значения интеграла вероятности воспользуемся его асимптотическим представлением [11]:

$$\operatorname{erf}(z) = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-z^2}}{z} \left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \right], \quad (16)$$

которое также можно получить из представления интеграла вероятности с помощью функционального ряда [12].

Подставляя асимптотику (16) в разность интегралов вероятности (15), получим:

$$\operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{R}{10}}\xi_{н.г}\right) - \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{R}{10}}\right) = \sqrt{\frac{R}{10\pi}} \exp\left(-\frac{10}{R}\right) \left\{ 1 - \frac{\exp\left[\frac{10}{R}(1-\xi_{н.г}^2)\right]}{\xi_{н.г}} \right\}, \quad (17)$$

и тогда из (15) для Π_{ent} можем записать:

$$\Pi_{ent} = -0.1R \left\{ 1 - \frac{\exp\left[\frac{10}{R}(1-\xi_{н.г}^2)\right]}{\xi_{н.г}} \right\}. \quad (18)$$

Поскольку безразмерная координата, до которой происходит формирование стабилизированного распределения скорости, определяется соотношением (4), подставляя которое в (18), получаем:

$$\Pi_{ent} = -0.1R \left\langle 1 - \frac{\exp\left\{\frac{10}{R}\left[1 - (1 + 0.179R)^2\right]\right\}}{1 + 0.179R} \right\rangle. \quad (19)$$

Далее, учитывая то, что произведение $0.179R < 1$, поскольку ранее мы предположили R малым числом, выполним в (19) разложение в ряд по малому параметру и, удерживая члены не выше первого порядка и пренебрегая членами ряда высших порядков, получаем оценку безразмерной величины входового эффекта:

$$\Pi_{ent} = -0.1R(1 - 0.005R) \approx -0.1R. \quad (20)$$

Итак, мы определили поправку на входовой эффект для быстрой оценки распределения безразмерного давления при ламинарном диффузорном течении в секториальном канале постоянной ширины, но поскольку определили мы эту поправку, пользуясь приближенными методами, в дальнейшем нам необходимо выяснить насколько правомерно ее применение, и если правомерно, то определить пределы ее применимости.

Выражение, позволяющее определить распределение безразмерного давления в секториальном диффузоре постоянной ширины при ламинарном течении и с учетом эволюции профиля скорости на начальном гидродинамическом участке (6) с привлечением (20) для приближенного вычисления, можно записать в виде:

$$\Pi(\xi) = -0.1R + \frac{R}{2} \left(1 - \frac{1}{\xi^2} \right) - 3 \ln \xi. \quad (21)$$

При $R \rightarrow 0$ в (21) распределение $\Pi(\xi)$ стремится к распределению безразмерного давления при ползущем течении, т.е. условие предельного перехода к ранее полученным результатам в этом случае выполнено.

Сравним распределение (21) с распределением (6) для различных значений параметра R .

При сравнении относительное отклонения зависимости (21) от зависимости (6) будем рассматривать за пределами начального гидродинамического участка, поскольку добавка Π_{ent} оценивает дополнительное изменение безразмерного давления к изменению при стабилизированном течении на полной длине начального гидродинамического участка.

Сначала рассмотрим течение с числом $R = 0.15$. В соответствии с (4) в этом случае безразмерная координата, на которой достигается стабилизированное течение, будет равна $\xi_{н.г} \approx 1.027$.

При малых значениях R инерционные силы малы и течение будет происходить в сторону падения безразмерного давления (рис. 2). Поскольку длина начального гидродинамического участка мала, то и падение давления за счет больших скоростей сдвига на участке стабилизации течения будет незначительно, хотя уже и заметно на рис. 2. Найденная нами входная добавка (20) в этом случае также незначительна $\Pi_{ent} = -0.015$ и ее сумма с зависимостью безразмерного давления для стабилизированного диффузорного течения в секториальном канале постоянной ширины (21) достаточно хорошо описывает изменение безразмерного давления с учетом начального гидродинамического участка (рис. 2).

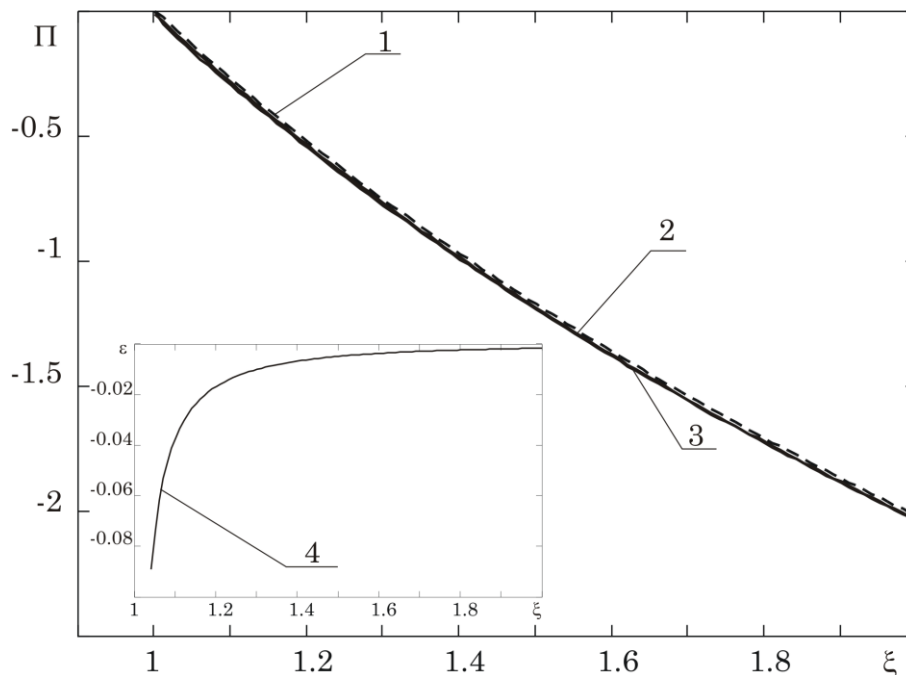


Рисунок 2 – Сравнение распределения безразмерного давления при ламинарном течении в секториальном диффузоре постоянной ширины при числе $R = 0.15$: 1 – распределение безразмерного давления в случае стабилизированного течения, вычисленного с учетом характерной инерционной силы [2] в безразмерных переменных, использующихся в настоящей главе (1) (первые два члена (6)); 2 – приближение с использованием поправочного члена для учета входного эффекта (21); 3 – распределение (6); 4 – распределение вдоль течения относительного отклонения зависимости 3 от зависимости 2

Относительное отклонение зависимости (21) от зависимости, представленной точным решением (6), не превосходит 8 %, а на большей части рассматриваемой безразмерной длины канала не превосходит 2 % (рис. 2).

При увеличении параметра R до величины, равной 1.25, длина начального гидродинамического участка в соответствии с (4) увеличивается прямо пропорционально R , и стабилизация течения достигается на безразмерной радиальной координате $\xi_{н.г} \approx 1.22$.

Увеличение длины начального гидродинамического участка приводит к увеличению входного эффекта в распределении давления вдоль течения. Распределение безразмерного давления, вычисленное с учетом влияния распределения скорости на начальном гидродинамическом участке, уже значительно отличается от распределения безразмерного давления, полученного для стабилизированного течения (рис. 3).

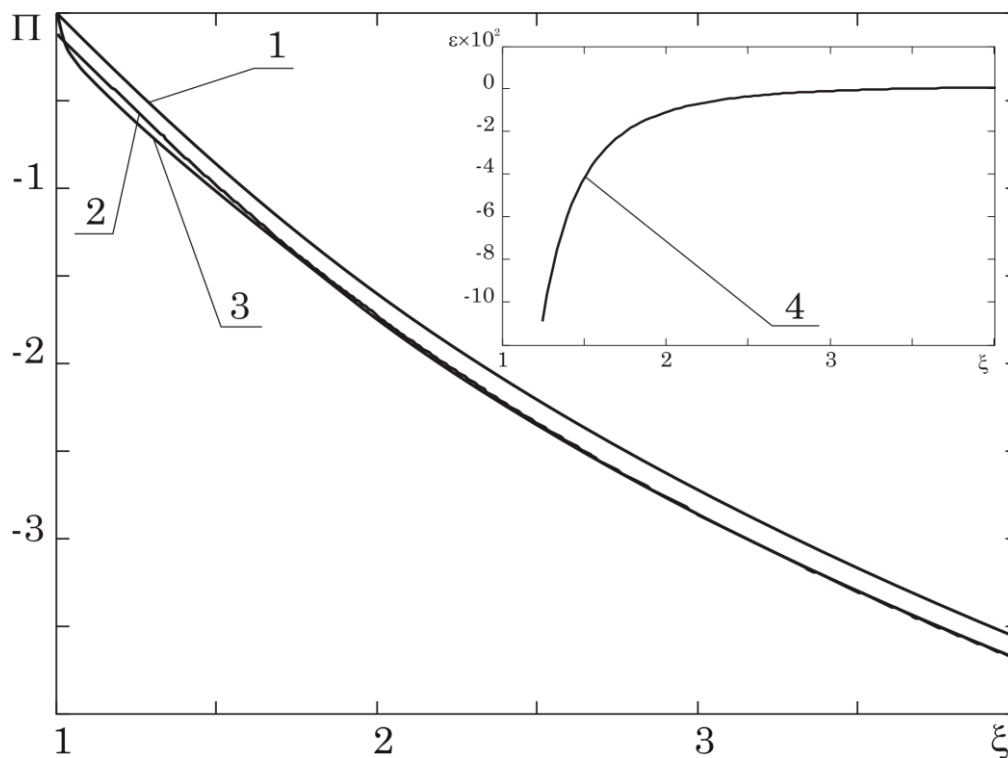


Рисунок 3 – Сравнение распределения безразмерного давления при ламинарном течении в секториальном диффузоре постоянной ширины при числе $R = 1.25$: 1 – распределение безразмерного давления в случае стабилизированного течения, вычисленного с учетом характерной инерционной силы [2] в безразмерных переменных, использующихся в настоящей работе (1) (первые два члена (6)); 2 – приближение с использованием поправочного члена для учета входного эффекта (21); 3 – распределение (6); 4 – распределение вдоль течения относительного отклонения зависимости 3 от зависимости 2

В этом случае и входовая поправка для вычисления безразмерного давления будет больше, чем в предыдущем случае, $\Pi_{ent} = -0.125$ и при ее использовании, т.е. при вычислении безразмерного давления по формуле (20), мы получаем достаточно хорошее согласие с распределением (6) (рис. 3).

Относительное отклонение зависимости (21) от зависимости (6) за пределами начального гидродинамического участка не превосходит 10 % и быстро стремится к 0 вниз по течению (рис. 3).

При увеличении числа R до 5 длина начального гидродинамического участка увеличивается до $\Delta\xi_{н.г} = 0.9$, т.е. безразмерная координата, начиная с которой профиль скорости можно считать стабилизированным, равна $\xi_{н.г} = 1.9$.

Распределение безразмерного давления, вычисленного для стабилизированного течения в начале канала, принципиально отличается от распределения, вычисленного с учетом начального гидродинамического участка (рис. 4). Происходит это вследствие того, что силы трения в пределах участка стабилизации скорости превосходят характерную инерционную силу при выбранном числе R (рис. 4). В случае стабилизированного течения жидкость в начале канала движется в сторону увеличения давления. Если же существует начальный гидродинамический участок с равномерным распределением скорости жидкости на его входе, то она будет течь в сторону уменьшения давления (рис. 4).

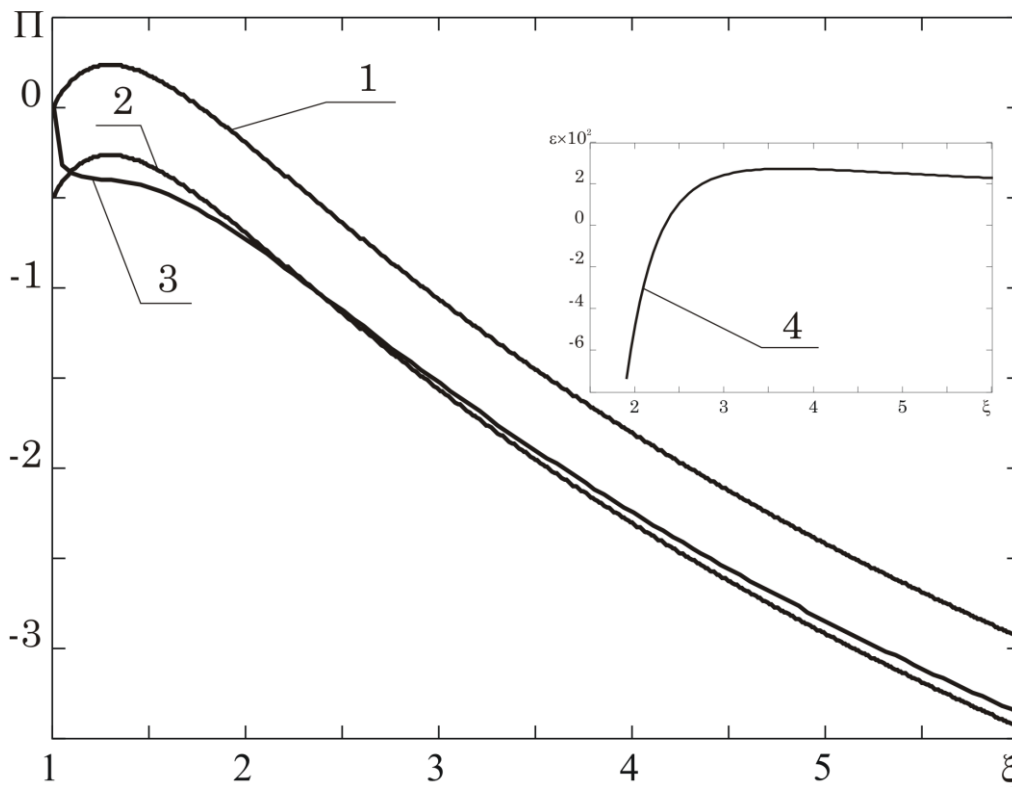


Рисунок 4 – Сравнение распределения безразмерного давления при ламинарном течении в секториальном диффузоре постоянной ширины при числе $R = 5$: 1 – распределение безразмерного давления в случае стабилизированного течения, вычисленного с учетом характерной инерционной силы [2] в безразмерных переменных, использующихся в настоящей работе (1) (первые два члена (6)); 2 – приближение с использованием поправочного члена для учета входного эффекта (21); 3 – распределение (6); 4 – распределение вдоль течения относительного отклонения зависимости 3 от зависимости 2

В данном случае изменение безразмерного давления на протяжении всего участка гидродинамической стабилизации представляет уже значительную величину. Безразмерное давление на выходе из начального гидродинамического участка, полученное с помощью решения (6), равно $\Pi(\xi_{н.г}) \approx -0.67$. Расчет безразмерного давления из начального гидродинамического участка для стабилизированного течения [7], вычисленный в безразмерных переменных (1), дает значение $\Pi_{ст}(\xi_{н.г}) = -0.12$. Это означает, что изменение безразмерного давления, появившееся вследствие больших скоростей

сдвига на границах канала в пределах начального гидродинамического участка, т.е. входная поправка, может быть вычислено как разница $\Pi(\xi_{н.г.}) - \Pi_{ст}(\xi_{н.г.}) = -0.55$ (рис. 4). Приближенное значение Π_{ent} , которое дает выражение (20), равно $\Pi_{ent} = -0.5$, т.е. достаточно близко к величине, которую дает нам точное решение. Аналогичные вычисления мы могли бы проделать и в ранее рассмотренных случаях, но они были бы менее наглядны.

Поэтому отклонение безразмерного давления, рассчитанное с использованием выражения для стабилизированного течения с входной поправкой (21), отличается за пределами начального гидродинамического участка от величин, полученных по зависимости (6), не более, чем на 7 %, а при $\xi > 3$ не более, чем на 2 % (рис. 4).

При увеличении числа R до 10 характер распределения безразмерного давления, рассчитанного с учетом начального гидродинамического участка (6), изменится. В рассматриваемом случае существует два участка, в пределах которых преобладают диссипативные силы, т.е. силы трения, и здесь жидкость течет в направлении уменьшения безразмерного давления (рис. 5). Существует также и участок с преобладанием характерной инерционной силы. На этом участке жидкость течет в сторону увеличения давления. Поэтому на некотором расстоянии от входа в канал безразмерное давление становится больше 0. Достигнув максимума, оно начинает уменьшаться и опять достигает 0. Вследствие этого для оценки аппроксимации зависимости (6) зависимостью (21) мы не можем использовать относительное отклонение (21) от (6), поскольку при приближении (6) к 0 относительное отклонение будет стремиться к бесконечности. В данном

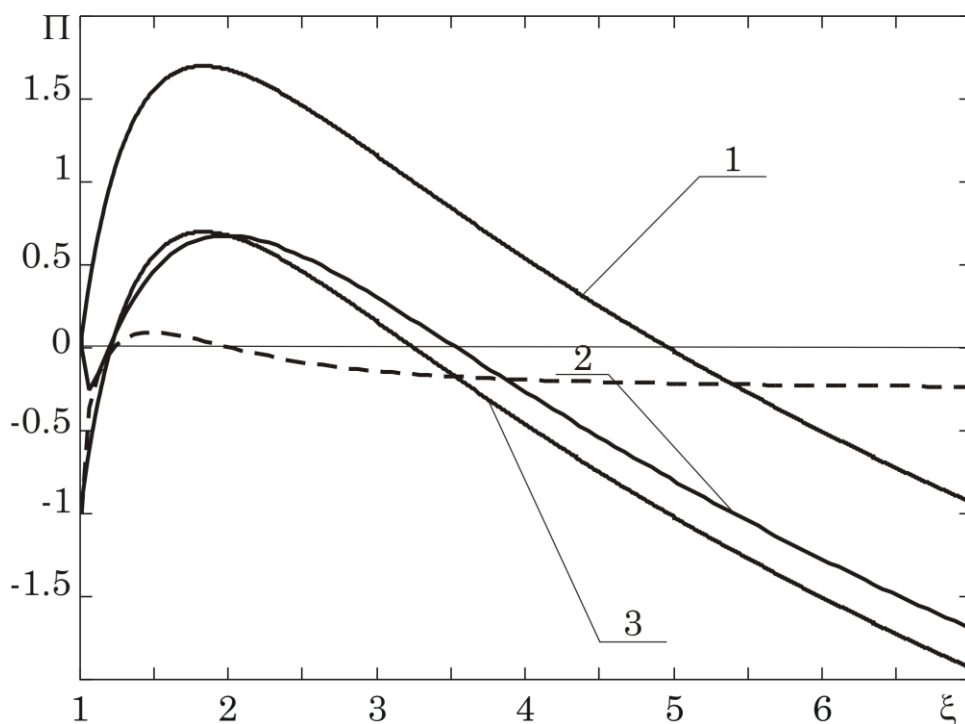


Рисунок 5 – Сравнение распределения безразмерного давления при ламинарном течении в секториальном диффузоре постоянной ширины при числе $R = 10$: 1 – распределение безразмерного давления в случае стабилизированного течения, вычисленного с учетом характерной инерционной силы [2] в безразмерных переменных, использующихся в настоящей работе (1) (первые два члена (6)); 2 – распределение (6); 3 – приближение с использованием поправочного члена для учета входного эффекта (21); штриховая линия – разность между 3 и 2

случае мы используем для оценки аппроксимации абсолютную разность (21) и (6).

В рассматриваемом случае безразмерная координата стабилизации течения равна 2.79, а разность безразмерных давлений, вычисленных по выражению (6) и по формуле для стабилизированного течения [7] в переменных (1), равна $\Pi(\xi_{н.г}) - \Pi_{ст}(\xi_{н.г}) = -0.88$. Входная поправка в данном случае равна $\Pi_{ent} = -1$. Разность между вычисленными нами значениями поправки еще приемлема для оценок, а выражение (21) еще достаточно хорошо приближает зависимость (6), но как видно из последних рисунков с увеличением параметра R это приближение ухудшается.

Поэтому найдем для (6) приближение, которое работало при больших значениях R . Далее при анализе будем считать, что безразмерная координата стабилизации течения определяется соотношением (5).

Для нахождения входовой поправки Π_{ent} при больших значениях R вновь рассмотрим определение (8). В данном случае аргументы интегральных показательных функций, входящих в выражение для $I(\xi)$, можно считать малыми и тогда показательная функция может быть представлена в виде [10]:

$$Ei^*(x) = Ei(-x) = \ln \gamma x, \quad (22)$$

где $\gamma = 1.781$ – постоянная Эйлера.

Подставляя определения (22) в (9), получим для $I(\xi)$ выражение:

$$I(\xi) = -\frac{2}{3} \xi^2 e^{-\frac{v_1^2 \xi^2}{3R}} \left(\ln \gamma \frac{v_1^2}{6R} |3 - \xi^2| - \ln \gamma \frac{v_1^2 \xi^2}{3R} \right) = -\frac{2}{3} \xi^2 e^{-\frac{v_1^2 \xi^2}{3R}} \ln \frac{|3 - \xi^2|}{2\xi^2}, \quad (23)$$

и тогда (8) примет вид:

$$\Pi_{ent} = -\frac{2}{3} \int_1^{\xi_{н.г}} \left\{ \xi^2 \exp\left(-\frac{v_1^2 \xi^2}{3R}\right) \ln \frac{|3 - \xi^2|}{2\xi^2} - 2 \exp\left[\frac{v_1^2 (\xi^2 - 1)}{2R}\right] \right\} d\xi. \quad (24)$$

Упрощение и интегрирование (24) в пределах от 1 до $1.354 \sqrt{R}$ приводит к достаточно громоздкому выражению, в котором присутствуют конкурирующие члены, пропорциональные различным степеням R выше 1 и их произведениям с $\ln R$, но основной вклад в формирование Π_{ent} при больших значениях параметра R вносят члены, пропорциональные \sqrt{R} . Поэтому мы выберем зависимость

$$\Pi_{ent}(R) = K \sqrt{R}, \quad (25)$$

и с помощью численных экспериментов и их статистической обработки определим коэффициент пропорциональности K .

В результате проведенного анализа получаем для K значение $K = -0.4$ и для определения входовой поправки при больших величинах R выражение:

$$\Pi_{ent}(R) = -0.4 \sqrt{R}. \quad (26)$$

И окончательно можем записать выражение, с помощью которого можно оценить распределение безразмерного давления за пределами начального гидродинамиче-

ского участка при ламинарном диффузорном течении ньютоновской жидкости в секториальном канале постоянной ширины:

$$\Pi(\xi) = -0.4\sqrt{R} + \frac{R}{2} \left(1 - \frac{1}{\xi^2} \right) - 3 \ln \xi. \quad (27)$$

Определим более точно интервал изменения параметра R , в котором необходимо использовать для вычисления безразмерного давления выражение (21), и интервал в котором выражение (27).

Мы уже видели, что выражение (21) достаточно хорошо описывает распределение безразмерного давления за пределами начального гидродинамического участка в интервале изменения R от 0 до 10. Увеличим R до 12 и определим точное значение Π_{ent} на выходе из начального гидродинамического участка, т.е. в данном случае на безразмерной координате $\xi_{н.г} = 3.148$. $\Pi(\xi_{н.г}) - \Pi_{ст}(\xi_{н.г}) = -1.0$, выражение (20) дает величину $\Pi_{ent} = -1.2$, а выражение (26) дает величину $\Pi_{ent} = -1.4$, т.е. при $R = 12$ определение (20) более точно, поэтому и приближение (21) в рассматриваемом случае несколько лучше аппроксимирует зависимость (6), чем приближение (27) (рис. 6).

Сравнивая определения для входových поправок давления при малых R (20) и при больших R (26) мы можем определить значения R , при котором оба приближения (21) и

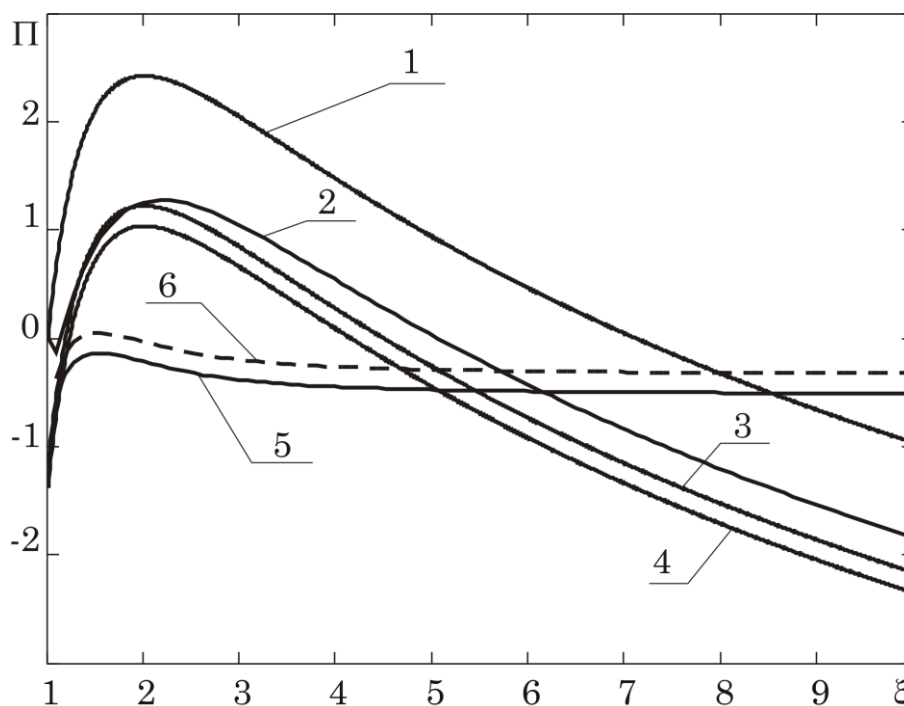


Рисунок 6 – Сравнение распределения безразмерного давления при ламинарном течении в секториальном диффузоре постоянной ширины при числе $R = 12$: 1 – распределение безразмерного давления в случае стабилизированного течения, вычисленного с учетом характерной инерционной силы [2] в безразмерных переменных, использующихся в настоящей работе (1) (первые два члена (6)); 2 – распределение (6); 3 – приближение с использованием поправочного члена для учета входового эффекта (21); 4 – распределение приближения с использованием поправочного члена в предположении больших значений R (27); 5 – разность между зависимостями 4 и 2; 6 – разность между зависимостями 3 и 2

(27) будут давать одинаковые приближения зависимости (6). Действительно, приравняв (20) и (26), получим $R = 16$.

При $R = 16$ участок гидродинамической стабилизации распространяется до значения безразмерной координаты $\xi_{н.г} = 3.86$. Точное значение Π_{ent} равно $\Pi(\xi_{н.г}) - \Pi_{ст}(\xi_{н.г}) = -1.2$, а приближенные выражения дают величину $\Pi_{ent} = -1.6$.

В этом случае наблюдается достаточно большое отклонение между зависимостью (6) и выражениями, ее аппроксимирующими (21) и (27) (рис. 7). Для улучшения аппроксимации в данном случае можно порекомендовать увеличить входовую поправку Π_{ent} на 0.5, т.е. при $R \approx 16$ для входовой поправки использовать определение

$$\Pi_{ent} = -0.1R + 0.5, \quad (28)$$

и, следовательно, для расчета давления за пределами участка стабилизации использовать выражение:

$$\Pi(\xi) = 0.5 - 0.1R + \frac{R}{2} \left(1 - \frac{1}{\xi^2} \right) - 3 \ln \xi. \quad (29)$$

За пределами начального гидродинамического участка зависимость (29) практически совпадает с зависимостью (6) (рис. 7).

Увеличим число R до 25. В этом случае безразмерная длина начального гидродинамического участка равна $\Delta\xi_{н.г} = 4.475$, т.е. безразмерная координата стабилизации течения будет равна $\xi_{н.г} = 5.475$, а точное значение входовой поправки составит величину $\Pi_{ent} = -1.62$. Приближенное выражение для Π_{ent} (20) дает величину поправки, равную $\Pi_{ent} = -2.5$, а выражение (26) величину $\Pi_{ent} = -2$. Это означает, что зависимость (27) должна точнее аппроксимировать распределение безразмерного давления (6).

Действительно, на рисунке 8 мы видим, что выражение (27) дает лучшее приближение. В данном случае при $R = 25$ характерная инерционная сила намного превосходит диссипативные силы в начале течения, поэтому давление здесь увеличивается на значительную величину такую, что в дальнейшем течении с преобладающими силами трения безразмерное давление в канале не снижается до 0. Поэтому в данном случае мы можем оценить приближение с помощью относительного отклонения (27) от (6) (рис. 9). Мы видим, что относительное отклонение (27) от (6) в рассматриваемом канале практически не превосходит 10 %, и даже в пределах начального гидродинамического участка не превосходит 7 %.

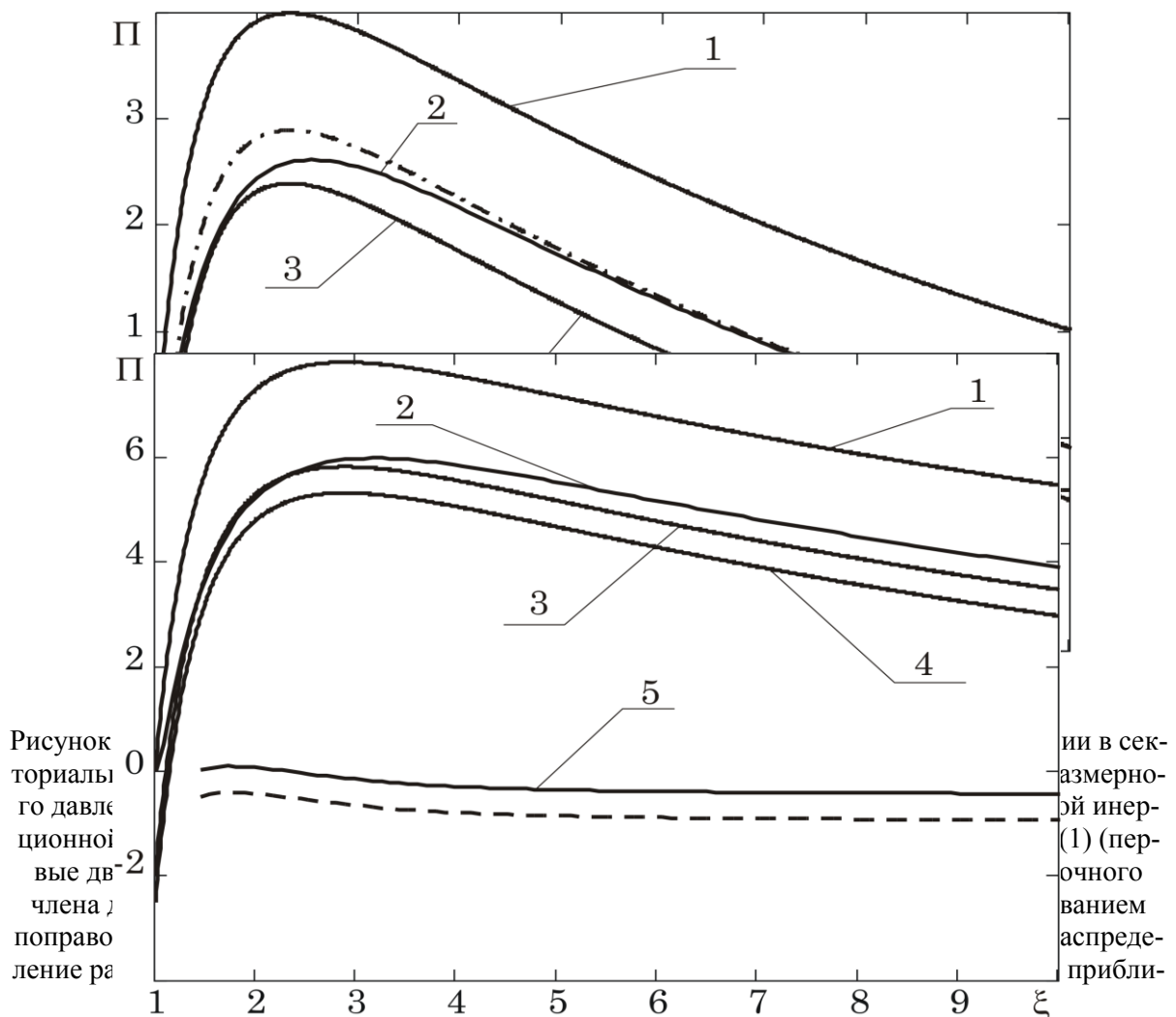


Рисунок 8 – Сравнение распределения безразмерного давления при ламинарном течении в секторальном диффузоре постоянной ширины при числе $R = 25$: 1 – распределение безразмерного давления в случае стабилизированного течения, вычисленного с учетом характерной инерционной силы [2] в безразмерных переменных, использующихся в настоящей работе (1) (первые два члена (6)); 2 – распределение (6); 3 – приближение с использованием поправочного члена для учета входового эффекта (27); 4 – распределение приближения с использованием поправочного члена в (21); 5 – разность между зависимостями 3 и 2; штриховая линия – разность между зависимостями 4 и 2

Рисунок 8 – Сравнение распределения безразмерного давления при ламинарном течении в секторальном диффузоре постоянной ширины при числе $R = 25$: 1 – распределение безразмерного давления в случае стабилизированного течения, вычисленного с учетом характерной инерционной силы [2] в безразмерных переменных, использующихся в настоящей работе (1) (первые два члена (6)); 2 – распределение (6); 3 – приближение с использованием поправочного члена для учета входового эффекта (27); 4 – распределение приближения с использованием поправочного члена в (21); 5 – разность между зависимостями 3 и 2; штриховая линия – разность между зависимостями 4 и 2

Увеличим число R до 50, в этом случае безразмерная координата стабилизации течения составляет величину $\xi_{н.г} = 9.95$, поэтому для сравнения приближений с точным

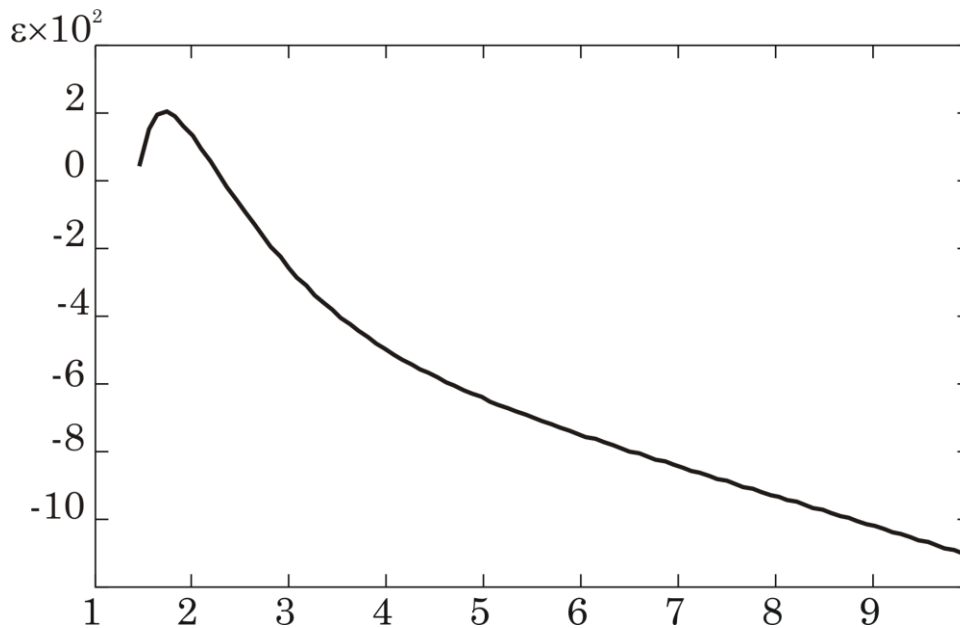


Рисунок 9 – Распределение относительного отклонения безразмерного давления, вычисленного с помощью выражения (27), от зависимости (6)

решением мы увеличим радиальную длину канала до 20. Точное значение безразмерной входовой поправки $\Pi_{ent} = -2.6$, а значение, которое дает (26), равно -2.8 , т.е. достаточно близкое к точному значению, в то время как определение (20) дает величину, равную -5 .

В данном случае, т.е. при $R = 50$, приближение (27) очень мало отличается от зависимости (6) (рис. 10). Относительное отклонение (27) от (6) за пределами начального гидродинамического участка не превышает 2 %, а в пределах практически всего канала не превышает 4 % (рис. 10).

Итак, мы можем заключить, что для оценки безразмерного давления при наличии в ламинарном диффузорном течении в секториальном канале постоянной ширины начального гидродинамического участка можно использовать выражение:

$$\Pi(\xi) = \Pi_{ent} + \frac{R}{2} \left(1 - \frac{1}{\xi^2} \right) - 3 \ln \xi, \quad (30)$$

где безразмерная входовая поправка определяется соотношениями:

$$\Pi_{ent} = -0.1R, \quad R \leq 15, \quad (31)$$

$$\Pi_{ent} = -0.4\sqrt{R}, \quad R \geq 17, \quad (32)$$

$$\Pi_{ent} = 0.5 - 0.1R, \quad 15 \leq R \leq 17. \quad (33)$$

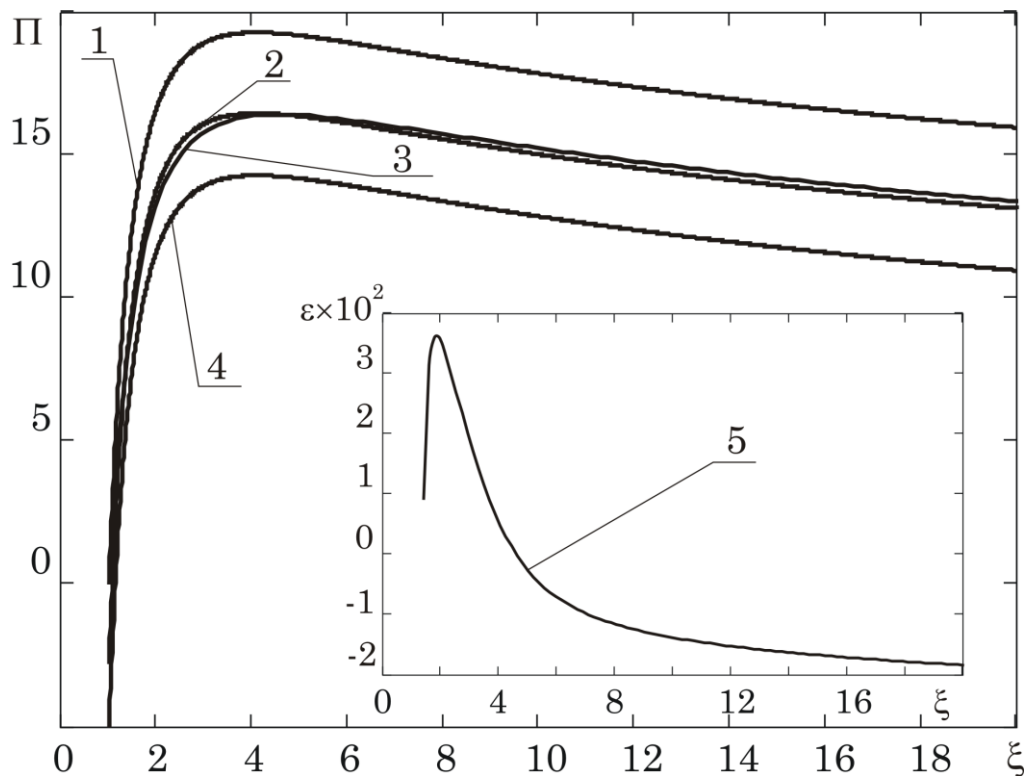


Рисунок 10 – Сравнение распределения безразмерного давления при ламинарном течении в секториальном диффузоре постоянной ширины при числе $R = 50$: 1 – распределение безразмерного давления в случае стабилизированного течения, вычисленного с учетом характерной инерционной силы [2] в безразмерных переменных, использующихся в настоящей статье (1) (первые два члена (6)); 2 – приближение с использованием поправочного члена для учета входного эффекта (26); 3 – распределение (6); 4 – распределение приближения с использованием поправочного члена для учета входного эффекта (20); 5 – разность между зависимостями 4 и 2; 6 – разность между зависимостями 2 и 3

Запишем полученные нами приближения (30)–(33) с учетом определения параметра R :

$$R = \frac{\rho h Q}{8\pi\mu r_0^2 \sin \alpha}, \tag{34}$$

также и в размерном виде:

$$\Delta P = \Delta P_{ent} + \frac{\rho Q^2}{8\pi^2 h^2 r_0^2 \sin^2 \alpha} \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) - \frac{6\mu Q}{\pi h^3 \sin \alpha} \ln \frac{r}{r_0}, \tag{35}$$

где

$$\Delta P_{ent} = -0.025 \frac{\rho Q^2}{\pi^2 h^2 r_0^2 \sin^2 \alpha}, \text{ Re} \leq 15 \frac{r_0}{h}, \tag{36}$$

$$\Delta P_{ent} = -0.4 \frac{\mu Q}{\pi h^2 r_0 \sin \alpha} \sqrt{\frac{\rho Q}{2\pi\mu h \sin \alpha}}, \text{ Re} \geq 17 \frac{r_0}{h}, \tag{37}$$

$$\Delta P_{ent} = -0.025 \frac{\rho Q^2}{\pi^2 h^2 r_0^2 \sin^2 \alpha} + \frac{\mu Q}{\pi h^3 \sin \alpha}, \quad 15 \frac{r_0}{h} \leq Re \leq 17 \frac{r_0}{h}. \quad (38)$$

В выражениях (36)–(38) использовано безразмерное число Рейнольдса – Re, определенное в работе [7], которое в принятых обозначениях запишется как:

$$Re = \frac{\rho V_0 h}{\mu}. \quad (39)$$

Заключение

В работе получены математические выражения для определения входных потерь давления и выражения для приближенного вычисления распределения перепада давления вдоль ламинарного диффузорного течения в соосных конических и в плоских секториальных каналах постоянной ширины с учетом начального гидродинамического участка. Найденные выражения являются простыми и удобными для использования в технических расчетах.

Обозначения: h – ширина соосного конического канала, м; P_0, P – давление на входе в канал и текущее давление, Па; Q – объемный расход жидкости, м³/с; R_0, R_1 – значения радиальных координат входа в соосный конический канал и выхода из него, м; r – радиальная координата в цилиндрической системе координат, м; r_0, r_1 – значения радиальных координат входа в секториальный канал и выхода из него, м; V_r – радиальная составляющая размерной скорости в цилиндрической системе координат, м/с; V_0 – средняя по поперечному сечению размерная скорость на входе в канал, м/с; z – аксиальная координата в цилиндрической системе координат, м; α – половина угла раскрытия конических поверхностей, образующих границы канала, рад; μ – коэффициент динамической вязкости жидкости, Па·с; ρ – плотность жидкости, кг/м³; $\xi_{н.г.}$ – безразмерная радиальная координата, ограничивающая длину начального гидродинамического участка; $\Delta \xi_{н.г.}$ – безразмерная длина начального гидродинамического участка;

$R = \frac{\rho V_0 h^2}{4\mu r_0}$ – безразмерный параметр, определяющий решение задачи.

Литература

1. Ульев Л.М. Развитие ламинарного диффузионного течения в соосных конических каналах постоянной ширины // Интегровані технології та енергозбереження. 2003, № 2. С. 47–57.
2. Ульев Л.М. Длина начального гидродинамического участка при ламинарном диффузорном течении в соосных конических каналах постоянной ширины // Интегровані технології та енергозбереження. 2003, №4. С. 56–64.
3. Ульев Л.М. Влияние кривизны границ на ламинарное установившееся течение в кольцевом коническом канале постоянной ширины // Интегровані технології та енергозбереження. 2001. № 1. С. 34–44.
4. Ulyev L.M. Solution of Slow Steady State Flow Problem in a Coustant Width of Channel with Taking into Account Curvature Distinction of its Boundaries // Materials of the 15h International Congress of Chemical and Process Engineering. CHISA'2002, 25–30 Au-

gust 2002. Praha, Czech Republic. Summaries 3. Fluid Multiphase System. Praha. 2002. P. 178 – 179. (paper No. P5.105. P. 11).

5. Ульев Л.М. Течение и теплообмен в кольцевых конических каналах. Аппроксимация плоским каналом // Интегровані технології та енергозбереження. 2000. № 2. С. 55–64.

6. Ульев Л.М. Решение задачи ламинарного диффузорного течения в соосном коническом канале постоянной ширины с частичным учетом инерционных свойств // Вестник НТУ «ХПИ». 2002. Т. 1. № 6. С. 66–71.

7. Ульев Л.М. Ламинарное диффузорное течение в секториальном канале постоянной ширины с частичным учетом инерциальных свойств // Вестник НТУ «ХПИ». 2003. Вып. 11. Т.2. С. 122–131.

8. Петухов Б.С. Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. – М.: Энергия. 1967. – 412 с.

9. Мак-Келви Д.М. Переработка полимеров. – М.: Химия. 1965. – 443 с.

10. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. – М.: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит. 1968. – 344 с.

11. Никифоров А.В., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики. – М.: Наука. 1979. – 320 с.

12. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. – М.: Наука. 1977. – 224 с.

УДК 532.5; 678.027

Ульев Л.М.

ОЦІНКА ПЕРЕПАДУ ТИСКУ НА ПОЧАТКОВІЙ ГІДРОДИНАМІЧНІЙ ДІЛЯНЦІ ЛАМІНАРНОЇ ТЕЧІЇ В СПІВВІСНОМУ КОНІЧНОМУ ДИФУЗОРИ

У роботі отримані математичні вирази для визначення вхідних виправлень і наближених виразів для обчислення розподілу тиску при ламінарної дифузорової течії в співвісних конічних та й у плоских секторіальних каналах сталої ширини з обліком початкової гідродинамічної ділянки. Знайдені вирази є простими й зручними для використання в технічних розрахунках.