

Кузяев И.М., Сытар В.И., Лободенко А.В.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ В КОЛЬЦЕВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТАХ

Во многих отраслях промышленности приходится иметь дело с кольцевыми цилиндрическими элементами, на которые воздействуют температурные поля в результате протекания тех или иных технологических процессов. При этом может происходить как их нагревание, так охлаждение. В качестве примеров функционирования таких объектов можно выделить следующие: охлаждение трубных заготовок; работа подшипников скольжения; охлаждение рукавных пленок; течение жидких сред в кольцевых каналах с учетом теплообмена и т.д.

В качестве обобщенной расчетной схемы можно взять трехслойный кольцевой элемент, как показано на рис. 1. При этом температурный процесс будет рассматриваться в цилиндрической системе координат.

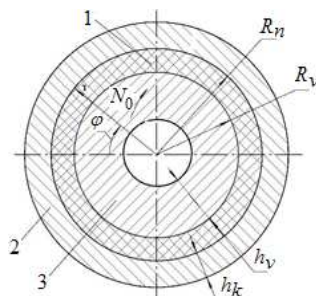


Рисунок 1 – Расчетная схема для моделирования температурных процессов в кольцевых цилиндрических элементах

В качестве примера рассмотрим охлаждение полимерной трубы, получаемой методом экструзии. При этом позиция 1 представляет собой непосредственно полимерную трубу, а позиции 2 и 3 будут соответствовать корпусу и дорну калибрующего устройства.

Принимая допущение о том, что градиент температуры вдоль радиальной координаты намного больше, чем вдоль осевой координаты, а также, предполагая соблюдение симметричности теплового поля вдоль угловой координаты, уравнение теплового баланса для элемента 1 может быть представлено таким образом

$$\rho \cdot C_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \cdot \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \right), \tag{1}$$

где  $\rho$  – плотность материала трубы;  $C_p, \lambda$  – соответственно коэффициенты теплоемкости и теплопроводности полимерного материала.

Если воспользоваться зависимостью времени от осевой координаты в виде  $t = z/V_z$  (где  $V_z$  – скорость движения трубы), то уравнение (1) может быть переписано таким образом

$$\rho \cdot C_p \cdot V_z \cdot \frac{\partial T}{\partial z} = \lambda \cdot \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \right). \tag{2}$$

В данном случае процессами теплообмена в элементах 2 и 3 будем пренебрегать.

Для решения уравнения (1) или (2) необходимо иметь два граничных условия относительно оси  $r$  и одно начальное условие по времени  $t$  для уравнения (1) или по координате  $z$  для уравнения (2). При этом граничные условия следует выбирать в зависимости от типа граничных температурных условий (первого, второго, третьего или четвертого рода).

Для решения уравнения (2) воспользуемся граничными условиями первого рода, а именно

$$T(y, z) = T_n \text{ при } r = R_n; \quad T(y, z) = T_v \text{ при } r = R_v, \tag{3}$$

где  $T_n$  – температура внешней поверхности трубы;  $T_v$  – температура внутренней поверхности трубы.  
Начальное условие для уравнения (2) запишется так

$$T(y, z) = T_p \quad \text{при} \quad z = 0. \quad (4)$$

При решении уравнения (2) воспользуемся интегральным преобразованием Лапласа по координате  $z$  [1, 2]. Тогда операторный аналог запишется так

$$\frac{d^2 T^L}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dT^L}{dr} - \frac{s}{a_z} \cdot T^L = -\frac{T_p}{a_z}, \quad (5)$$

где  $T^L$  – изображение температуры  $T$ ;  $s$  – переменная Лапласа;  $a_z = \rho \cdot C_p \cdot V_z / \lambda$ .

Решение уравнения (5) имеет вид [3]

$$T^L = \frac{T_p}{s} + C_1 \cdot J_0 \left( \sqrt{\frac{s}{a_z}} \cdot i \cdot r \right) + C_2 \cdot Y_0 \left( \sqrt{\frac{s}{a_z}} \cdot i \cdot r \right), \quad (6)$$

где  $J_0, Y_0$  – функции Бесселя соответственно первого и второго рода нулевого порядка;  $i$  – мнимая единица;  $C_1, C_2$  – постоянные интегрирования.

Операторный аналог граничных условий (3) запишется так

$$T^L = T_n/s \quad \text{при} \quad r = R_n; \quad T^L = T_v/s \quad \text{при} \quad r = R_v. \quad (7)$$

Подставив граничные условия (7) в уравнение (6) и определив постоянные интегрирования, получим уравнение для температуры в изображениях

$$T^L = \frac{T_p}{s} + \frac{(T_n - T_p) \cdot A1(s, r)}{s \cdot B(s)} + \frac{(T_v - T_p) \cdot A2(s, r)}{s \cdot B(s)}, \quad (8)$$

где  $B(s) = J_0(Ar_n) \cdot Y_0(Ar_v) - J_0(Ar_v) \cdot Y_0(Ar_n)$ ;

$A1(s, r) = J_0(Ar_n) \cdot Y_0(Ar_r) - Y_0(Ar_n) \cdot J_0(Ar_r)$ ;

$A2(s, r) = Y_0(Ar_v) \cdot J_0(Ar_r) - J_0(Ar_v) \cdot Y_0(Ar_r)$ ;

$s_z = \sqrt{s/a_z}$ ;  $Ar_n = s_z \cdot i \cdot R_n$ ;  $Ar_v = s_z \cdot i \cdot R_v$ ;  $Ar_r = s_z \cdot i \cdot r$ .

Чтобы перейти к оригиналу выражения (8), необходимо найти оригиналы каждого из членов в его правой части. Для первого члену переход от изображения к оригиналу имеет вид

$$\frac{T_p}{s} \rightarrow T_p. \quad (9)$$

Оригиналы для второго и третьего членов можно получить, если использовать вторую теорему разложения и теорему об интегрировании оригинала [2].

Окончательно для распределения температурного поля в трубе можно записать следующее выражение

$$T(r, z) = T_p - 2 \cdot R_{cp} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(T_n - T_p) \cdot A1_k(r) + (T_v - T_p) \cdot A2_k(r)}{P_k \cdot Z_k} \cdot [1 - \exp(-s_k \cdot z)], \quad (10)$$

где

$$A1_k(r) = J_0(bn_k) \cdot Y_0(br_k) - Y_0(bn_k) \cdot J_0(br_k);$$

$$\begin{aligned}
 A2_k(r) &= Y_0(bv_k) \cdot J_0(br_k) - J_0(bv_k) \cdot Y_0(br_k); \\
 Z_k &= -J_1(bn_k) \cdot Y_0(bv_k) \cdot R_n - J_0(bn_k) \cdot Y_1(bv_k) \cdot R_v + \\
 &+ J_1(bv_k) \cdot Y_0(bn_k) \cdot R_v + J_0(bv_k) \cdot Y_1(bn_k) \cdot R_n; \\
 bn_k &= P_k \cdot \frac{R_n}{R_{cp}}; \quad bv_k = P_k \cdot \frac{R_v}{R_{cp}}; \quad br_k = P_k \cdot \frac{r}{R_{cp}}.
 \end{aligned}$$

В последние выражения входит величина  $P_k$ , которая представляет собой нули для  $B(s)$  из выражения (8), а величина  $R_{cp}$  соответствует среднему радиусу элемента 1 по рис. 1.

По разработанной математической модели процесса охлаждения полимерной трубы разработан программный модуль на базе пакета MathCad.

На рис. 2 приведены результаты расчета по формуле (10) с использованием программного модуля для таких параметров:  $\lambda = 0,135$  Дж/(м·с·К);  $\rho = 810$  кг/м<sup>3</sup>;  $C_p = 2,2$  кДж/(кг·К);  $V_z = 0,02$  м/с;  $R_n = 47,5$  мм;  $R_v = 40$  мм;  $T_n = 303$  К;  $T_v = 318$  К;  $T_p = 443$  К.

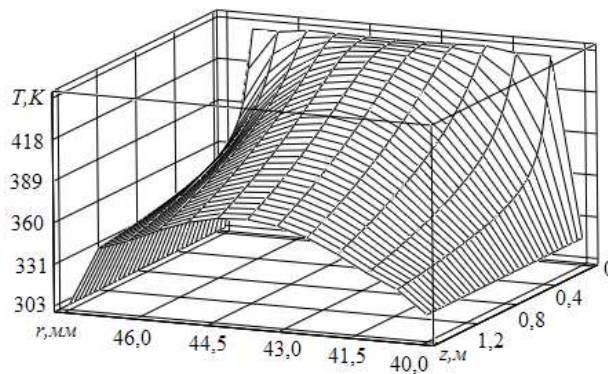


Рисунок 2 – Результаты расчета температурного поля при охлаждении полимерной трубы

Рассмотрим далее теплообмен во вкладыше (втулке) подшипника скольжения, для которого также справедлива расчетная схема согласно с рис. 1.

В данном случае используем уравнение (1).

Для втулки 1 на внутренней границе, вследствие наличия сил трения между ней и валом 3, следует принять температурное условие второго рода, которое можно представить следующим образом

$$\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial r} = q_v \quad \text{при } r = R_v. \quad (11)$$

На наружной границе втулки 1 будем иметь

$$\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial r} = q_n \quad \text{при } r = R_n. \quad (12)$$

В два последних выражения введены такие величины:  $q_v$  – тепловой поток на границе раздела элементов 1 и 3;  $q_n$  – тепловой поток на границе раздела элементов 1 и 2.

Для определения тепловых потоков можно записать такие выражения

$$q_v = V_c \cdot f_v \cdot \Pi_k - \frac{\lambda_3}{h_v} \cdot [T(R_v, t) - T(R_v - h_v, t)]; \quad (13)$$

$$q_n = -\frac{\lambda_2}{h_v} \cdot [T(R_n, t) - T(R_v + h_c, t)], \quad (14)$$

где  $f_v$  – коэффициент трения между втулкой и поверхностью вала;  $\Pi_k$  – давление, развиваемое на границе контакта;  $\lambda_3$  – коэффициент теплопроводности для элемента 3 на рис. 1;  $\lambda_2$  – коэффициент теплопроводности для элемента 2 на рис. 1.

Для решения уравнения (1) опять воспользуемся интегральным преобразованием Лапласа [1, 2] с тем лишь различием, что выполним преобразование Лапласа по времени  $t$ . При этом операторный аналог будет иметь практически такой же вид, как и выражение (5). Отличие будет лишь в том, что вместо величины  $a_z$  следует подставить коэффициент температуропроводности  $a_T$  ( $a_T = \rho \cdot C_p / \lambda$ ). Тогда и решение будет совпадать с выражением (6), но, опять же, с заменой  $a_z$  на  $a_T$ .

Чтобы определить константы интегрирования, следует записать граничные условия в операторном виде для выражений (11) и (12)

$$\lambda_1 \cdot \frac{dT_1^L}{dr} = \frac{q_v}{s} \text{ при } r = R_v; \quad (15)$$

$$\lambda_1 \cdot \frac{dT_1^L}{dr} = \frac{q_n}{s} \text{ при } r = R_n. \quad (16)$$

После подстановки граничных условий в операторном виде (15) и (16) в выражение (6) находим константы интегрирования, с учетом которых соотношение для распределения температуры во втулке 1 в изображении запишется так

$$T^L = \frac{T_p}{s} + \frac{K_{nr} + K_{vr}}{K_{nv}}, \quad (17)$$

где  $K_{nr} = q_v \cdot [J_1(ar_n) \cdot Y_0(ar_v) - Y_1(ar_n) \cdot J_0(ar_v)]$ ;

$K_{vr} = q_n \cdot [Y_1(ar_v) \cdot J_0(ar_v) - J_1(ar_v) \cdot Y_0(ar_v)]$ ;

$K_{nv} = s \cdot \lambda \cdot i \cdot s_a \cdot [Y_1(ar_n) \cdot J_1(ar_v) - Y_1(ar_v) \cdot J_1(ar_n)]$ ;

$s_a = \sqrt{s/a_T}$ ;  $ar_n = s_a \cdot i \cdot R_n$ ;  $ar_v = s_a \cdot i \cdot R_v$ ;  $ar_r = s_a \cdot i \cdot r$ .

Используя методику, аналогичную той, с помощью которой получен оригинал распределения температурного поля при охлаждении полимерной трубы, то есть уравнение (10), окончательно оригинал для выражения (17) будет иметь вид

$$T_1(r, t) = T_p - \frac{2 \cdot R_v}{\lambda} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Av_k(r) + An_k(r)}{2 \cdot P_k \cdot B1_k - P_k^2 \cdot B2_k} \cdot f_k(t), \quad (18)$$

где

$Av_k(r) = q_v \cdot [J_1(\psi_{nv}) \cdot Y_0(\psi_{rv}) - Y_1(\psi_{nv}) \cdot J_0(\psi_{rv})]$ ;

$An_k(r) = q_n \cdot [Y_1(P_k) \cdot J_0(\psi_{rv}) - J_1(P_k) \cdot Y_0(\psi_{rv})]$ ;

$f_k(t) = Kt_k \cdot t - [1 - \exp(-Kt_k \cdot t)]$ ;

$B1_k = Y_1(\psi_{nv}) \cdot J_1(P_k) - Y_1(P_k) \cdot J_1(\psi_{nv})$ ;

$B2_k = R_{nv} \cdot [Y_0(\psi_{nv}) \cdot J_1(P_k) - Y_1(P_k) \cdot J_0(\psi_{nv})] + Y_1(\psi_{nv}) \cdot J_0(P_k) - Y_0(P_k) \cdot J_1(\psi_{nv})$ ;

$\psi_{rv} = (P_k \cdot r / R_v)$ ;  $\psi_{nv} = (P_k \cdot R_n / R_v)$ ;  $R_{nv} = R_n / R_v$ .

Величина  $P_k$ , входящая в последние выражения, представляет нули для выражения

$$Y_1(ar_n) \cdot J_1(ar_v) - Y_1(ar_v) \cdot J_1(ar_n) = 0. \quad (19)$$

Полюсы для равенства (19) определяются из выражения  $s_k = (a_T \cdot P_k^2) / (R_v \cdot i)^2$ .

По разработанной математической модели для анализа распределения температурного поля во вкладышах подшипников скольжения разработан программный модуль на базе пакета MathCad.

Моделирование тепловых процессов в кольцевых цилиндрических элементах также можно найти в работах [4–9].

#### Литература

1. Лаврентьев М.А. Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М.: Наука, 1973. – 736 с.
2. Диткин В.А. Интегральные преобразования и операционное исчисление / В.А. Диткин, А.П. Прудников. – М.: Наука., 1974. – 544 с.
3. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Камке Э.; пер. с нем. С. Ф. Фомина. – М.: Наука, 1976. – 576 с.
4. Кузьяев И.М. Математическое моделирование процессов в зоне дозирования одночервячных машин / И.М. Кузьяев // Вопросы химии и химической технологии. – 2007. – № 3. – С. 151–172.
5. Кузьяев И.М. Интенсификация процессов теплопереноса в рабочем канале червячных машин при переработке нефтяных полимерных жидкостей / И.М. Кузьяев // Промышленная теплотехника. – 2004. – Т. 26, №1. – С. 25–31.
6. Исследование с помощью математических моделей неизоотермических процессов в рабочем объеме червячных машин для термопластичных полимерных композитов с учетом кривизны винтового канала / И.М. Кузьяев, В.И. Сытар, Д.С. Данилин, С.И. Кузьяева // Вопросы химии и химической технологии. – 2005. – № 6. – С. 183–189.
7. Кузьяев И.М. Анализ температурных процессов в подшипниках скольжения с учетом трения / И.М. Кузьяев, В.Н. Анисимов // Проблемы трибологии (Problems of Tribology). – 2012. – № 1. – С. 27–40.
8. Кузьяев И.М. Моделювання роботи та проектування екструзійних агрегатів з розробкою елементів САПР / І.М. Кузьяев. – 2008, Дніпропетровськ, ДВНЗ УДХТУ, – 474 с.
9. Кузьяев И.М. Розрахунок температурних полів при охолодженні трубних елементів у робочих об'ємах хімічного й теплоенергетичного обладнання / І.М. Кузьяев, І.П. Казіміров, С.С. Беліменко // Вопр. химии и хим. технологии. – 2012. – № 1. – С. 187–192.

#### Bibliography (transliterated)

1. Lavrent'ev M.A. Metody teorii funkciy kompleksnogo peremennogo / M.A. Lavrent'ev, B.V. Shabat. – M.: Nauka, 1973. – 736 p.
2. Ditkin V.A. Integral'nye preobrazovaniya i operacionnoe ischislenie / V.A. Ditkin, A.P. Prudnikov. – M.: Nauka., 1974. – 544 p.
3. Kamke Je. Spravochnik po obyknovennym differencial'nym uravnenijam / Kamke Je.; per. s nem. S. F. Fomina. – M.: Nauka, 1976. – 576 p.
4. Kuzjaev I.M. Matematicheskoe modelirovanie processov v zone dozirovaniya odnochervjachnyh mashin / I.M. Kuzjaev // Voprosy himii i himicheskoy tehnologii. – 2007. – # 3. – p. 151–172.
5. Kuzjaev I.M. Intensifikacija processov teplomassoperenosa v rabochem kanale chervjachnyh mashin pri pererabotke nen'jutonovskih polimernyh zhidkostej / I.M. Kuzjaev // Promyshlennaja teplotehnika. – 2004. – T. 26, #1. – p. 25–31.
6. Issledovanie s pomoshh'ju matematicheskikh modelej neizotermicheskikh processov v rabochem ob'eme chervjachnyh mashin dlja termoplastichnyh polimernyh kompozitov s uchetoм kрivizny vintovogo kanala / I.M. Kuzjaev, V.I. Sytar, D.S. Danilin, S.I. Kuzjaeva // Voprosy himii i himicheskoy tehnologii. – 2005. – # 6. – p. 183–189.
7. Kuzjaev I.M. Analiz temperaturnyh processov v podshipnikah skol'zhenija s uchetoм trenija / I.M. Kuzjaev, V.N. Anisimov // Problemi tribologii (Problems of Tribology). – 2012. – # 1. – p. 27–40.
8. Kuzjaev I.M. Modeljuvannja roboti ta proektuvannja ekstрузійних агрегатів з розробкою елементів САПР / І.М. Кузьяев. – 2008, Dnipropetrovs'k, DVNZ UDHTU, – 474 p.
9. Kuzjaev I.M. Rozrahunok temperaturnih poliv pri oholodzhenni trubnih elementiv u robochih ob'emah himichnogo j теплоенергетичного облданнaja / І.М. Кузьяев, І.П. Kazimirov, S.S. Belimenko // Vopr. himii i

him. tehnologii. – 2012. – # 1. – p. 187–192.

УДК 536.24:621.791.55

Кузяєв І.М., Ситар В.І. Лободенко А.В.

**МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛОВИХ ПРОЦЕСІВ У КІЛЬЦЕВИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ЕЛЕМЕНТАХ**

У статті отримано математичні моделі для моделювання процесів теплообміну в кільцевих циліндричних елементах на прикладах процесу охолодження полімерних труб, а також для аналізу розподілу температурного поля у втулках підшипників ковзання. Розроблено програмні модулі на базі математичного пакета Mathcad для моделювання температурних процесів у кільцевих циліндричних елементах.

Kuzyayev I.M., Sytar V.I., Lobodenko A.V.

**MODELING OF THERMAL PROCESSES IN CIRCULAR CYLINDRICAL ELEMENTS**

In article mathematical models for modeling of processes of heat exchange in circular cylindrical elements on examples of process of cooling of polymeric pipes, and also for the analysis of distribution of a temperature field in plugs of bearings of sliding are received. Program modules on the basis of a mathematical Mathcad package are developed for modeling of temperature processes in exchange in circular cylindrical elements.