

МАШИНОЗНАВСТВО

УДК 539.3

Аврамов К.В., Борисюк А.В.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГАРМОНИЧЕСКОГО БАЛАНСА К ИССЛЕДОВАНИЮ АВТОКОЛЕБАНИЙ ОДНОДИСКОВЫХ РОТОРОВ

1. Введение

Автоколебания в роторных системах могут возникать вследствие взаимодействия масляной пленки подшипника скольжения с цапфой ротора. Такие колебания привели к разрушению ряда роторных систем [1]. В настоящее время для исследования колебаний роторов часто применяются современные аналитические и численные методы нелинейной динамики [2]. Позняк [3] получил аналитические результаты, описывающие давления в масляной пленке подшипников скольжения. Используя вариационный подход, Олимпиев [4] нашел асимптотическое решение уравнения Рейнольдса. Устойчивость цапфы в подшипнике скольжения рассматривается в монографии [5]. Каринцев, Шульженко [6] получили модель давлений в масляном слое коротких подшипников скольжения. Они исследовали влияние инерции масляного слоя на величины давлений. Филиппов, Шульженко [7] применяют асимптотические методы для исследования автоколебаний в роторах. Овчарова, Голоскоков [8] анализируют вынужденные колебания ротора с учетом масляного слоя в коротких подшипниках скольжения. Они описали динамику ротора расчетной схемой, состоящей из упругого вала с тремя дискретными массами. В этой статье выводятся уравнения нелинейных колебаний однодисковых роторов в коротких подшипниках скольжения. В усилиях, действующих на цапфы ротора со стороны масляного слоя, учитываются нелинейные члены вплоть до кубических слагаемых относительно обобщенных координат. Для исследования автоколебаний в полученной системе применяется метод гармонического баланса.

2. Уравнения движения системы

Рассмотрим динамику жесткого диска, который крепится к вращающемуся упругому валу. Вал находится в коротких подшипниках скольжения. В процессе колебаний системы цапфы А и В вала так же совершают движение. Движение цапф А и В описываются обобщенными координатами (x_1, y_1) и (x_2, y_2) . В масляном слое подшипников скольжения возникают усилия, которые действуют на цапфы вала. Проекции этих сил на оси x и y обозначим через $F_x(x_i, y_i)$, $F_y(x_i, y_i)$, $i = 1, 2$, соответственно. Расчетная схема однодискового ротора представлена на рис. 1.

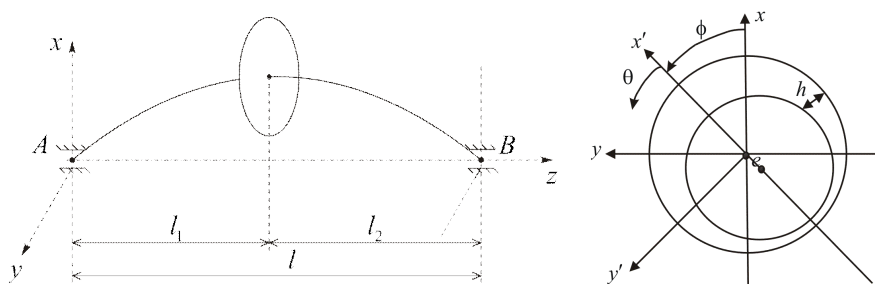


Рисунок 1 – Расчетная схема однодискового ротора

Ротор вращается с постоянной угловой скоростью Ω вокруг оси z . Угловую скорость диска представим так:

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= \omega_1 \vec{e}_1^{(3)} + \omega_2 \vec{e}_2^{(3)} + \omega_3 \vec{e}_3^{(3)}, \quad \omega_1 = \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 + \dot{\theta}_2 \sin \theta_3, \\ \omega_2 &= \dot{\theta}_2 \cos \theta_3 - \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3, \quad \omega_3 = \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_1 \sin \theta_2. \end{aligned} \quad (1)$$

Из условий движения, угловую скорость Ω запишем в виде: $\Omega = \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_1 \sin \theta_2$. Тогда кинетическая энергия системы принимает следующий вид:

$$T = \frac{I_e}{2} (\dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_1^2 \cos^2 \theta_2) + \frac{I_p}{2} (\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_1 \sin \theta_2)^2 + \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \quad (2)$$

где x, y - обобщенные координаты, описывающие перемещения точек крепления диска к валу, I_e, I_p - экваториальный и полярный моменты инерции диска. Потенциальная энергия системы принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} c_{11} \left[(x - \varsigma_1 x_2 - \varsigma_2 x_1)^2 + (y - \varsigma_2 y_1 - \varsigma_1 y_2)^2 \right] + \\ &+ \frac{1}{2} c_{22} \left[\left(\theta_2 - \frac{x_2 - x_1}{l} \right)^2 + \left(\theta_1 + \frac{y_2 - y_1}{l} \right)^2 \right] + \\ &+ c_{12} \left[(x - \varsigma_1 x_2 - \varsigma_2 x_1) \left(\theta_2 - \frac{x_2 - x_1}{l} \right) - (y - \varsigma_2 y_1 - \varsigma_1 y_2) \left(\theta_1 + \frac{y_2 - y_1}{l} \right) \right], \end{aligned} \quad (3)$$

где c_{11}, c_{12}, c_{22} - элементы матрицы жесткости, $\varsigma_1 = \frac{l_1}{l}$, $\varsigma_2 = \frac{l_2}{l}$. Уравнение движения системы представим в виде уравнений Лагранжа II рода. Разделим полученные уравнения на две группы: уравнения движения и уравнения равновесия цапф вала. Уравнения движения представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} m \ddot{x} + c_{11} (x - \varsigma_1 x_2 - \varsigma_2 x_1) + c_{12} \left(\theta_2 - \frac{x_2 - x_1}{l} \right) &= -m g, \\ m \ddot{y} + c_{11} (y - \varsigma_1 y_2 - \varsigma_2 y_1) - c_{12} \left(\theta_1 + \frac{y_2 - y_1}{l} \right) &= 0, \\ I_e \ddot{\theta}_1 \cos^2 \theta_2 - I_e \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin 2\theta_2 + I_p \ddot{\theta}_3 \sin \theta_2 + I_p \Omega \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 - \\ - \frac{I_p}{2} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin 2\theta_2 + I_p \ddot{\theta}_1 \sin^2 \theta_2 + I_p \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin 2\theta_2 + \\ + c_{22} \left(\theta_1 + \frac{y_2 - y_1}{l} \right) - c_{12} (y - \varsigma_2 y_1 - \varsigma_1 y_2) &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

$$I_e \ddot{\theta}_2 + \frac{I_e}{2} \dot{\theta}_1^2 \sin(2\theta_2) - I_p \Omega \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 + c_{22} \left(\theta_2 - \frac{x_2 - x_1}{l} \right) + c_{12} (x - \varsigma_1 x_2 - \varsigma_2 x_1) = 0,$$

Уравнения равновесия цапф ротора запишем так:

$$\begin{aligned} \left(\frac{c_{12}}{l} - \varsigma_2 c_{11} \right) (x - \varsigma_1 x_2 - \varsigma_2 x_1) + \left(\frac{c_{22}}{l} - \varsigma_2 c_{12} \right) \left(\theta_2 - \frac{x_2 - x_1}{l} \right) &= F_x(x_1, y_1), \\ \left(\frac{c_{12}}{l} - \varsigma_2 c_{11} \right) (y - \varsigma_1 y_2 - \varsigma_2 y_1) + \left(\varsigma_2 c_{12} - \frac{c_{22}}{l} \right) \left(\theta_1 + \frac{y_2 - y_1}{l} \right) &= F_y(x_1, y_1), \\ \left(\varsigma_1 c_{11} + \frac{c_{12}}{l} \right) (x - \varsigma_1 x_2 - \varsigma_2 x_1) + \left(\frac{c_{22}}{l} + \varsigma_1 c_{12} \right) \left(\theta_2 - \frac{x_2 - x_1}{l} \right) &= -F_x(x_2, y_2), \\ \left(\frac{c_{22}}{l} + \varsigma_1 c_{12} \right) \left(\theta_1 + \frac{y_2 - y_1}{l} \right) - \left(\varsigma_1 c_{11} + \frac{c_{12}}{l} \right) (y - \varsigma_2 y_1 - \varsigma_1 y_2) &= F_y(x_2, y_2). \end{aligned}$$

Под действием силы тяжести ротор занимает некоторое состояние равновесия, которое определяется следующими значениями обобщенных координат: $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_2)$. Эти состояния равновесия удовлетворяют системе уравнений:

$$F_X(\bar{x}_1, \bar{y}_1) = mg \frac{l_2}{l}, \quad F_X(\bar{x}_2, \bar{y}_2) = mg \frac{l_1}{l}, \quad F_Y(\bar{x}_1, \bar{y}_1) = 0, \quad F_Y(\bar{x}_2, \bar{y}_2) = 0. \quad (5)$$

Остальные обобщенные координаты определяются из уравнений:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \varsigma_1 \bar{x}_2 + \varsigma_2 \bar{x}_1 - \frac{mgc_{22}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}, \quad \bar{y} = \varsigma_2 \bar{y}_1 + \varsigma_1 \bar{y}_2, \\ \bar{\theta}_1 &= \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_2}{l}, \quad \bar{\theta}_2 = \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}{l} + \frac{mgc_{12}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Теперь движения ротора рассматриваются относительно найденного положения равновесия (5, 6). Введем следующую замену переменных:

$$\begin{aligned} (x, y, \theta_1, \theta_2, x_1, y_1, x_2, y_2) &\rightarrow \\ &\rightarrow (\bar{x} + x, \bar{y} + y, \bar{\theta}_1 + \theta_1, \bar{\theta}_2 + \theta_2, \bar{x}_1 + x_1, \bar{y}_1 + y_1, \bar{x}_2 + x_2, \bar{y}_2 + y_2). \end{aligned} \quad (7)$$

С учетом замены (7) динамическая система (4) принимает следующий вид:

$$m \ddot{x} = R_X^{(1)}, \quad I_e \ddot{\theta}_2 - I_p \Omega \dot{\theta}_1 + R_X^{(2)} = 0, \quad m \ddot{y} = R_Y^{(1)}, \quad I_e \ddot{\theta}_1 + I_p \Omega \dot{\theta}_2 - R_Y^{(2)} = 0, \quad (8)$$

где $R_Y^{(1)} = \tilde{F}_Y(x_1, y_1) + \tilde{F}_Y(x_2, y_2)$, $R_X^{(1)} = \tilde{F}_X(x_2, y_2) + \tilde{F}_X(x_1, y_1)$,

$$R_Y^{(2)} = l_1 \tilde{F}_Y(x_1, y_1) - l_2 \tilde{F}_Y(x_2, y_2), R_X^{(2)} = l_1 \tilde{F}_X(x_1, y_1) - l_2 \tilde{F}_X(x_2, y_2).$$

Силы, действующие на цапфы со стороны масляного слоя, представим следующим образом:

$$F_x = - \int_0^{L_b} \int_0^\pi (\cos(\theta + \phi) p(\theta, z) R) d\theta dz, F_y = - \int_0^{L_b} \int_0^\pi (\sin(\theta + \phi) p(\theta, z) R) d\theta dz. \quad (9)$$

где L_B – длина короткого подшипника; ϕ – угол линии центров. Предполагается, что масляный слой занимает область $\theta \in [0; \pi]$. Давление, действующее на цапфу со стороны масляного слоя $p(z_1, \theta)$, определяется из уравнения Рейнольдса [4]. Решение этого уравнения для короткого подшипника представим так:

$$p = \frac{3\mu}{h^3} \left[\Omega \frac{\partial h}{\partial \theta} + 2 \frac{\partial h}{\partial t} \right] z_1 (z_1 - L_b), \quad (10)$$

где μ – вязкость масла, z_1 – продольная локальная координата подшипника скольжения. Величину h представим так: $h = c + e \cos \theta = c - x \cos(\theta + \phi) - y \sin(\theta + \phi)$, где c – величина зазора между цапфой и подшипником (рис. 1).

В дальнейшем введем следующие безразмерные переменные и параметры:

$$\tilde{x}_j = \frac{x_j}{c}, \tilde{y}_j = \frac{y_j}{c}, H = \frac{h}{c}, \tau = \Omega t. \quad (11)$$

Тогда силы, действующие со стороны масляного слоя (9) определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{R\mu L_b^3}{2} \int_0^\pi \frac{\cos(\theta + \phi)}{h^3} (\Omega(x \sin(\theta + \phi) - y \cos(\theta + \phi)) + \\ &+ 2(\dot{x} \cos(\theta + \phi) + \dot{y} \sin(\theta + \phi))) d\theta, \\ F_y &= \frac{R\mu L_b^3}{2} \int_0^\pi \frac{\sin(\theta + \phi)}{h^3} (\Omega(x \sin(\theta + \phi) - y \cos(\theta + \phi)) + \\ &+ 2 \cdot (\dot{x} \cos(\theta + \phi) + \dot{y} \sin(\theta + \phi))) d\theta. \end{aligned} \quad (12)$$

Теперь определим положение равновесия ротора под действием сил тяжести. Если ротор не колеблется, то уравнение (10) принимает следующий вид:

$$p = - \frac{3\mu\Omega e \sin \theta}{(c + e \cos \theta)^3} z_1 (z_1 - L_B). \text{ Уравнения равновесия цапфы представим так:}$$

$$F_{X'} = G \cos \phi_e, F_{Y'} = -G \sin \phi_e, \quad (13)$$

где $F_{X'}$, $F_{Y'}$ – проекции сил в направлении осей x' , y' ; ϕ_e – угол линии центров для равновесного состояния цапфы; G – значение вертикальной силы в подшипнике. Сила G имеет следующие значения для цапф A и B : $G = mg \frac{l_2}{l}$; $G = mg \frac{l_1}{l}$. Тогда статические силы можно представить так:

$$F_{X'} = \frac{L_B^3 \mu \Omega R \varepsilon^2}{c^2 (1 - \varepsilon^2)^2}, F_{Y'} = -\frac{\pi L_B^3 \mu \Omega R \varepsilon}{4c^2 (1 - \varepsilon^2)^{3/2}}, \varepsilon = \frac{e}{c}. \quad (14)$$

Из выражений (13, 14) получаем нелинейные уравнения для определения параметра ε : $G = \frac{L_B^3 \mu \Omega R \varepsilon}{4c^2 (1 - \varepsilon^2)^2} \sqrt{16\varepsilon^2 + \pi^2 (1 - \varepsilon^2)}$. Тогда равновесие цапфы A определяется так:

$$\tilde{x}_{1,0} = \bar{x}_1 c^{-1} = -\varepsilon_1 \cos \phi_{e1}, \tilde{y}_{1,0} = \bar{y}_1 c^{-1} = -\varepsilon_1 \sin \phi_{e1}, \operatorname{tg} \phi_{e1} = \pi \sqrt{1 - \varepsilon_1^2} / (4\varepsilon_1). \quad (15)$$

Индекс 1 у величин ε и ϕ_e обозначает, что эти параметры описывают равновесие цапфы A .

Теперь исследуем динамику ротора относительно положений равновесия. Для этого введем следующую замену переменных: $\tilde{x}_i \rightarrow \tilde{x}_i + \tilde{x}_{i,0}$, $\tilde{y}_i \rightarrow \tilde{y}_i + \tilde{y}_{i,0}$, $i = 1, 2$ и обозначения:

$$\vartheta = \theta + \phi_e, \gamma = \frac{R \mu L_b^3 \Omega}{2c^2}, J_1 = \int_{\phi_e}^{\theta + \phi_e} \frac{\cos^2(\vartheta)}{H_1^3} d\vartheta, J_2 = \int_{\phi_e}^{\theta + \phi_e} \frac{\sin^2(\vartheta)}{H_1^3} d\vartheta, \\ J_3 = \int_{\phi_e}^{\theta + \phi_e} \frac{\cos(\vartheta) \sin(\vartheta)}{H_1^3} d\vartheta, H_1(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1) = 1 - (\tilde{x}_1 + \tilde{x}_{1,0}) \cos \vartheta - (\tilde{y}_1 + \tilde{y}_{1,0}) \sin \vartheta.$$

Тогда силы, действующие со стороны масляного слоя, принимают следующий вид:

$$F_X = \gamma(\tilde{x}_1 + \tilde{x}_{1,0} - 2\tilde{y}'_1)J_3 - \gamma(\tilde{y}_1 + \tilde{y}_{1,0} + 2\tilde{x}_1)J_1, \\ F_Y = \gamma(\tilde{x}_1 + \tilde{x}_{1,0} - 2\tilde{y}'_1)J_2 - \gamma(\tilde{y}_1 + \tilde{y}_{1,0} + 2\tilde{x}_1)J_3. \quad (16)$$

Нелинейные силы F_X, F_Y , описывающие действие на цапфы масляного слоя, представим в виде степенного ряда по $\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{x}'_1, \tilde{y}'_1$. Получим выражения в виде степенного ряда для величины $H^{-3}(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1)$. Это выражение представим в следующем виде:

$$H^{-3}(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1) = A_0(\vartheta) + A_1(\vartheta)\tilde{x}_1 + A_2(\vartheta)\tilde{y}_1 + A_3(\vartheta)\tilde{x}_1^2 + \dots \quad (17)$$

Подстановкой разложения (17) в выражения (16) получаем следующие разложения сил масляного слоя F_X, F_Y в степенные ряды:

$$\begin{aligned} F_X &= F_{X,0} + F_{X,1}(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{x}'_1, \tilde{y}'_1) + F_{X,2}(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{x}'_1, \tilde{y}'_1) + F_{X,3}(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{x}'_1, \tilde{y}'_1) + \dots, \\ F_Y &= F_{Y,0} + F_{Y,1}(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{x}'_1, \tilde{y}'_1) + F_{Y,2}(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{x}'_1, \tilde{y}'_1) + F_{Y,3}(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{x}'_1, \tilde{y}'_1) + \dots, \end{aligned} \quad (18)$$

где $F_{X,0}, F_{Y,0}$ - постоянные составляющие силы, $F_{X,1}, F_{Y,1}$ - линейные части сил относительно $\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{x}'_1, \tilde{y}'_1$, $F_{X,2}, F_{Y,2}, F_{X,3}, F_{Y,3}$ - нелинейные составляющие силы второго и третьего порядка. Линейные части сил масляного слоя представим следующим образом:

$$\begin{aligned} F_{X,1} &= \gamma[(\tilde{x} - 2\tilde{y}')I_1 - (\tilde{y} + 2\tilde{x}')I_2 - 3\varepsilon\tilde{x}I_3 - 3\varepsilon\tilde{y}I_4], \\ F_{Y,1} &= \gamma[(\tilde{x} - 2\tilde{y}')I_5 - (\tilde{y} + 2\tilde{x}')I_6 - 3\varepsilon\tilde{x}I_4 - 3\varepsilon\tilde{y}I_6]. \end{aligned} \quad (19)$$

Нелинейные части сил запишем так:

$$\begin{aligned} F_{X,2} &= \gamma[3(\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 - 2\tilde{x}\tilde{y}' - 2\tilde{y}\tilde{x}')I_7 - 3\tilde{x}(\tilde{y} + 2\tilde{x}')I_8 + 3\tilde{y}(\tilde{x} - 2\tilde{y}')I_9 - \\ &- 6\varepsilon\tilde{x}^2I_{10} - 6\varepsilon\tilde{y}^2I_{11} - 12\varepsilon\tilde{x}\tilde{y}I_{12}], \\ F_{Y,2} &= \gamma[3(\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 - 2\tilde{x}\tilde{y}' - 2\tilde{y}\tilde{x}')I_9 - 3\tilde{x}(\tilde{y} + 2\tilde{x}')I_7 + 3\tilde{y}(\tilde{x} - 2\tilde{y}')I_{13} - \\ &- 6\varepsilon\tilde{x}^2I_{12} - 6\varepsilon\tilde{y}^2I_{14} - 12\varepsilon\tilde{x}\tilde{y}I_{11}], \\ F_{X,3} &= \gamma\{6[\tilde{x}^2(\tilde{x} - 2\tilde{y}') - 2\tilde{x}\tilde{y}(\tilde{y} + 2\tilde{x}')]I_{15} + 6[2\tilde{x}\tilde{y}(\tilde{x} - 2\tilde{y}') - \tilde{y}^2(\tilde{y} + 2\tilde{x}')]I_{16} + \\ &+ 6\tilde{y}^2(\tilde{x} - 2\tilde{y}')I_{17} - 6\tilde{x}^2(\tilde{y} + 2\tilde{x}')I_{18} - 20\varepsilon\tilde{x}^3I_{19} - 20\varepsilon\tilde{y}^3I_{20} - 60\varepsilon\tilde{x}^2\tilde{y}I_{21} - \\ &- 60\varepsilon\tilde{x}\tilde{y}^2I_{21}\}, \\ F_{Y,3} &= \gamma\{6[\tilde{x}^2(\tilde{x} - 2\tilde{y}') - 2\tilde{x}\tilde{y}(\tilde{y} + 2\tilde{x}')]I_{16} + 6[2\tilde{x}\tilde{y}(\tilde{x} - 2\tilde{y}') - \tilde{y}^2(\tilde{y} + 2\tilde{x}')]I_{17} + \\ &+ 6\tilde{y}^2(\tilde{x} - 2\tilde{y}')I_{23} - 6\tilde{x}^2(\tilde{y} + 2\tilde{x}')I_{15} - 20\varepsilon\tilde{x}^3I_{21} - 20\varepsilon\tilde{y}^3I_{24} - 60\varepsilon\tilde{x}^2\tilde{y}I_{22} - \\ &- 60\varepsilon\tilde{x}\tilde{y}^2I_{20}\}, \end{aligned} \quad (20)$$

где I_1, \dots, I_{24} - интегралы, которые берутся в элементарных функциях и не приводятся для краткости изложения.

В результате подстановки сил (18) в уравнения (8), динамическая система принимает следующий вид:

$$[M]\ddot{q} + [G]\dot{q} = [K_1]q + [D_1]q' + W(q_1, q'_1), \quad (22)$$

где $W(q_1, q'_1)$ - вектор нелинейных составляющих сил, которые принимают следующий вид:

$$w_1 = F_X(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2, \tilde{x}'_2, \tilde{y}'_2) + F_X(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{x}'_1, \tilde{y}'_1) + 2F_{X,0},$$

$$\begin{aligned} w_2 &= l_1 F_Y(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{x}'_1, \tilde{y}'_1) - l_2 F_Y(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2, \tilde{x}'_2, \tilde{y}'_2) + (l_1 - l_2) F_{Y,0}, \\ w_3 &= F_Y(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2, \tilde{x}'_2, \tilde{y}'_2) + F_Y(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{x}'_1, \tilde{y}'_1) + 2F_{Y,0}, \\ w_4 &= l_2 F_X(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2, \tilde{x}'_2, \tilde{y}'_2) - l_1 F_X(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{x}'_1, \tilde{y}'_1) + (l_2 - l_1) F_{X,0}. \end{aligned}$$

Окончательно, систему (22) можно представить так:

$$\ddot{q} + [F]\dot{q} + [Q]q = \tilde{W}(q, \dot{q}), \quad (23)$$

где $\tilde{W}(q, \dot{q}) = [M]^{-1}W(q_1, \dot{q}_1) = [M]^{-1}W(q_1, \Omega^{-1}\dot{q}_1) = [M]^{-1}W(\tilde{D}^{-1}Rq, \Omega^{-1}\tilde{D}^{-1}R\dot{q})$.

В численном анализе уравнений (23) учитывались как квадратичные, так и кубические слагаемые относительно обобщенных координат и их скоростей.

3. Применение метода гармонического баланса к анализу автоколебаний

Движение системы (23) может быть представлено в следующем виде:

$$\begin{aligned} x &= A_0 + \tilde{A}_1 \cos(\omega\tau + \varphi_1), \theta_1 = B_0 + \tilde{B}_1 \cos(\omega\tau + \varphi_2), \\ y &= C_0 + \tilde{C}_1 \cos(\omega\tau + \varphi_3), \theta_2 = D_0 + \tilde{D}_1 \cos(\omega\tau + \varphi_4). \end{aligned} \quad (24)$$

Система (23) является автономной, поэтому она инвариантна относительно преобразования времени $\tau = t + t_*$. Параметр t_* выбираем следующим образом:

$t_* = -\frac{\varphi_1}{\omega}$. Тогда решение (24) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} x &= A_0 + A_1 \cos(\omega t), \theta_1 = B_0 + B_1 \cos(\omega t) + B_2 \sin(\omega t), \\ y &= C_0 + C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t), \theta_2 = D_0 + D_1 \cos(\omega t) + D_2 \sin(\omega t). \end{aligned} \quad (25)$$

Подстановкой (25) в выражения для нелинейных сил (18) получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} f_x &= \mathcal{F}_{x0}(A_0, A_1, \dots, C_2, \omega) + \mathcal{F}_{x1}(A_0, \dots, \omega) \cos(\omega t) + \mathcal{F}_{x2}(A_0, \dots, \omega) \sin(\omega t), \\ f_y &= \mathcal{F}_{y0}(A_0, A_1, \dots, C_2, \omega) + \mathcal{F}_{y1}(A_0, \dots, \omega) \cos(\omega t) + \mathcal{F}_{y2}(A_0, \dots, \omega) \sin(\omega t). \end{aligned} \quad (26)$$

Подставляя (25) и (26) в систему (8) и приравнявая соответствующие коэффициенты, получаем систему из 12 нелинейных алгебраических уравнений относительно $A_0, A_1, \dots, C_2, \omega$.

4. Численный анализ колебаний

Исследуем динамику ротора со следующими параметрами системы:

$$R = 0.057 \text{ м}, \mu = 18 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}, L_B = 28.5 \cdot 10^{-3} \text{ м}, c = 0.2 \cdot 10^{-3} \text{ м}, m = 374 \text{ кг},$$

$$l_1 = 0.5 \text{ м}, l_2 = 0.648 \text{ м}, I_p = 28.4 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, I_e = 14.2 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, E = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ Па},$$

$$J = 8.29 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4.$$

Частота вращения ротора, при которой он теряет устойчивость составляет $\tilde{\Omega} = 1710 \text{ рад/с}$.

Для исследования автоколебаний ротора численно решалась система 8 нелинейных алгебраических уравнений относительно амплитуд автоколебаний при изменении частоты вращения ротора Ω . Результаты расчета представлены на амплитудно-частотной характеристике (рис.2). При $\tilde{\Omega} = 1710 \text{ рад/с}$ наблюдается бифуркация Хопфа. В результате этой бифуркации возникают неустойчивые предельные циклы. Подчеркнем, что кроме этих движений в системе была найдена еще две ветки автоколебаний, которые также приводятся на рис.2.

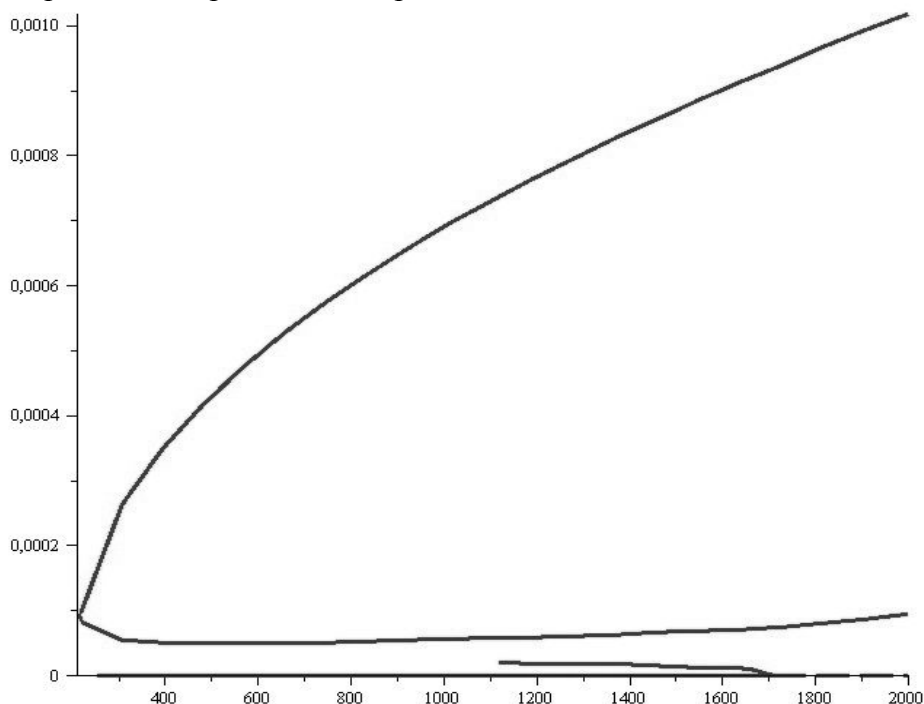


Рисунок 2 - Амплитудно-частотная характеристика

5. Выводы

Автоколебания в роторе возникают не при угловой скорости, когда наблюдается бифуркация Хопфа, а при значительно меньших угловых скоростях. Такие автоколебательные режимы возникают вследствие седло-узловых бифуркаций в системе.

Литература: 1. Zhang X. Y. On site testing and analysis of the oil whirl phenomena in national made 200MW stream turbine generator systems// Power Industry.-1992.-№12- P.32-37. 2. Legrand M. Nonlinear normal modes of a rotating shaft based on the Invariant Manifold Method/ M. Legrand, D. Jiang, C. Pierre, S.W. Shaw// International Journal of Rotating Machinery.-2004.-№10.-P.319-335. 3. Позняк Э. Л. Неустойчивые колебания роторов на подшипниках скольжения// сб. "Динамика гибких роторов", М.: Изд-во "Наука", 1972.- С. 22-29, 4. Олимпиев В. И. О собственных частотах ротора на подшипниках скольжения// Изд. АН СССР, ОТН.-1960.- №3-С.24-29. 5. Тондл. А. Динамика роторов турбогенераторов, Ленинград: "Энергия", 1971, 386 с. 6. Каринцев И.Б. Статические и динами-

ческие характеристики масляной пленки коротких подшипников скольжения/ И.Б. Каринцев, Н.Г. Шульженко// В кн.: Динамика и прочность машин.-1972.- вып. 16, Изд-во Харьковск. Ун-та, С.14-18.
7. Филиппов А.П. Устойчивость колебаний ненагруженного неуравновешенного ротора в коротких опорах жидкостного трения/ А.П. Филиппов, Н.Г. Шульженко // Машиноведение.-1973.- №4.- С. 21-28. 8. Овчарова Д.К. Вынужденные колебания ротора на подшипниках скольжения/ Д.К. Овчарова, Е.Г. Голоскоков//Прикладная механика.- 1975.- №11.- С. 95-99.

Аврамов К.В., Борисюк О.В.

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ГАРМОНІЧНОГО БАЛАНСУ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ
АВТОКОЛИВАНЬ ОДНОДИСКОВИХ РОТОРІВ

Автоколивання у роторі виникають не при кутовій швидкості, коли спостерігається біфуркація Хопфа, а при значно менших кутових швидкостях. Такі режими автоколивання виникають внаслідок сідло-вузлових біфуркацій в системі.

Avramov K.V., Borysiuk O.V.

APPLICATION OF HARMONIC BALANCE METHOD FOR STUDY OF SELF
VIBRATION OF ONE DISK ROTORS

Self vibrations of the rotor are occurred not with angular velocity, when there is Hopf bifurcation, but at much lower angular velocities. These self vibrations modes arise as the result of saddle-node bifurcations.
