

УДК 531.631.361

Ольшанский В.П., Ольшанский С.В.

О ВЛИЯНИИ СИЛЫ МАГНУСА НА ТРАЕКТОРИЮ ПОЛЁТА ВРАЩАЮЩЕЙСЯ СФЕРИЧЕСКОЙ ЧАСТИЦЫ

1. Актуальность темы и цель исследования. Закрутка зёрен при полёте является одним из способов интенсификации аэродинамического разделения зерновых смесей. Полёт вращающейся частицы происходит под действием силы Магнуса, которая искривляет траекторию движения в зависимости от угловой скорости и плотности тела. Это свойство можно использовать для разделения частиц в ходе полёта. Поэтому исследование баллистических свойств вращающихся частиц представляет практический интерес для интенсификации аэродинамического сепарирования зерновых смесей.

Проблема интенсификации аэродинамического сепарирования решалась в диссертации [1], где также представлены публикации связанные с её решением. Из последних работ этого направления отметим [2,3]. Если использовать квадратичную зависимость силы сопротивления от скорости полёта, то аналитическое решение нелинейных уравнений полёта частицы вызывает существенные затруднения. В случае линейной зависимости силы сопротивления от скорости движения, допустимой при небольших скоростях полёта, задача динамики решается аналитически, что приводит к замкнутым расчётным формулам. Поэтому в данной работе выбор сделан в пользу линейной модели движения [4].

Целью статьи является получение формул для расчёта проекций скорости и траектории полёта центра масс сферической частицы, вращающейся вокруг горизонтальной оси с постоянной угловой скоростью и анализ влияния различных параметров на кинематические характеристики в рамках линейной модели.

2. Изложение основного содержания. Пусть сферическая частица имеет радиус r и массу m . Её вращение с постоянной угловой скоростью ω происходит вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной вертикальной плоскости xOz , показанной на рис. 1.

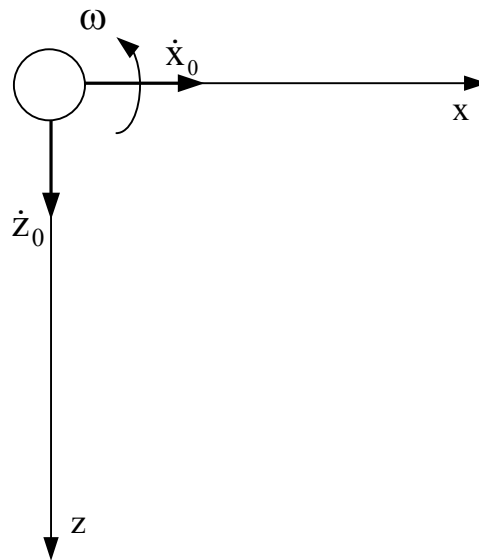


Рисунок 1 - Расчётная схема

Изучая движение частицы на небольшом промежутке времени, изменением её угловой скорости вращения пренебрегаем.

Координаты траектории полёта центра масс в этом случае определяются системой дифференциальных уравнений

$$m\ddot{x} = \frac{8\pi}{3}\delta r^3\omega\dot{z} - k_1r^2\dot{x}; \quad (1)$$

$$m\ddot{z} = mg - \frac{8\pi}{3}\delta r^3\omega\dot{x} - k_1r^2\dot{z}.$$

Здесь δ - плотность воздушной (газовой) среды; k_1 - постоянный положительный коэффициент; g - ускорение свободного падения; точка над символом означает производную по времени t .

Слагаемые с множителем ω в системе (1) учитывают действие силы Магнуса, а с множителем k_1 - действие силы сопротивления среды.

Если плотность однородной частицы ρ постоянна, то её масса равна

$$m = \frac{4}{3}\pi\rho r^3.$$

Поделив уравнения (1) на m , приходим к системе

$$\ddot{x} = b\dot{z} - k\dot{x}; \quad (2)$$

$$\ddot{z} = g - b\dot{x} - k\dot{z},$$

в которой $b = 2\delta\omega\rho^{-1}$; $k = \frac{3k_1}{4\pi\rho r}$.

Уравнения (2) решаем при начальных условиях:

$$\dot{x}(0) = \dot{x}_0; \quad \dot{z}(0) = \dot{z}_0; \quad x(0) = z(0) = 0, \quad (3)$$

обозначив через \dot{x}_0 и \dot{z}_0 проекции стартовой скорости центра масс.

Решение системы (2) ищем в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \exp(-kt)[c_1 \sin(bt) + c_2 \cos(bt)]; \\ \dot{z}(t) &= \exp(-kt)[c_1 \cos(bt) - c_2 \sin(bt)], \end{aligned} \quad (4)$$

где $c_1 = c_1(t)$; $c_2 = c_2(t)$ - неизвестные функции времени.

Подставив (4) в (2), получаем

$$\dot{c}_1 = g \exp(kt) \cos(bt); \quad \dot{c}_2 = -g \exp(kt) \sin(bt). \quad (5)$$

Интегрированием выражений (5) находим с точностью до произвольных постоянных c_1^* и c_2^*

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{g}{k^2 + b^2} \exp(kt)[k \cos(bt) + b \sin(bt)] + c_1^*; \\ c_2 &= -\frac{g}{k^2 + b^2} \exp(kt)[k \sin(bt) - b \cos(bt)] + c_2^*. \end{aligned} \quad (6)$$

Используя (3), (4) и (6), определяем постоянные

$$c_1^* = \dot{z}_0 - \frac{gk}{k^2 + b^2}; \quad c_2^* = \dot{x}_0 - \frac{gb}{k^2 + b^2}. \quad (7)$$

Выражения (4), (6) и (7) позволяют проводить расчёт скорости полёта центра масс. Из них следует, что

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{gb}{k^2 + b^2} + \exp(-kt)[c_1^* \sin(bt) + c_2^* \cos(bt)]; \\ \dot{z}(t) &= \frac{gk}{k^2 + b^2} + \exp(-kt)[c_1^* \cos(bt) - c_2^* \sin(bt)]. \end{aligned} \quad (8)$$

Проекция скорости имеют следующие асимптотические значения при $t \rightarrow \infty$:

$$\dot{x}_a = \frac{gb}{k^2 + b^2}; \quad \dot{y}_a = \frac{gk}{k^2 + b^2}.$$

При отсутствии вращения: $b = 0$ и $\dot{x}_a = 0$; $\dot{y}_a = g / k$.

Если не учитывать сопротивление среды ($k = 0$), то $\dot{x}_a = g / b$; $\dot{y}_a = 0$.

В первом случае центр масс движется вертикально, а во втором – горизонтально. Асимптотическое значение скорости полёта центра масс

$$v_a = \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \frac{g}{\sqrt{k^2 + b^2}}$$

меньше чем скорость витания невращающейся частицы, равная g / k .

Координаты траектории центра масс определим интегрированием

$$x(t) = \int_0^t \dot{x}(t) dt; \quad z(t) = \int_0^t \dot{z}(t) dt. \quad (9)$$

Подставив выражения (8) в (9), с учётом табличных интегралов [5], находим

$$\begin{aligned} x(t)(k^2 + b^2) &= gbt - \exp(-kt) \{ c_1^* [k \sin(bt) + b \cos(bt)] + \\ &+ c_2^* [k \cos(bt) - b \sin(bt)] \} + bc_1^* + kc_2^*; \\ z(t)(k^2 + b^2) &= gkt - \exp(-kt) \{ c_1^* [k \cos(bt) - b \sin(bt)] - c_2^* \times \\ &\times [k \sin(bt) + b \cos(bt)] \} + kc_1^* - bc_2^*. \end{aligned}$$

При $t \rightarrow \infty$

$$x(t) \sim \frac{1}{k^2 + b^2} (gbt + bc_1^* + kc_2^*);$$

$$z(t) \sim \frac{1}{k^2 + b^2} (gkt + kc_1^* - bc_2^*).$$

Исключив в последних выражениях t получаем наклонную асимптоту траектории полёта

$$z = \frac{1}{b} (kx - c_2^*).$$

Такой асимптоты нет при падении частицы без вращения.

Характерно, что положение асимптоты не зависит от значения \dot{z}_0 .

Результаты расчётов и выводы. Проведём расчёты для горошины [6] при следующих исходных данных: $\rho = 1400 \text{ кг/м}^3$; $\delta = 1 \text{ кг/м}^3$ $r_0 = 3 \cdot 10^{-3} \text{ м}$; $\omega = 1000 \text{ с}^{-1}$; $k_1 = 10^{-3} \text{ Нс/м}^3$; $z_0 = 0 \text{ м}$; $x_0 = 1 \text{ м}$.

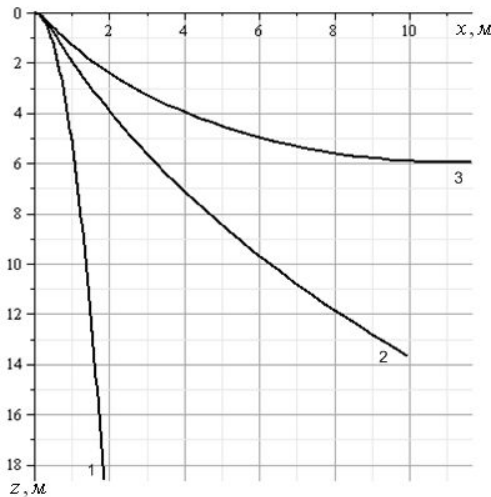


Рисунок 2 - Траектории горошинки с учётом и без учёта силы Магнуса

На рис. 2 цифрами 1,2,3 отмечены кривые, соответствующие значениям $\omega_0 = 0; 500; 1000 \text{ с}^{-1}$. Из рисунка 2 видно, что сила Магнуса существенно влияет на траекторию движения горошинки.

Рассмотрим, как влияет плотность тела на траекторию его движения. Для этого примем предыдущие исходные данные и различные значения ω и ρ .

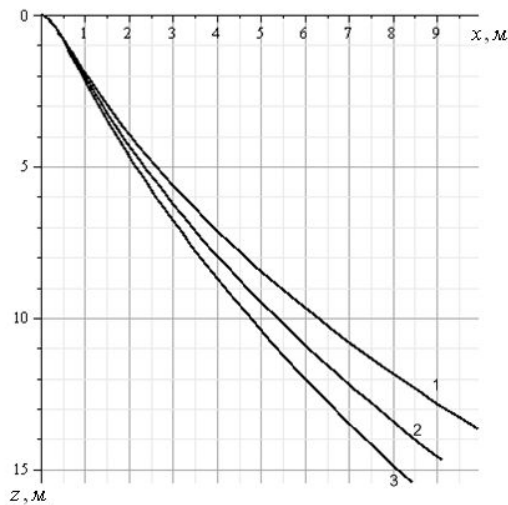


Рисунок 3 - Траектории горошинки при различных ρ и $\omega = 500 \text{ с}^{-1}$

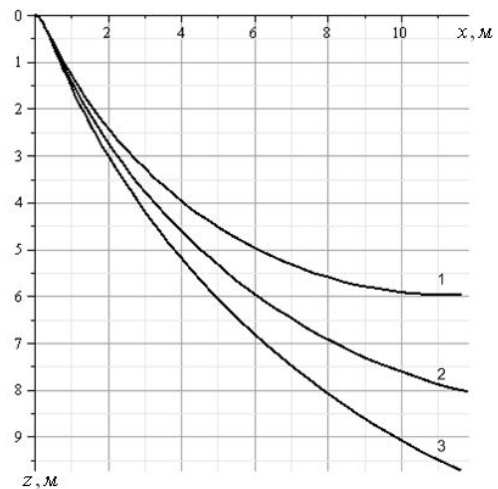


Рисунок 4 - Траектории горошинки при различных ρ и $\omega = 1000 \text{ с}^{-1}$

На рис. 3-4, цифрами 1,2,3 отмечены траектории горошинки для значений $\rho = 1200; 1400; 1600 \text{ кг/м}^3$. Как видно из рисунков, с возрастанием угловой скорости ω существенней различаются траектории горошинок, что можно использовать при сепарировании семян по плотности. Однако, для практической реализации эффекта Магнуса нужно создавать большие угловые скорости вращения частиц во время их полёта.

Литература: 1. Злочевский В.Л. Интенсификация процесса аэродинамического разделения зерновых материалов: диссертация доктора техн. наук. 05.20.01 – Барнаул,

1985. – 387 с. 2. Онищенко Б.В. Теоретичні дослідження процесу осідання краплі // Сільськогосподарські машини: Зб. наук. ст. – Вип. 18. Луцьк: ЛНТУ, 2009, - С. 330–340. 3. Богомолів А.В. Учёт вращения частицы зерновой смеси при движении её в воздушном потоке // Сучасні напрямки технології та механізації процесів переробних та харчових виробництв. Вісник ХДТУСГ, 2002. – Вип. 9. – С. 5–14. 4. Сагитов М.Н. О движении вращающегося шара. Сборник трудов соискателей и аспирантов. Министерство высшего и среднего специального образования Казахской ССР, Т. 1, ч.2, 1963. – С. 42–49. 5. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. М. Наука, 1981. – 800 с. 6. Гортинский В.В., Демский А.Б., Борискин М.А. Процессы сепарирования на зерноперерабатывающих предприятиях. М.: Колос, Изд. второе, 1980. – 304 с.

Ольшанський В.П., Ольшанський С.В.

ПРО ВПЛИВ СИЛИ МАГНУСА НА ТРАЄКТОРІЮ ПОЛЬОТУ СФЕРИЧНОЇ
ЧАСТКИ, ЯКА ОБЕРТАЄТЬСЯ

Виведено формули для розрахунку координат траєкторії польоту центру мас сферичної частки, яка обертається навколо горизонтальної вісі в нерухомому газовому середовищі з урахуванням лінійного опору середовища та дії сили Магнуса, що виникає внаслідок обертання тіла.

Olshanskii V.P., Olshanskii S.V.

ABOUT INFLUENCE OF MAGNUS FORCE ON A TRAJECTORY OF FLIGHT A
ROTATING SPHERICAL PARTICLE

The formulas for account of coordinates a trajectory of flight of the centre of mass of a rotating spherical particle around of a horizontal axis in motionless gas environment are deduced in view of linear resistance of environment and action of Magnus force, arising owing to rotation of a body.
