ПРИКЛАДНА МЕХАНІКА

УДК 621.65

Аврамов К.В., Филипковский С.В., Федоров В.М., Пирог В.А., Филипковская Л.А.

СРАВНИТЕЛЬНАЯ ОЦЕНКА МЕТОДОВ АНАЛИЗА КОЛЕБАНИЙ ЖИДКОСТИ В РАЗВЕТВЛЕННЫХ ТРУБОПРОВОДАХ

1. Введение

Одной из проблем при проектировании ракет с ЖРД является продольная устойчивость [1,2]. В большинстве ракет наблюдаются продольные автоколебания. Они происходят, когда основная частота продольных колебаний корпуса ракеты близка к частоте колебаний топлива в трубопроводе окислителя. Если возникает необходимость отстройки собственной частоты колебаний от резонансной частоты, то изменяют собственные частоты колебаний жидкости в топливных трубопроводах путем введения в систему специальных устройств [2, 3]. Теоретические основы статики и динамики трубопроводов летательных аппаратов рассмотрены в книге [4]. В монографии [5] рассмотрены общие теоретические аспекты математического моделирования динамического состояния трубопроводных систем.

Для определения собственных частот колебаний питающих магистралей, жидкость рассматривается как система с распределенными параметрами. Динамика жидкости описывается уравнениями [1]:

$$-\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\rho}{F}\frac{\partial Q}{\partial t}\,;\;-\frac{\partial p}{\partial t}=c^2\rho\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q}{F}\right), \qquad (1)$$

где $p, Q-$ давление и расход жидкости; $x-$ осевая координата трубопровода; $F-$ площадь поперечного сечения трубопровода; $\rho-$ плотность жидкости в трубопроводе; $c-$ скорость звука в круглой деформируемой трубе.

2. Метод четырехполюсника

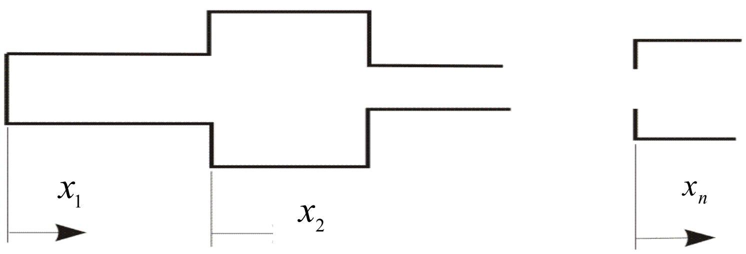

Рисунок 1 - Эскиз трубопровода с переменным поперечным сечением

Рассмотрим трубопровод со скачкообразно меняющимся поперечным сечением. Исследуем $i-$й участок трубы с постоянным поперечным сечением. Трубопровод состоит из n участков. Предположим, что на $i-$м участке в системе наблюдаются гармонические колебания с частотой ω_k. Такие движения можно описать так:

$$p_i = p_i(x)\sin(\omega_k t)\,;\; Q_i = Q_i(x)\cos(\omega_k t)\,. \tag{2}$$

Введем (2) в (1) и придем к следующим обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_i} = \frac{\rho}{F_i}\omega_k Q_i(x_i)\,;\; \frac{\partial Q_i}{\partial x_i} = -\frac{\omega_k F_i}{c_i^2 \rho} p_i(x_i)\,. \tag{3}$$

Решение системы (3) представим так:

$$\begin{bmatrix} Q_i(x_i) \\ p_i(x_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(\dfrac{\omega_k}{c_i} x_i\right) & -\dfrac{F_i}{c_i\rho}\sin\left(\dfrac{\omega_k}{c_i} x_i\right) \\ \dfrac{c_i\rho}{F_i}\sin\left(\dfrac{\omega_k}{c_i} x_i\right) & \cos\left(\dfrac{\omega_k}{c_i} x_i\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_i(0) \\ p_i(0) \end{bmatrix}. \tag{4}$$

С помощью формулы (4) установим связь между давлением и расходом на входе в $i-$й участок $Q_i(0),\, p_i(0)$ и этими же параметрами на выходе из него $Q_i(l),\, p_i(l)$. Эта связь примет следующий вид:

$$\begin{bmatrix} Q_i(l_i) \\ p_i(l_i) \end{bmatrix} = \left[A_i^{(k)}\right] \begin{bmatrix} Q_i(0) \\ p_i(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(\dfrac{\omega_k}{c_i} l_i\right) & -\dfrac{F_i}{c_i\rho}\sin\left(\dfrac{\omega_k}{c_i} l_i\right) \\ \dfrac{c_i\rho}{F_i}\sin\left(\dfrac{\omega_k}{c_i} l_i\right) & \cos\left(\dfrac{\omega_k}{c_i} l_i\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_i(0) \\ p_i(0) \end{bmatrix}. \tag{5}$$

В точках скачкообразного изменения поперечного сечения давление и расход должны оставаться постоянными: $p_{i-1}(l_{i-1}) = p_i(0)\,;\; Q_{i-1}(l_{i-1}) = Q_i(0)$. Итак, значения давления и расхода в конце $n-$го участка описывается следующим соотношением:

$$\begin{bmatrix} Q_n(l_n) \\ p_n(l_n) \end{bmatrix} = \prod_{j=1}^{n} \left[A_j^{(k)}\right] \begin{bmatrix} Q_1(0) \\ p_1(0) \end{bmatrix}. \tag{6}$$

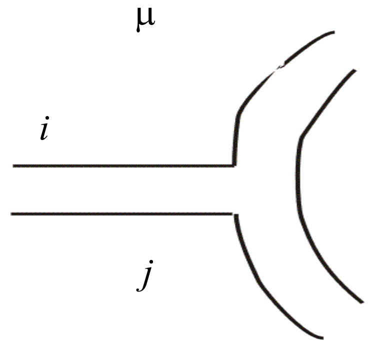

Рисунок 2 - Схема коллектора

Если трубопровод содержит коллектор (рис.2), то выполняются такие уравнения:

$$Q_i(l) = Q_j(0) + Q_{\mu}(0);\ p_i(l) = p_j(0) = p_{\mu}(0)\,. \tag{7}$$

Задавая граничные условия на левом конце трубопровода и используя (5) n раз получим соотношение для правого конца с номером n (рис.1). Удовлетворяя граничным условиям на правом конце трубопровода, получим одно нелинейное алгебраическое уравнение относительно частоты колебаний ω. Решая это уравнение, найдем частоту колебаний. Далее соотношения (5) и результаты расчета частот колебаний используются для определения форм свободных колебаний.

3. Импедансный метод

В дальнейшем для исследования динамики трубопровода (рис.1), воспользуемся импедансным методом [6]. Тогда к системе (1) применим преобразования Лапласа по переменной t:

$$p(x,s) = \int_0^{\infty} p(x,t)\exp(-st)dt\,;\ Q(x,s) = \int_0^{\infty} Q(x,t)\exp(-st)dt\,. \tag{8}$$

Система (1) относительно функций $p(x,s); Q(x,s)$ примет следующий вид:

$$\frac{d^2 p}{dx^2} = \gamma^2(s)p\,;\ \frac{d^2 Q}{dx^2} = \gamma^2(s)Q, \tag{9}$$

где $\gamma = \sqrt{Z_1(s)Y_1(s)}$. Решения уравнений (9) представим так:

$$p(x,s) = C_1(s)\operatorname{ch}\gamma(s)x + C_2(s)\operatorname{sh}\gamma(s)x\,;$$

$$Q(x,s) = \frac{1}{Z_B(s)}\left[C_1(s)\operatorname{sh}\gamma(s)x + C_2(s)\operatorname{ch}\gamma(s)x\right], \tag{10}$$

где $Z_B(s) = \sqrt{Z_1(s)/Y_1(s)}$ – характеристический импеданс, или волновое сопротивление трубопровода. Для определения констант интегрирования введем входной импеданс трубопровода:

$$Z(0,s) = \frac{p(0,s)}{Q(0,s)}\,. \tag{11}$$

Тогда константы интегрирования определяются так: $C_1(s) = p(0,s);\ C_2(s) = -\dfrac{p(0,s)Z_B(s)}{Z(0,s)}$. Введем комплексный гиперболический угол нагрузки: $a_l = \operatorname{arth}\dfrac{Z(l,s)}{Z_B(s)}$. Тогда параметр $Z(0,s)$ представим так:

$$\frac{Z(0,s)}{Z_B(s)} = \operatorname{th}\left(\gamma\, l + a_l(s)\right). \tag{12}$$

Теперь рассмотрим метод расчета собственных частот колебаний окислителя в упругой ступенчатой трубе (рис.1). Для этого произведем сшивание расхода и давления при ступенчатом изменении поперечного сечения при переходе от участка с номером $(i-1)$ к участку с номером (i). Это можно записать через входной и выходной импеданс трубопровода так:

$$Z_{i-1}(l_{i-1};s) = Z_i(0;s). \tag{13}$$

Это уравнение может быть переписано в следующем виде:

$$Z_{B,i-1}(s)\operatorname{th}a_{i-1} = Z_{B,i}(s)\operatorname{th}\left(a_i + \gamma_i l_i\right).$$

Последнее соотношение можно представить так:

$$a_{i-1} = \operatorname{arth}\frac{Z_{B,i}}{Z_{B,i-1}}\operatorname{th}\left(a_i + \gamma_i l_i\right);\; i = \overline{1,n-1}. \tag{14}$$

Собственные частоты трубы (рис.1) описываются системой алгебраических уравнений (14) и дополнительным уравнением:

$$Z_1(0,s) = Z_{B,1}(s)\operatorname{th}\left(\gamma_1 l_1 + a_1\right). \tag{15}$$

Теперь воспользуемся следующими соотношениями: $\gamma_j(\mathbf{i}\omega) = \mathbf{i}\omega c_j^{-1}$; $Z_{B,j} = \rho c_j F_j^{-1}$; $j = \overline{1,n}$. В результате уравнения (14, 15) примут следующий вид:

$$a_j = \operatorname{arth}\frac{c_{j+1}F_j}{c_j F_{j+1}}\operatorname{th}\left(a_{j+1} + \mathbf{i}\frac{\omega l_{j+1}}{c_{j+1}}\right);\; Z_1(0,i\omega) = \frac{\rho c_1}{F_1}\operatorname{th}\left(\mathbf{i}\frac{\omega l_1}{c_1} + a_1\right). \tag{16}$$

Расчет собственных частот ведется от участка n к участку ***1***, то есть от правого конца трубопровода к левому. Что бы осуществить этот анализ, преобразуем уравнения (16) к более простому виду. При этом воспользуемся следующей заменой: $a_j \to \mathbf{i}\, a_j$; $j = \overline{1,n}$. Отметим, что для закрытого участка трубопровода выполняется следующее граничное условие: $a_l = 0.5\pi$, а для открытого участка граничное условие принимает вид: $a_l = 0$.

Итак, получена система алгебраических уравнений (16), описывающая частоты колебаний ступенчатой трубы. Эту систему можно представить в виде одного нелинейного алгебраического уравнения относительно f, которое решается численно.

4. Примеры расчета

Для анализа колебаний окислителя в разветвленном трубопроводе рассмотрим расчетную схему, представленную на рис.3. Этот трубопровод состоит из двух участков переменного поперечного сечения 1 и 2, за которым устанавливается коллектор и участки *3*; *4*; *5*; *6*. Длины участков обозначим $l_i; i=\overline{1,6}$, диаметры труб- D_i; их толщины δ_i. Параметры этого трубопровода представлены в таблице 1.

Таблица 1

i	1	2	3	4	5	6
l_i, *см*	2,302	5,67	1,512	4,818	1,512	4,818
D_i, *см*	0,2905	0,2	0,125	0,14	0,125	0,14
δ_i, *см*	0,0035	$0{,}0035^3$	0,0025	0,002	0,0025	0,002
E_i, $кг/см^2$	$0{,}69\cdot10^{11}$	$0{,}69\cdot10^{11}$	$2{,}1\cdot10^{11}$	$2{,}1\cdot10^{11}$	$2{,}1\cdot10^{11}$	$2{,}1\cdot10^{11}$

Результаты расчета первых трех частот колебаний жидкости в разветвленной магистрали окислителя, полученные рассмотренными выше методами, представлены в таблице 4. Численные значения, полученные импедансным методом и на основании четырехполюсника, совпадают. Первая частота, полученная методом конечных элементов несколько ниже соответствующей частоты, полученной импедансным методом, а вторые и третьи собственные частоты, полученные импедансным методом и методом конечных элементов, близки.

Таблица 2

Частоты	Импедансный метод	Метод четырехполюсника	Метод конечных элементов
ω_1	13.057	13.057	11.894
ω_2	33.59	33.59	33.626
ω_3	54.071	54.071	55.405

Заключение

Методы импедансный и четырехполюсника являются аналитическими и обеспечивают достаточно высокую точность расчета, но требуют вывода новых формул для каждой новой конфигурации трубопровода. Метод четырехполюсника значительно проще в теоретическом плане в сравнении с импедансным методом и является более эффективным. Во-первых, он наиболее прост с точки зрения математической реализации. Во-вторых, он чрезвычайно эффективно позволяет определить собственные частоты колебаний сложных разветвленных трубопроводов. В-третьих, этот метод позволяет легко посчитать собственные формы колебаний и учесть в модели демпферы и различные граничные условия системы.

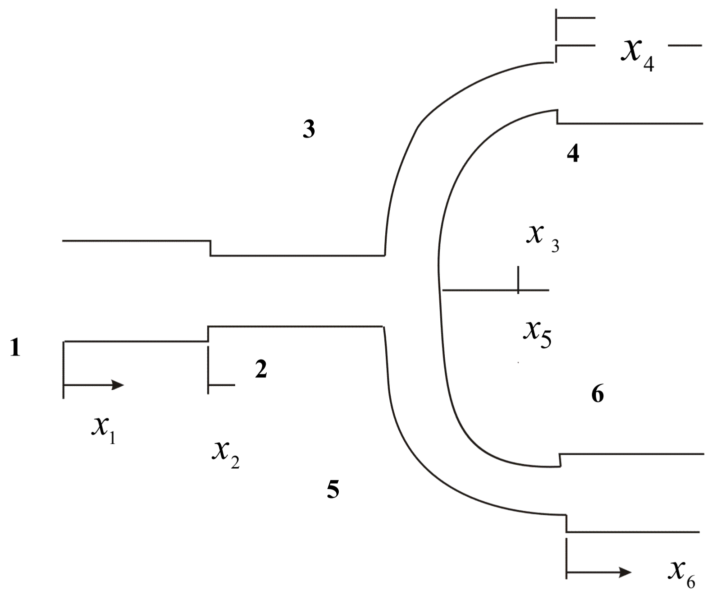

Рисунок 3 - Расчетная схема разветвленной магистрали окислителя

Литература: 1. Колесников К.С., Самойлов Е.А., Рыбак С.А. Динамика топливных систем ЖРД.- М.: Машиностроение, 1975. –172 с. 2. Натанзон М.С. Продольные автоколебания жидкостной ракеты.- М.: Машиностроение, 1977. –206 с. 3. Овсянников Б.В., Боровский Б.И. Теория и расчет агрегатов питания жидкостных ракетных двигателей.- М.: Машиностроение, 1986. –376 с. 4. Башта Т.М. Гидравлические приводы летательных аппаратов. -М.: Машиностроение, 1967. –498 с. 5. Черночуб И.П., Попов А.Е., Доценко П.Д. Динамика трубопроводных систем.- Харьков: "Основа", 1998. – 222 с. 6. Пилипенко В.В., Задонцев В.А., Натанзон М.С. Кавитационные автоколебания и динамика гидросистем.- М.: Машиностроение, 1977. –352 с.

Аврамов К.В., Філіпковський С.В., Федоров В.М., Пірог В.А., Філіпковська Л.А.

ПОРІВНЯЛЬНА ОЦІНКА МЕТОДІВ АНАЛІЗУ КОЛИВАНЬ РІДИНИ У РОЗГАЛУЖЕНИХ ТРУБОПРОВОДАХ

У статті порівнюються два аналітичних методів розрахунку коливань рідини у трубопроводах. До цих методів належіть метод чотирьохполюсника та імпедансний метод. Наводиться пример розрахунку трубопроводу ракети.

Avramov K.V., Filipkovsky S.V., Fedorov V.M., Pirog V.A., Filipkovskya L.A.

COMPARISON OF METHODS FOR VIBRATIONS OF FLUID IN BRANCHED PIPELINES

Two analytical methods of calculations of fluid vibrations in pipelines are compared in this paper. The method of four pole and impedance method are considered. The example of calculation of missile pipeline is presented in this paper.