

---

УДК 517.95, 519.63

Агапова И.С., Сидоров М.В., Яловега И.Г.

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ  
ТЕЧЕНИЯ В КАНАВКЕ ПОДШИПНИКА  
С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА R-ФУНКЦИЙ**

**Введение.**

*Актуальность задачи.* Математическое моделирование физических процессов, в частности, математическое моделирование задач гидродинамики, является быстро развивающимся разделом прикладной математики. Часто аналитический анализ возникающих здесь математических моделей не представляется возможным ввиду их сложности, поэтому приходится проводить лишь численный анализ, используя аппарат вычислительной математики. Современная вычислительная гидродинамика занимается такими направлениями, как расчет движений вязкой жидкости, численное исследование течений газа с физико-химическими превращениями, изучение распространения ударных волн в различных средах, решение газодинамических задач при наличии излучения и т. д.

**Анализ научных публикаций.**

В данной работе рассматривается одна из проблем гидродинамики – численное моделирование конвективного плоскопараллельного течения вязкой несжимаемой жидкости. Для математического описания течения используются уравнения Навье-Стокса (течение будем предполагать стационарным) [1, 2].

Уравнение Навье-Стокса обычно решают с помощью конечно-разностных (метод сеток) и приближенных аналитических (методы Галеркина, наименьших квадратов и т.д.) методов [1, 2, 5]. Их недостатком является замена сложной области простой приближенной областью. Не свободен от этого недостатка и метод конечных элементов (МКЭ) – один из наиболее употребляемых и эффективных численных методов в механике жидкости. В МКЭ криволинейные участки границы заменяются линейными и при расчете различных сложных конструкций (течения в соплах, форсунках и пр.) приходится измельчать сетку вблизи границы, строить специальные алгоритмы триангуляции и т.п. При построении систем метода конечных элементов обычно применяют либо формулировку метода Галеркина, либо какой-то вариационный принцип. При этом обычно приходится решать нелинейную систему.

Свободным от этого недостатка является метод R-функций, разрабатываемый школой акад. НАН Украины В.Л. Рвачева [4]. Благодаря использованию функций непрерывных аргументов, обладающих свойствами булевых функций, удается строить пучки функций (структуры решений), точно учитывающие геометрию области и краевые условия задачи.

### **Цель работы.**

Целью данной работы является создание эффективного метода математического моделирования течения масла в канавке подшипника. Для достижения цели решаются следующие задачи: разработка и обоснование метода расчета течения вязкой жидкости в канавке подшипника; применение разработанного численного метода для решения модельной задачи расчета течения жидкости в канавке подшипника.

### **Постановка задачи.**

Рассмотрим схему течения, показанную на рис. 1. Вращающийся вал опирается на подшипник. Тонкий кольцевой зазор между подшипником и валом заполнен смазочным маслом, которое подается в канавку подшипника через отверстие в ее основании. Вал и подшипник обычно имеют одинаковую и равномерно распределенную температуру, а масло имеет более низкую температуру.

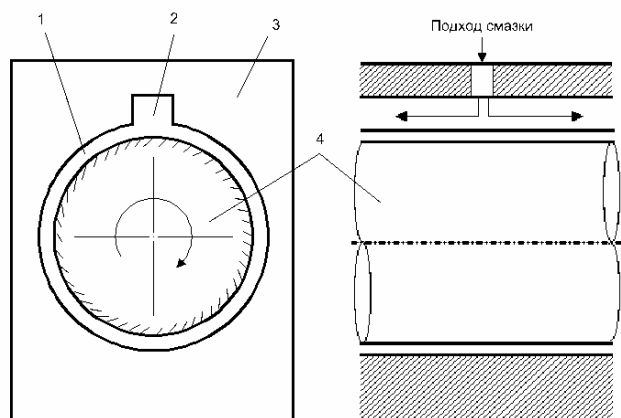


Рисунок 1 – Схема течения в канавке подшипника:  
1 – смазка, 2 – канавка, 3 – подшипник, 4 – вал.

Течение масла в канавке подшипника описывается с помощью краевой задачи для системы дифференциальных уравнений относительно функции тока  $\psi(x, y)$  и

температуры  $T(x, y)$  вида (приближение Буссинеска):

$$\Delta^2 \psi = \text{Re} J(\Delta \psi, \psi) + \text{Gr} \frac{\partial T}{\partial x} + \text{Re} F(x, y) \text{ в } \Omega, \quad (1)$$

$$\Delta T = \text{Pe} J(T, \psi) + \text{Pe} G(x, y) \text{ в } \Omega, \quad (2)$$

$$\psi|_{\partial\Omega} = \tilde{f}(s), \quad \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = \tilde{g}(s), \quad s \in \partial\Omega, \quad (3)$$

$$T|_{\partial\Omega} = \tilde{h}(s), \quad s \in \partial\Omega. \quad (4)$$

Здесь  $\text{Re}$  – число Рейнольдса;  $\text{Gr}$  – число Грасгофа;  $\text{Pe}$  – число Пекле;  $G(x, y)$  – объемная плотность тепловых источников,  $\tilde{h}(s)$  – распределение температуры на границе;  $F(x, y) = \frac{\partial f_x}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial x}$  – ротор вектора внешних сил  $(f_x, f_y)$ ;  $\frac{df}{ds}$ ,  $\tilde{g}$  – некоторые распределения нормальной и касательной составляющих скорости потока соответственно;  $J(\Delta \psi, \psi) = \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x}$ ;  $\mathbf{n}$  – внешняя нормаль к  $\partial\Omega$ . Предполагаем, что  $F, G \in L_2(\Omega)$ ,  $\tilde{f} \in W_2^1(\partial\Omega)$ ,  $\tilde{g}, \tilde{h} \in L_2(\partial\Omega)$ , система координат выбрана так, что сила тяжести сонаправлена с вектором  $(0, -1)$ .

#### Численный метод решения задачи.

Система дифференциальных уравнений Навье-Стокса, описывающая течение масла в канавке подшипника, относительно функции тока  $\psi(x, y)$  и температуры  $T(x, y)$  (приближение Буссинеска) в развернутом виде запишется так:

$$\Delta^2 \psi = \text{Re} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \Delta \psi \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \Delta \psi \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right] + \text{Gr} \frac{\partial T}{\partial x} \text{ в } \Omega, \quad (5)$$

$$\Delta T = \text{Pe} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( T \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( T \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right] \text{ в } \Omega, \quad (6)$$

$$\psi|_{\partial\Omega} = \tilde{f}(s), \quad \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = \tilde{g}(s), \quad s \in \partial\Omega, \quad (7)$$

$$T|_{\partial\Omega} = \tilde{h}(s), \quad s \in \partial\Omega. \quad (8)$$

Для решения поставленной задачи используем метод последовательных приближений в сочетании с методом R-функций [6].

Обозначим через  $(u_0, v_0)$  решение следующей задачи:

$$\Delta^2 u_0 = \text{Gr} \frac{\partial v_0}{\partial x} \text{ в } \Omega, \quad (9)$$

$$-\Delta v_0 = 0 \text{ в } \Omega, \quad (10)$$

$$u_0|_{\partial\Omega} = \tilde{f}(s), \quad \left. \frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\partial\Omega} = \tilde{g}(s), \quad s \in \partial\Omega, \quad (11)$$

$$v_0|_{\partial\Omega} = \tilde{h}(s), \quad s \in \partial\Omega. \quad (15)$$

В задаче (5) – (8) сделаем замену

$$\psi = u_0 + u, \quad (16)$$

$$T = v_0 + v, \quad (17)$$

где  $u, v$  – новые неизвестные функции. Это приводит к задаче

$$\Delta^2 u = \text{Re} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \Delta(u_0 + u) \frac{\partial(u_0 + u)}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \Delta(u_0 + u) \frac{\partial(u_0 + u)}{\partial x} \right) \right] + \text{Gr} \frac{\partial v}{\partial x} \text{ в } \Omega, \quad (18)$$

$$-\Delta v = -\text{Pe} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( (v_0 + v) \frac{\partial(u_0 + u)}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( (v_0 + v) \frac{\partial(u_0 + u)}{\partial x} \right) \right] \text{ в } \Omega, \quad (19)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\partial\Omega} = 0, \quad (20)$$

$$v|_{\partial\Omega} = 0. \quad (21)$$

При замене учитывались условия (9) – (15).

Структура решения задачи (9) – (15) имеет вид:

$$u_0 = f - \omega(D_1 f + g) + \omega^2 \Phi_0, \quad (22)$$

$$v_0 = h + \omega \Upsilon_0, \quad (23)$$

где  $\omega(x, y) = 0$  – нормализованное уравнение  $\partial\Omega$ ,  $D_1 = \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y}$ . Здесь

$f = EC \tilde{f}(s)$ ,  $g = EC \tilde{g}(s)$ ,  $h = EC \tilde{h}(s)$ . Функция  $\omega(x, y)$  может быть построена с помощью R-функций для достаточно широкого класса областей [4].

Для аппроксимации неопределенных компонент  $\Phi_0, \Upsilon_0$  в структурах (22), (23) можно воспользоваться, например, методом Рунца [3, 4]. Найденные функции  $u_0, v_0$  берем их в качестве начального приближения для итерационного процесса решения задачи (18) – (21). Пусть известны приближения  $u^{(n)}, v^{(n)}$  на  $n$ -й итерации. Тогда новое приближение – это решение задачи

$$\Delta^2 u^{(n+1)} = \operatorname{Re} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \Delta(u_0 + u^{(n)}) \frac{\partial(u_0 + u^{(n)})}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \Delta(u_0 + u^{(n)}) \frac{\partial(u_0 + u^{(n)})}{\partial x} \right) \right] + \operatorname{Gr} \frac{\partial v^{(n)}}{\partial x} \text{ в } \Omega, \quad (24)$$

$$-\Delta v^{(n+1)} = \operatorname{Re} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( (v_0 + v^{(n)}) \frac{\partial(u_0 + u^{(n)})}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( (v_0 + v^{(n)}) \frac{\partial(u_0 + u^{(n)})}{\partial x} \right) \right] \text{ в } \Omega, \quad (25)$$

$$u^{(n+1)}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial u^{(n+1)}}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = 0, \quad (26)$$

$$v^{(n+1)}|_{\partial\Omega} = 0. \quad (27)$$

Структуры решения задачи (24) – (27) имеют вид

$$u^{(n+1)} = \omega^2 \Phi^{(n+1)}, \quad (28)$$

$$v^{(n+1)} = \omega \Upsilon^{(n+1)}, \quad (29)$$

Для аппроксимации неопределенных компонент  $\Phi^{(n+1)}$ ,  $\Upsilon^{(n+1)}$  в структурах (22), (23) можно также воспользоваться методом Ритца [3, 4].

### Результаты численного эксперимента.

Вычислительный эксперимент был проведен для прямоугольной области. Везде предполагалось, что массовые силы  $\mathbf{f}$  потенциальны, то есть  $\operatorname{rot} \mathbf{f} = 0$ , а значит,  $F(x, y) \equiv 0$ , и тепловые источники в области отсутствуют, то есть  $G(x, y) \equiv 0$ . В качестве базисных функций выбирались степенные полиномы, тригонометрические полиномы, полиномы Лежандра, кубические сплайны Шенберга. Шаг сетки сплайнов выбран  $h_x = h_y = 0,1$ . При вычислении интегралов в системах Ритца использовалась формула Гаусса с 16 узлами по каждой переменной на каждом частичном квадрате  $0,1 \times 0,1$ . Предполагалось, что жидкость ограничена твердыми неподвижными стенками. Начальное приближение было построено для чисел Рейнольдса  $\operatorname{Re} = 1$ , Пекле  $\operatorname{Pe} = 1$  и Грасгофа  $\operatorname{Gr} = 50$ .

Вычислительный эксперимент был проведен при  $a = b = 1$ . Тогда

$$\tilde{f}(s) = \begin{cases} 0,5, & \partial\Omega \setminus \{y=0\}, \\ 0, & y=0. \end{cases} \quad \tilde{g}(s) = \begin{cases} 0, & \partial\Omega \setminus \{y=0\}, \\ -1, & y=0. \end{cases} \quad \tilde{h}(s) = 1 \text{ на } \partial\Omega.$$

$$f = \frac{0,5y}{y + x(1-x)(1-y)}, \quad g = \frac{-x(1-x)(1-y)}{y + x(1-x)(1-y)}, \quad h = 1.$$

Результаты в виде линий уровня температуры (изотерм) и линий уровня функции тока (линий тока) приведены на рисунке 2 ( $\operatorname{Re} = 1, \operatorname{Pe} = 1$  и  $\operatorname{Gr} = 50$ ).

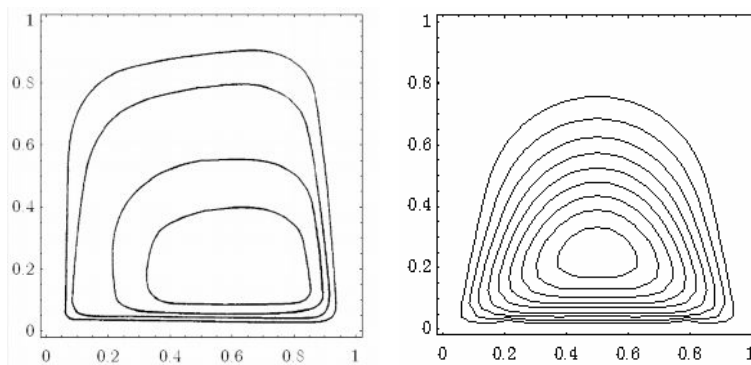


Рисунок 2 – Изотермы  $T = \text{const}$  и линии тока  $\psi = \text{const}$

Полученные результаты хорошо согласуются с результатами физических экспериментов и результатами, полученными разностными методами [7]. Расхождения составили около 5%.

### **Выводы.**

1. Таким образом, построен алгоритм решения задачи численного моделирования на основе метода R-функций, что дало возможность, в отличие от сеточных методов, получить выражение для функции тока в аналитическом виде, что существенно облегчает ее последующее использование.

2. Численное моделирование было проведено для прямоугольной области. Для конкретной задачи проводится сравнение полученного приближенного решения с приближенным решением, полученным другими авторами. Сделан вывод об эффективности предложенного метода решения.

Литература: 1. Ландау Л.Ф., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. В 10 т. Т. VI. Гидродинамика. – М.: Физматлит, 2003. – 736 с. 2. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа.–М.: Дрофа, 2003. – 840 с. 3. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1970. – 512 с. 4. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – К.: Наук. думка, 1982. – 552 с. 5. Вабищевич П.Н. Метод фиктивных областей в математической физике. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1991. – 156 с. 6. Артюх А.В., Гибкина Н.В., Сидоров М.В. Об одном подходе к математическому моделированию плоских стационарных конвективных течений в конечных односвязных областях // Радиоэлектроника и информатика. 2007. № 4. С. 40 – 49. 7. Ettles C. Solution for flow in a bearing groove. Proc. 1. Mech. Eng. Tribology Convention, Pitlochry, Scotland, paper № 15, 1998.

Агапова І.С., Сидоров М.В., Яловега І.Г.

### **МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ ТЕЧІЇ В КАНАВЦІ ПІДШИПНИКА ЗА ДОПОМОГОЮ МЕТОДА R-ФУНКЦІЙ**

Розглядається застосування методу R-функцій для математичного моделювання плоскої стаціонарної течії в'язкої рідини в канавці підшипника. Обчислювальний експеримент був проведений для одиничного квадрата, отримані результати порівняні з розв'язками, отриманими іншими авторами

Agarova I.S., Sidorov M.V., Yalovega I.G.

### **MATHEMATICAL MODELING AND NUMERICAL ANALYSIS OF THE FLOW IN THE BEARING GROOVE USING R-FUNCTIONS METHOD**

The application of the method of R-functions for mathematical modeling of the plane steady flow of viscous fluid in the bearing groove is consider. Computational experiment was did for the unit square, the results are compared with solutions obtained by other authors.

---