
УДК 621.432.4:534.16

Шатохин В.М., Ярмак Н.С.

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В РОТОРНО-ПЛАНЕТАРНЫХ ГИДРОНАСОСАХ

Введение

Гидравлические насосы и двигатели, являясь основными агрегатами объемной гидропередачи, определяют надежность и ресурс гидропривода, его технические и экономические показатели. Среди современных гидромашин внимание привлекает класс роторно-планетарных трохоидных насосов и двигателей. Отметим, что фирмы мирового уровня занимаются конструированием и изготовлением насосов, высокоскоростных нагнетателей и высокомоментных многороторных гидромоторов преимущественно такого типа [1]. К основным достоинствам роторно-планетарных гидромашин (РПГ) следует отнести их долговечность, значительно более низкую стоимость и металлоемкость, низкие расходы на эксплуатацию, более высокие технические показатели. РПГ – качественно новая альтернатива поршневым, турбинным и винтовым устройствам, которые используются в выше названных целях.

Таким образом, разработка роторно-планетарных машин трохоидного типа будет способствовать появлению на Украине новейшей техники мирового уровня.

В настоящее время имеется значительное количество трудов, в которых рассматриваются особенности конструкции роторно-планетарных машин трохоидного типа, геометрическим и кинематическим аспектам их функционирования [1-5]. Работы, посвященные созданию математических моделей РПГ, исследованию динамических процессов в них в настоящее время практически отсутствуют. Это затрудняет: рациональный выбор конструктивных параметров, обеспечивающих допустимый уровень вибраций и нагрузки на подшипники; определение параметров противовесов и амортизаторов; выбор электродвигателей; исследование процессов пуска и установившихся режимов работы гидромашин.

Целью данной работы является создание достоверной математической модели роторно-планетарных гидронасосов с асинхронным электродвигателем (АД) в качестве привода для решения перечисленных задач.

1. Роторно-планетарные гидромашини.

На рис. 1 показан один из вариантов исполнения гидромашини с двухдуговым

эпитрохoidalным контуром рабочей полости [3]. Основными деталями являются статор 1, торцовые диски 2, крышки корпуса 9, ротор 17 с лопатками радиального уплотнения 16 и торцовыми уплотнителями 14, вал 4 и противовесы 3. Если гидромашина рассчитывается на небольшую скорость вращения ротора, а незначительная вибрация ее корпуса не будет иметь значения, то противовесов 3 не делают, и конструкция гидромашин упрощается. Вал машины установлен в двух подшипниках скольжения 5.

Ротор приводится во вращение эксцентриком 6, который вращается в подшипнике скольжения 7, запрессованном в теле ротора. На одном из торцов ротора монтируется шестерня 13 синхронизирующего аппарата, которая находится в зацеплении с неподвижной шестерней 8, установленной на торцевой крышке.

Распределительные диски, статор и крышки корпуса имеют резиновые уплотнители 10 для исключения утечек жидкости. Каналы 15 статора служат для сообщения между собой распределительных окон противоположных дисков (для осуществления двухстороннего распределения). Распределение осуществляется ротором. Распределительные окна всасывания и нагнетания сообщаются со штуцерами, находящимися в приливах 11 крышки корпуса, для подсоединения гидромашин к магистрали. Статор и крышка соединяются болтами 12.

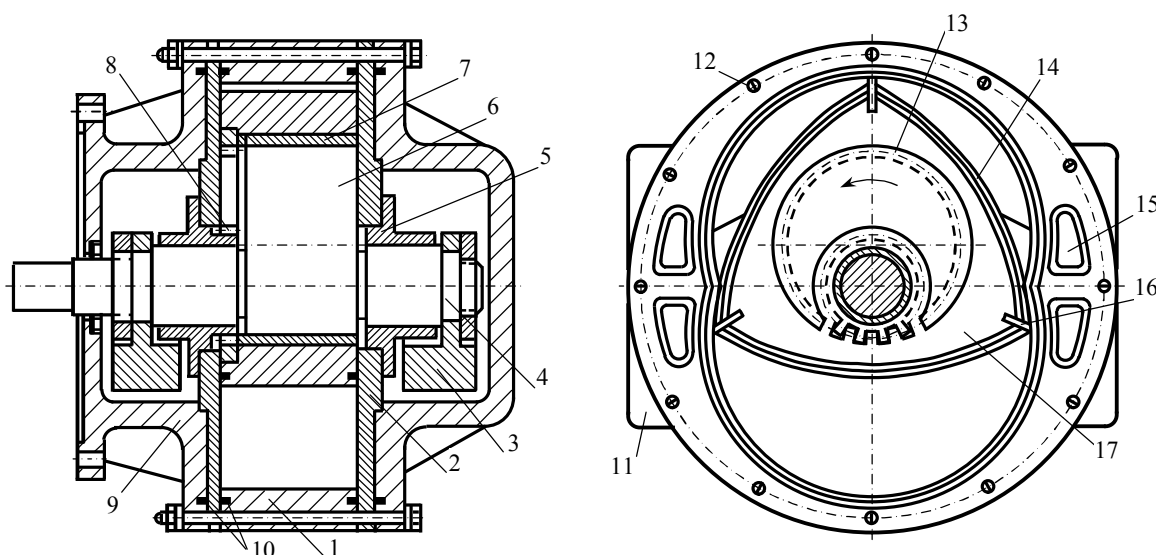


Рисунок 1 – Вариант конструкции роторно-планетарной гидромашин с эпитрохoidalным контуром рабочей полости

Рабочая полость машин выполнена в виде двухдуговой эпитрохoidal с модулем $m = 3/2$, а ротор – в виде треугольника Релло ($z = 3$) [1]. Каждая камера в данной машин связана со своими штуцерами и работает независимо. При необходимости камеры могут работать с одной магистралью нагнетания. Ротор, выходной вал гидромашин вращаются в одну сторону. Скорость вращения вала в три раза превышает скорость вращения ротора.

2. Математическая модель динамических процессов в роторно-планетарных гидронасосах с АД.

Обобщенные координаты системы. На рис. 2 показаны насос 3 с приводным электродвигателем 1, основания которых 4 размещены на амортизаторах 5. Валы мотора и насоса соединены резино-пальцевой муфтой 2.

Уравнения движения запишем, применяя методику составления уравнений Лагранжа второго рода. Воспользуемся схемой гидронасоса (рис. 3), на которой ротор и

корпус изображены в текущей момент времени.

На схеме показаны: Oxy – основная (неподвижная) система координат, относительно которой гидронасос совершает плоскопараллельное движение, причем ее начало совпадает с центром масс (точка C) статора и вала гидромашины (без эксцентрика и противовесов), когда устройство находится в положении статического равновесия (точки C и O при этом совпадают); $Sx''y''$ – подвижная, поступательно перемещающаяся система координат; $Sx'y'$ – подвижная, жестко связанная со статором насоса система координат; x, y – текущие значения координат точки C ; ϑ – угол поворота подвижной системы координат $Sx'y'$; φ – угол поворота вала насоса; φ_r – угол поворота ротора.

Обобщенными координатами рассматриваемой системы являются: углы поворота ротора электродвигателя и вала насоса соответственно $q_1 = \psi$, $q_2 = \varphi$; декартовы координаты $q_3 = x$ и $q_4 = y$, определяющие положение центра масс статора и вала насоса (без эксцентрика и противовесов); угол поворота статора $q_5 = \vartheta$.

Кинетическая энергия системы. Запишем выражения для кинетической энергии тел, образующих систему. Хотя вал насоса жестко связан с эксцентриком и противовесами, кинетические энергии этих тел целесообразно представить разными выражениями. Кроме большей наглядности представления суммарной кинетической энергии системы, это упростит исследование влияния противовесов на характер динамических процессов в ней.

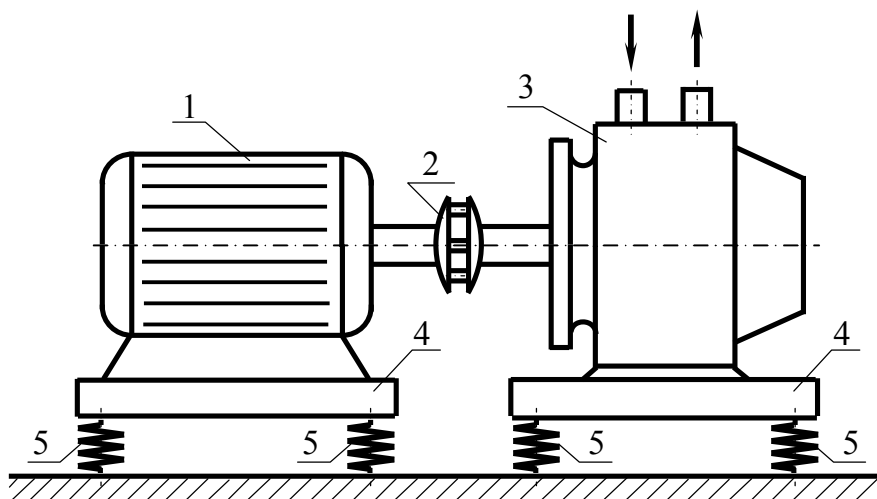


Рисунок 2 – Схема гидронасоса с приводным электродвигателем

Кинетическая энергия статора насоса при плоскопараллельном движении

$$T_1 = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} J \dot{\vartheta}^2 = \frac{1}{2} M (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} J \dot{\vartheta}^2, \quad (1)$$

где M – масса статора;

v_C – скорость точки C (центра масс статора);

J – момент инерции статора относительно оси, проходящей через точку C .

Кинетическая энергия вала насоса (без эксцентрика и противовесов) при плоскопараллельном движении

$$T_2 = \frac{1}{2} m_g v_C^2 + \frac{1}{2} I_g \omega_g^2 = \frac{1}{2} m_g (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} I_g (\dot{\phi} + \dot{\vartheta})^2, \quad (2)$$

где m_g – масса вала насоса;

I_g – момент инерции вала относительно оси, проходящей через точку C ;

$\omega_g = \dot{\phi} + \dot{\vartheta}$ – абсолютная угловая скорость вала (следует из теории сложения вращений вокруг параллельных осей).

Кинетическая энергия эксцентрика при плоскопараллельном движении

$$T_3 = \frac{1}{2} m_e v_{O_1}^2 + \frac{1}{2} I_e \omega_e^2, \quad (3)$$

где m_e – масса эксцентрика;

v_{O_1} – абсолютная скорость центра масс эксцентрика;

I_e – момент инерции эксцентрика относительно оси, проходящей через центр масс (точка O_1);

$\omega_e = \dot{\phi} + \dot{\vartheta}$ – абсолютная угловая скорость эксцентрика.

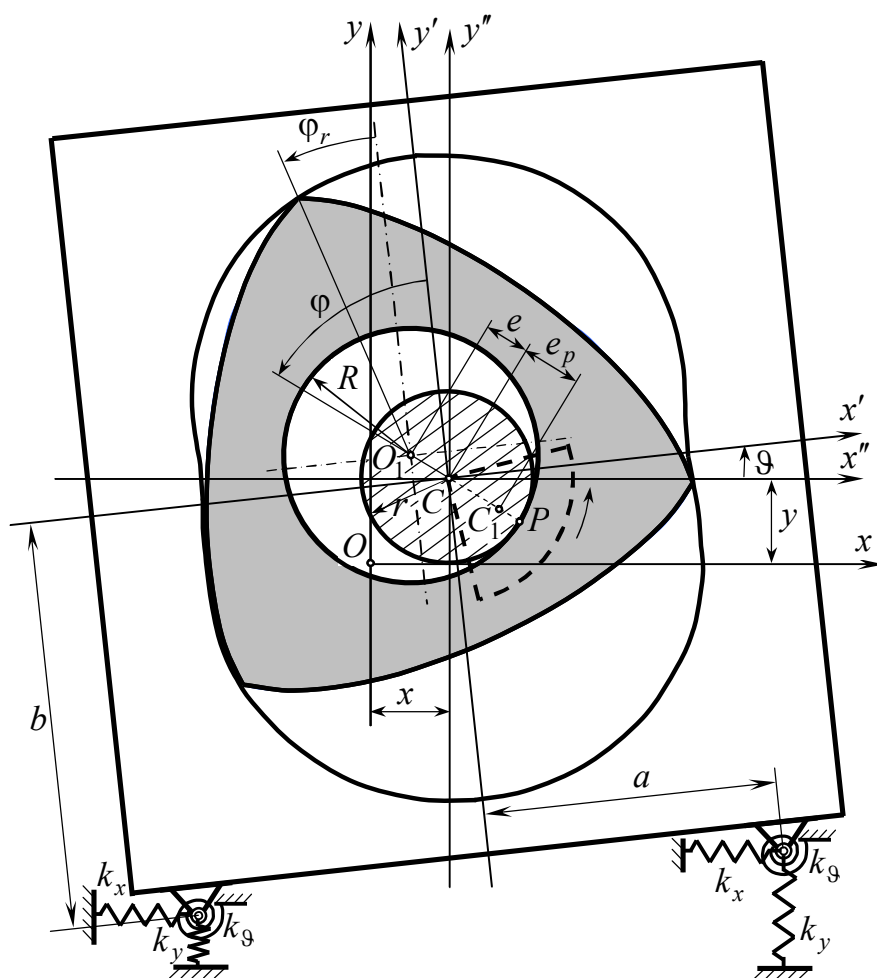


Рисунок 3 – Расчетная схема гидронасоса

Координаты точки O_1 в неподвижной координатной системе Oxy (следуют из формул преобразования координат при плоскопараллельном движении; см. рис. 3) имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} x_{O_1} &= x - e \sin \varphi \cos \vartheta - e \cos \varphi \sin \vartheta = x - e \sin(\varphi + \vartheta); \\ y_{O_1} &= y - e \sin \varphi \sin \vartheta + e \cos \varphi \cos \vartheta = y + e \cos(\varphi + \vartheta), \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где $e = CO_1$ – эксцентриситет.

С учетом того, что $v_{O_1}^2 = \dot{x}_{O_1}^2 + \dot{y}_{O_1}^2$, формула (3), после несложных преобразований, приобретает вид

$$\begin{aligned} T_3 &= \frac{1}{2} m_e \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_e \dot{y}^2 + \frac{1}{2} (m_e e^2 + I_e) (\dot{\varphi} + \dot{\vartheta})^2 - \\ &\quad - m_e e (\dot{\varphi} + \dot{\vartheta}) [\dot{x} \cos(\varphi + \vartheta) + \dot{y} \sin(\varphi + \vartheta)]. \end{aligned} \quad (5)$$

Кинетическая энергия противовесов при плоскопараллельном движении (на рис. 3 противовесы показаны штриховой линией) находится аналогично предыдущему случаю. Имеем

$$\begin{aligned} T_4 &= \frac{1}{2} m_p \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_p \dot{y}^2 + \frac{1}{2} (m_p e_p^2 + I_p) (\dot{\varphi} + \dot{\vartheta})^2 + \\ &\quad + m_p e_p (\dot{\varphi} + \dot{\vartheta}) [\dot{x} \cos(\varphi + \vartheta) + \dot{y} \sin(\varphi + \vartheta)], \end{aligned} \quad (6)$$

где m_p – масса противовесов;

I_p – момент инерции противовесов относительно оси, проходящей через центр масс (точка C_1);

$\omega_p = \dot{\varphi} + \dot{\vartheta}$ – абсолютная угловая скорость противовесов;

$e_p = CC_1$ – эксцентриситет.

Кинетическая энергия ротора при плоскопараллельном движении (см. рис. 3)

$$T_5 = m_r \frac{v_{O_1}^2}{2} + I_r \frac{\omega_r^2}{2}, \quad (7)$$

где m_r – масса ротора;

v_{O_1} – абсолютная скорость центра масс ротора;

I_r – момент инерции ротора относительно оси, проходящей через центр масс (точка O_1);

ω_r – абсолютная угловая скорость ротора.

Нетрудно показать, что для устройства с модулем $m = R/r = 3/2$ при неподвиж-

ном статоре угловая скорость ротора в три раза меньше угловой скорости вала. Здесь через r и R обозначены радиусы начальных окружностей неподвижной 8 и подвижной 13 шестерен (см. рис. 1, 3).

Центр масс ротора O_1 описывает окружность радиуса $CO_1 = e$ с центром в точке C неподвижной шестерни. Модуль скорости точки O_1

$$v_{O_1} = \omega e = \omega(R - r) = \omega \frac{r}{2}. \quad (8)$$

С другой стороны, так как точка P является мгновенным центром скоростей для ротора, совершающего плоскопараллельное движение, то

$$v_{O_1} = \omega_r \cdot PO_1 = \omega_r R = \omega_r \frac{3}{2} r. \quad (9)$$

Сравнивая правые части этих выражений, получим

$$\omega_r = \frac{\omega}{3}. \quad (10)$$

При учете колебаний статора выражение для абсолютной угловой скорости ротора будет очевидно таким

$$\omega_r = \frac{\dot{\varphi}}{3} + \dot{\vartheta}. \quad (11)$$

С учетом (11) и того, что $v_{O_1}^2 = \dot{x}_{O_1}^2 + \dot{y}_{O_1}^2$ (см. выше), выражение (7) для кинетической энергии ротора приобретает вид

$$T_5 = \frac{1}{2} m_r \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_r \dot{y}^2 + \frac{1}{2} m_r e^2 (\dot{\varphi} + \dot{\vartheta})^2 - m_r e (\dot{\varphi} + \dot{\vartheta}) [\dot{x} \cos(\varphi + \vartheta) + \dot{y} \sin(\varphi + \vartheta)] + \frac{1}{2} I_r \left(\frac{\dot{\varphi}}{3} + \dot{\vartheta} \right)^2. \quad (12)$$

Кинетическая энергия ротора электродвигателя

$$T_6 = J_e \frac{\dot{\psi}^2}{2}, \quad (13)$$

где J_e – момент инерции ротора электродвигателя.

Полная кинетическая энергия системы с учетом формул (1), (2), (5), (6), (12), (13)

$$T = \sum_{k=1}^6 T_k. \quad (14)$$

Здесь очевидное громоздкое выражение для T не приведено. В соответствии с теорией малых колебаний коэффициенты при обобщенных скоростях следует разложить в ряд Маклорена вблизи положения устойчивого равновесия ($x = y = \vartheta = 0$) и удерживать в разложении только первый член. Фактически это означает, что при разложении $\cos(\varphi + \vartheta)$ и $\sin(\varphi + \vartheta)$ необходимо ограничиться только значениями указанных функций при $\vartheta = 0$, т.е. $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$ соответственно. Принимая это во внимание, введем для компактности записи обозначения:

$$\alpha_1 = M + m_g + m_e + m_p + m_r; \quad \alpha_2 = m_e e^2 + I_e; \quad \alpha_3 = m_p e_p^2 + I_p;$$

$$\alpha_4 = m_r e^2 + I_r; \quad \alpha_5 = m_r e^2 + \frac{I_r}{9}; \quad \alpha_6 = m_r e^2 + \frac{I_r}{3}; \quad \alpha_7 = J + I_g + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4;$$

$$\alpha_8 = I_g + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_5; \quad \alpha_9 = m_p e_p - (m_e + m_r)e; \quad \alpha_{10} = I_g + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_6.$$

Тогда полная кинетическая энергия системы

$$T = \frac{1}{2} J_e \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2} \alpha_8 \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} \alpha_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \alpha_1 \dot{y}^2 + \frac{1}{2} \alpha_7 \dot{\vartheta}^2 +$$

$$+ \alpha_9 \cos \varphi \cdot \dot{\phi} \dot{x} + \alpha_9 \sin \varphi \cdot \dot{\phi} \dot{y} + \alpha_{10} \dot{\phi} \dot{\vartheta} + \alpha_9 \cos \varphi \cdot \dot{x} \dot{\vartheta} + \alpha_9 \sin \varphi \cdot \dot{y} \dot{\vartheta}. \quad (15)$$

Обобщенные восстанавливающие силы. Потенциальная энергия системы составит из энергии положения и энергии деформации амортизаторов и упругого соединения валов (упругой муфты) насоса и электродвигателя.

Полагая потенциальную энергию в положении статического равновесия равной нулю, потенциальную энергию сил тяжести тел в текущем положении системы (см. рис. 3) можно представить следующим образом.

Потенциальная энергия статора и вала насоса (без эксцентрика и противовесов)

$$\Pi_1 = (M + m_g) g y. \quad (16)$$

где $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ – ускорение свободного падения.

Потенциальная энергия эксцентрика

$$\Pi_2 = m_e g \{ y - [e - e \cos(\varphi + \vartheta)] \}. \quad (17)$$

Потенциальная энергия противовесов

$$\Pi_3 = m_p g \{ y + [e_p - e_p \cos(\varphi + \vartheta)] \}. \quad (18)$$

Потенциальная энергия ротора

$$\Pi_4 = m_r g \{ y + [e - e \cos(\varphi + \vartheta)] \}. \quad (19)$$

Выражение суммарной потенциальной энергии сил тяжести с учетом (16)÷(19) имеет вид

$$\sum_{k=1}^4 \Pi_k = \alpha_1 g y + \alpha_0 g [1 - \cos(\varphi + \vartheta)]. \quad (20)$$

Запишем выражения для потенциальной энергии упругих сил, полагая, что насос отклонился от положения статического равновесия (см. рис. 3).

С учетом обозначений рис. 3 вертикальные координаты верхних точек левого и правого амортизаторов в отклоненном положении можно представить соответственно следующим образом:

$$y - a \sin \vartheta - b \cos \vartheta, \quad y + a \sin \vartheta - b \cos \vartheta.$$

Записав выражение для вертикальных деформаций, после очевидных преобразований, получим потенциальную энергию растяжения-сжатия четырех амортизаторов

$$\Pi_5 = 2k_y \left[y^2 + a^2 \sin^2 \vartheta + b^2 \cos^2 \vartheta - 2by \cos \vartheta + 2(b - \Delta)y + \right. \\ \left. + 2b(\Delta - b)\cos \vartheta + b(b - 2\Delta) \right], \quad (21)$$

где k_y – вертикальная жесткость амортизатора;

$$\Delta = \frac{\alpha_1 g}{4k_y} - \text{статическая (начальная) деформация амортизатора.}$$

Аналогично (см. рис. 3) горизонтальные координаты верхних точек левого и правого амортизаторов в отклоненном положении можно представить соответственно следующим образом:

$$x - a \cos \vartheta + b \sin \vartheta, \quad x + a \cos \vartheta + b \sin \vartheta.$$

Записав выражение для горизонтальных деформаций, после очевидных преобразований, получим потенциальную энергию сдвига четырех амортизаторов

$$\Pi_6 = 2k_x [x^2 + a^2 \cos^2 \vartheta + b^2 \sin^2 \vartheta + a^2 + 2bx \sin \vartheta - 2a^2 \cos \vartheta], \quad (22)$$

где k_x – жесткость амортизатора при сдвиге (в горизонтальном направлении).

Потенциальная энергия поворота четырех амортизаторов

$$\Pi_7 = 2k_g \vartheta^2, \quad (23)$$

где k_g – жесткость амортизатора при повороте.

Потенциальная энергия кручения упругой муфты между валами насоса и электродвигателя

$$\Pi_8 = \frac{1}{2} k(\varphi - \psi)^2, \quad (24)$$

где k – жесткость на кручение.

Складывая выражения (20)÷(24), получим суммарную потенциальную энергию системы

$$\Pi = \sum_{k=1}^8 \Pi_k. \quad (25)$$

Явное выражение для потенциальной энергии из-за его громоздкости и очевидности здесь не приведено.

Так как в рассматриваемом случае не все переменные по физическому смыслу являются малыми, то в разложении потенциальной энергии в ряд Маклорена вблизи положения статического равновесия $x = y = \vartheta = 0$ следовало бы при анализе малых колебаний удерживать слагаемые не выше второго порядка малости именно относительно указанных переменных. Проще, однако, ограничиться слагаемыми не выше первого порядка малости относительно переменных x, y, ϑ уже в выражениях восстанавливающих обобщенных сил, которые представляют собой взятые со знаком минус частные производные от потенциальной энергии по соответствующим обобщенным координатам. С учетом обозначений

$$\alpha_{11} = 4k_x, \alpha_{12} = \alpha_{11}b, \alpha_{13} = 4k_y, \alpha_{14} = 4[k_x b^2 + k_y(a^2 - b\Delta) + k_g], \alpha_{15} = \alpha_9 g,$$

получим:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial \Pi}{\partial \psi} &= k(\varphi - \psi); \\ -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} &= -k(\varphi - \psi) - \alpha_{15} \cos \varphi \cdot \vartheta - \alpha_{15} \sin \varphi; \\ -\frac{\partial \Pi}{\partial x} &= -\alpha_{11}x - \alpha_{12}\vartheta; \quad -\frac{\partial \Pi}{\partial y} = -\alpha_{13}y; \\ -\frac{\partial \Pi}{\partial \vartheta} &= -\alpha_{12}x - (\alpha_{14} + \alpha_{15} \cos \varphi) \cdot \vartheta - \alpha_{15} \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Обобщенные силы сопротивления. Корректное математическое описание сил сопротивления представляет сложную задачу. При исследовании переходных режимов

и расчете вынужденных резонансных колебаний, характерных для рассматриваемых устройств, влияние их невелико. Так как для указанных режимов имеет значение интегральный эффект действия сил сопротивления, для простоты описания обобщенные силы сопротивления принимались пропорциональными соответствующим обобщенным скоростям \dot{x} , \dot{y} , $\dot{\vartheta}$, т.е. в виде $Q_x^* = -\beta_x \dot{x}$, $Q_y^* = -\beta_y \dot{y}$, $Q_{\vartheta}^* = -\beta_{\vartheta} \dot{\vartheta}$. Демпфирование же на участке упругой муфты между валами – пропорциональным разности соответствующих обобщенных скоростей в виде $\beta(\dot{\varphi} - \dot{\psi})$. Модуль эквивалентного суммарного момента сопротивления, приведенный к валу насоса, естественно принять пропорциональным квадрату угловой скорости вала $M_d = \alpha \dot{\varphi}^2$ (α – коэффициент пропорциональности). Указанный момент обусловлен сопротивлением перекачиваемой жидкости, трением в подшипнике ротора, трением ротора о жидкость и торцевые диски, гидродинамическими потерями в подшипниках.

Динамическая характеристика асинхронного электродвигателя. К ротору электродвигателя приложен вращающий момент M_D , определяемый динамической характеристикой АД. Ее корректное описание, как сказано выше, для рассматриваемых устройств и режимов работы представляет непростую задачу. Проведенный анализ позволил отдать предпочтение подходу, использованному в работе [6]. При составлении соответствующего дифференциального уравнения принималось допущение, заключающееся в пренебрежении активным сопротивлением статора по сравнению с активным сопротивлением ротора. Как показали исследования, расхождение расчетных и экспериментальных моментов в этом случае составляет не более 10%. Характеристика имеет следующий вид

$$T_D^2 \xi \ddot{M}_D + T_D \xi \left(2 - \frac{T_D}{s} \dot{s} \right) \dot{M}_D + \left(1 - \frac{T_D \xi}{s} \dot{s} \right) M_D = 2 \xi M_k \beta, \quad (27)$$

где M_D – момент, развиваемый двигателем в переходном процессе;

M_k – критический момент двигателя;

$$\xi = \frac{1}{1 + \beta^2};$$

$$\beta = \frac{\omega_0 - \dot{\psi}}{\omega_0} \text{ – относительное скольжение;}$$

ω_0 – угловая скорость идеального хода;

$\dot{\psi}$ – угловая скорость электродвигателя в переходном процессе;

$s = \omega_0 - \dot{\psi}$ – текущее скольжение;

$$T_D = \frac{1}{\omega_c s_k} \text{ – электромагнитная постоянная времени;}$$

$\omega_c = 50 \cdot 2\pi$ – круговая частота напряжения сети;

$$s_k = \left(s_n + \sqrt{s_n \frac{\mu_m - 1}{\mu_i - 1}} \right) / \left(1 + \sqrt{s_n \frac{\mu_m - 1}{\mu_i - 1}} \right) \text{ – критическое скольжение [7];}$$

$$s_n = \frac{\omega_0 - \omega_n}{\omega_0} - \text{номинальное скольжение};$$

ω_n – номинальная угловая скорость;

$$\mu_m = \frac{M_k}{M_n}; \mu_u = \frac{M_s}{M_n}; \mu_i = \frac{\mu_m}{\mu_u};$$

M_n, M_s – соответственно номинальный и пусковой моменты двигателя.

Дифференциальные уравнения движения гидронасоса. Запишем необходимые дифференциальные уравнения, воспользовавшись стандартной процедурой составления уравнений Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_k} + Q_{q_k} \quad (k = \overline{1,5}), \quad (28)$$

где Q_{q_k} – обобщенные силы, которые отвечают непотенциальным силам.

Соображения, изложенные выше, позволяют представить непотенциальные обобщенные силы так:

$$\left. \begin{aligned} Q_\psi &= \beta(\dot{\varphi} - \dot{\psi}) + M_D; & Q_\varphi &= -\beta(\dot{\varphi} - \dot{\psi}) - M_d; \\ Q_x &= Q_x^* = -\beta_x \dot{x}; & Q_y &= Q_y^* = -\beta_y \dot{y}; & Q_g &= Q_g^* = -\beta_g \dot{g}. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Уравнения движения (27), после нахождения необходимых производных от кинетической энергии системы (15), при учете (26) и (29) приобретают вид:

$$\left. \begin{aligned} J_e \ddot{\psi} &= k(\varphi - \psi) + \beta(\dot{\varphi} - \dot{\psi}) + M_D; \\ \alpha_8 \ddot{\varphi} + \alpha_9 \cos \varphi \cdot \ddot{x} + \alpha_9 \sin \varphi \cdot \ddot{y} + \alpha_{10} \ddot{g} &= \\ - \alpha_9 \sin \varphi \cdot \dot{x} \dot{g} + \alpha_9 \cos \varphi \cdot \dot{y} \dot{g} - k(\varphi - \psi) - & \\ - \alpha_{15} \cos \varphi \cdot g - \alpha_{15} \sin \varphi - \beta(\dot{\varphi} - \dot{\psi}) - M_d; & \\ \alpha_9 \cos \varphi \cdot \ddot{\varphi} + \alpha_1 \ddot{x} + \alpha_9 \cos \varphi \cdot \ddot{g} &= \\ = \alpha_9 \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + \alpha_9 \sin \varphi \cdot \dot{\varphi} \dot{g} - \alpha_{11} x - \alpha_{12} g - \beta_x \dot{x}; & \\ \alpha_9 \sin \varphi \cdot \ddot{\varphi} + \alpha_1 \ddot{y} + \alpha_9 \sin \varphi \cdot \ddot{g} &= \\ = -\alpha_9 \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 - \alpha_9 \cos \varphi \cdot \dot{\varphi} \dot{g} - \alpha_{13} y - \beta_y \dot{y}; & \\ \alpha_{10} \ddot{\varphi} + \alpha_9 \cos \varphi \cdot \ddot{x} + \alpha_9 \sin \varphi \cdot \ddot{y} + \alpha_7 \ddot{g} &= \\ = \alpha_9 \sin \varphi \cdot \dot{\varphi} \dot{x} - \alpha_9 \cos \varphi \cdot \dot{\varphi} \dot{y} - \alpha_{12} x - & \\ - (\alpha_{14} + \alpha_{15} \cos \varphi) g - \alpha_{15} \sin \varphi - \beta_g \dot{g}. & \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Уравнения (30) должны интегрироваться совместно с уравнением динамической характеристики АД (27). Однако, непосредственно сделать это с использованием широко распространенных алгоритмов численного интегрирования невозможно, так как уравнения 2÷5 этой системы и уравнение (27) не разрешены относительно вторых производных $\ddot{\varphi}$, \ddot{x} , \ddot{y} , $\ddot{\vartheta}$ обобщенных координат φ , x , y , ϑ и второй производной \ddot{M}_D момента электродвигателя M_D (с учетом принятого обозначения для s в уравнение динамической характеристики войдет $\ddot{\psi}$). Чтобы это стало возможным, разрешим вначале уравнения 2÷5 относительно старшей производной только одной обобщенной координаты. Если бы матрица, образованная из коэффициентов при $\ddot{\varphi}$, \ddot{x} , \ddot{y} , $\ddot{\vartheta}$, в левой части этих уравнений

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha_8 & \alpha_9 \cos \varphi & \alpha_9 \sin \varphi & \alpha_{10} \\ \alpha_9 \cos \varphi & \alpha_1 & 0 & \alpha_9 \cos \varphi \\ \alpha_9 \sin \varphi & 0 & \alpha_1 & \alpha_9 \sin \varphi \\ \alpha_{10} & \alpha_9 \cos \varphi & \alpha_9 \sin \varphi & \alpha_7 \end{bmatrix} \quad (31)$$

имела постоянные элементы, то нахождение обратной матрицы $\mathbf{Z} = \mathbf{A}^{-1}$, а, следовательно, и представление уравнений в форме приемлемой для численного интегрирования было бы тривиальной задачей. Так как элементы матрицы являются переменными, нахождение ей обратной представляет трудоемкую операцию, хотя матрица и имеет размерность 4×4 . В настоящее время сложности, возникающие при этом, удается существенно уменьшить, а надежность результатов повысить, используя математические пакеты, включающие символьную математику. Здесь для этой цели использовался пакет Mathcad [8]. Обратная матрицы \mathbf{Z} из-за ее громоздкости здесь не приведена.

Для компактной записи преобразованных уравнений воспользуемся следующими обозначениями правых частей уравнений (30):

$$\left. \begin{aligned} f_\psi &= \frac{k}{J_e}(\varphi - \psi) + \frac{\beta}{J_e}(\dot{\varphi} - \dot{\psi}) + \frac{M_D}{J_e}; \\ f_\varphi &= -\alpha_9 \sin \varphi \cdot \dot{x} \dot{\vartheta} + \alpha_9 \cos \varphi \cdot \dot{y} \dot{\vartheta} - k(\varphi - \psi) - \\ &\quad - \alpha_{15} \cos \varphi \cdot \vartheta - \alpha_{15} \sin \varphi - \beta(\dot{\varphi} - \dot{\psi}) - M_d; \\ f_x &= \alpha_9 \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + \alpha_9 \sin \varphi \cdot \dot{\varphi} \dot{\vartheta} - \alpha_{11} x - \alpha_{12} \vartheta - \beta_x \dot{x}; \\ f_y &= -\alpha_9 \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 - \alpha_9 \cos \varphi \cdot \dot{\varphi} \dot{\vartheta} - \alpha_{13} y - \beta_y \dot{y}; \\ f_\vartheta &= \alpha_9 \sin \varphi \cdot \dot{\varphi} \dot{x} - \alpha_9 \cos \varphi \cdot \dot{\varphi} \dot{y} - \alpha_{12} x - \\ &\quad - (\alpha_{14} + \alpha_{15} \cos \varphi) \vartheta - \alpha_{15} \sin \varphi - \beta_\vartheta \dot{\vartheta}. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Здесь правая часть первого уравнения (32) записана после его разрешения относительно $\ddot{\psi}$. Подставляя это выражение в динамическую характеристику АД (27), получим уравнение, которое содержит вторую производную только по переменной M_D . Его правая часть имеет вид

$$f_{M_D} = -\omega_c s_k \left\{ 2 + \frac{[k(\varphi - \psi) + \beta(\dot{\varphi} - \dot{\psi}) + M_D]}{\omega_c s_k (\omega_0 - \dot{\psi}) J_e} \right\} \dot{M}_D -$$

$$- \left\{ \omega_c^2 s_k^2 \left[1 + \frac{(\omega_0 - \dot{\psi})^2}{\omega_0^2} \right] + \omega_c s_k \frac{[k(\varphi - \psi) + \beta(\dot{\varphi} - \dot{\psi}) + M_D]}{(\omega_0 - \dot{\psi}) J_e} \right\} M_D +$$

$$+ 2M_k \omega_c^2 s_k^2 \frac{(\omega_0 - \dot{\psi})}{\omega_0}. \quad (33)$$

После умножения слева на обратную матрицу \mathbf{Z} матрицы инерции уравнений 2÷5, они окажутся разрешенными относительно второй производной только одной обобщенной координаты. Таким образом, система уравнений (30) с учетом уравнения динамической характеристики, приобретает окончательную форму

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\psi} &= f_{\psi}; \\ \ddot{\varphi} &= (z_{11}f_{\varphi} + z_{12}f_x + z_{13}f_y + z_{14}f_{\vartheta})/|\mathbf{A}|; \\ \ddot{x} &= (z_{21}f_{\varphi} + z_{22}f_x + z_{23}f_y + z_{24}f_{\vartheta})/|\mathbf{A}|; \\ \ddot{y} &= (z_{31}f_{\varphi} + z_{32}f_x + z_{33}f_y + z_{34}f_{\vartheta})/|\mathbf{A}|; \\ \ddot{\vartheta} &= (z_{41}f_{\varphi} + z_{42}f_x + z_{43}f_y + z_{44}f_{\vartheta})/|\mathbf{A}|; \\ \ddot{M}_D &= f_{M_D}, \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

где $z_{i,j}$ ($i, j = \overline{1,4}$) – элементы обратной матрицы \mathbf{Z} с точностью до множителя $\frac{1}{|\mathbf{A}|}$;

$|\mathbf{A}|$ – определитель матрицы \mathbf{A} .

При исследовании переходных режимов интегрирование уравнений (34) должно осуществляться с начальными условиями:

при $t=0$ $\psi = \psi_0 = 0$, $\varphi = \varphi_0 = 0$, $x = x_0 = 0$, $y = y_0 = 0$, $\vartheta = \vartheta_0 = 0$, $M_D = M_{D_0} = M_s$,

$\dot{\psi} = \dot{\psi}_0 = 0$, $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 = 0$, $\dot{x} = \dot{x}_0 = 0$, $\dot{y} = \dot{y}_0 = 0$, $\dot{\vartheta} = \dot{\vartheta}_0 = 0$, $\dot{M}_D = \dot{M}_{D_0} = 0$.

3. Исследование динамических процессов в гидронасосе.

Параметры устройства. Разработанная математическая модель использована для исследования динамических процессов в гидронасосе производительностью

$Q = 1,167 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{с}$ (70 л/мин), с рабочим давлением $p = 3,26 \text{ МПа}$. Параметры устройства следующие:

$M = 13,14 \text{ кг}$; $m_g = 0,882 \text{ кг}$; $m_e = 0,213 \text{ кг}$; $m_r = 0,751 \text{ кг}$; $m_p = 0,145 \text{ кг}$; $J = 0,031 \text{ кгм}^2$;
 $I = 9,924 \cdot 10^{-5} \text{ кгм}^2$; $I_e = 5,166 \cdot 10^{-5} \text{ кгм}^2$; $I_r = 7,041 \cdot 10^{-4} \text{ кгм}^2$; $I_p = 7,23 \cdot 10^{-6} \text{ кгм}^2$;
 $e = 7,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$; $e_p = 0,05 \text{ м}$; $a = 0,065 \text{ м}$; $b = 0,085 \text{ м}$; $H_0 = 0,025 \text{ м}$; $k_x = 1,214 \cdot 10^3 \text{ Н/м}$;
 $k_y = 2,533 \cdot 10^3 \text{ Н/м}$; $k_g = 1,142 \text{ Нм}$; $k = 184,3 \text{ Нм}$.

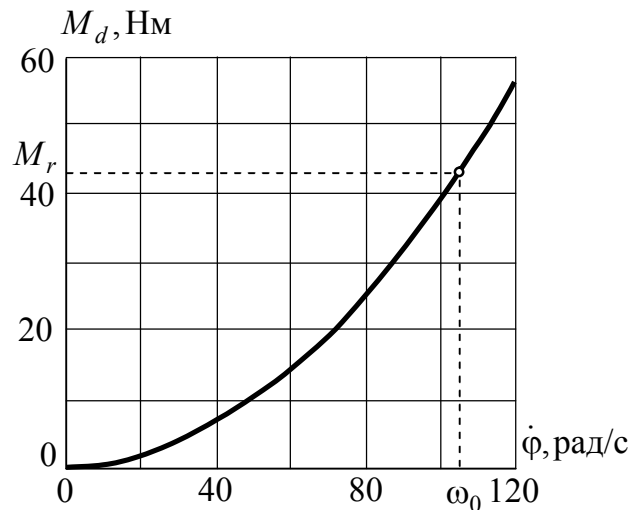


Рисунок 4 – Зависимость момента на валу насоса от угловой скорости

Сдвиговая, продольная и поворотная жесткости амортизаторов подсчитаны по формулам [9]. Жесткость на кручение резино-пальцевой муфты определялась экспериментально. Значения коэффициентов демпфирования определялись по собственным частотам свободных колебаний парциальных систем в предположении, что безразмерный коэффициент демпфирования $\eta = 0,1$ (малое демпфирование). Получены значения:

$$\beta_x = 54,0 \text{ кг/с}; \beta_y = 77,9 \text{ кг/с}; \beta_g = 0,076 \text{ кгм}^2/\text{с}; \beta = 0,114 \text{ кгм}^2/\text{с}.$$

Коэффициент $\alpha = 3,919 \cdot 10^{-3} \text{ Нмс}^2$ в выражении момента сопротивления на валу насоса $M_d = \alpha \dot{\phi}^2$ найден по расчетной мощности насоса $N_r = 4500 \text{ Вт}$ для угловой скорости идеального хода АД

$$\omega_0 = \frac{n_0 \pi}{30} = \frac{1000 \pi}{30} = 104,72 \text{ рад/с}.$$

Расчетный момент на этой частоте $M_r = \frac{N_r}{\omega_0} = 42,972 \text{ Нм}$ (рис. 4).

В качестве приводных электродвигателей рассматриваются АД с синхронной частотой вращения $n_0 = 1000 \text{ мин}^{-1}$.

Каталожные характеристики трех наиболее подходящих по мощности АД ($n_0 = 1000 \text{ мин}^{-1}$) приведены в таблице [7, 8].

Динамические процессы в гидронасосе без противовесов. На графиках рис. 5 представлены зависимости угловых скоростей электродвигателей от времени при запуске гидронасоса. Близкую к расчетной угловую скорость ротора насоса обеспечивает АД мощностью 5,5 кВт.

Таблица

Параметры АД серии 4А основного исполнения

Типоразмер двигателя	Мощность, кВт	s_n	μ_m	μ_u	J_e , кгм ²
4A112MA6Y3	3	5,5	2,2	2	0,0228
4A112MB6Y3	4	5,1	2,2	2	0,0285
4A132SB6Y3	5,5	4,1	2,2	2	0,0539

Графики рис. 6, 7 иллюстрируют изменения обобщенных координат x и ϑ . Наибольших значений координаты достигают на интервале времени $0 \div 0,5$ с и связаны с действием “реактивного момента”, возникающего при пуске электродвигателя.

Наглядное представление о формировании установившегося движения дает трехмерный график рис. 8, который иллюстрирует процесс изменения координат x и y , определяющих положение оси насоса, с течением времени t .

Аналогичная зависимость для координат центра масс ротора x_{O_1} и y_{O_1} от времени дана на рис. 9. Орбитальный характер движения центра масс по окружности заметно искажается только в начальной фазе пуска.

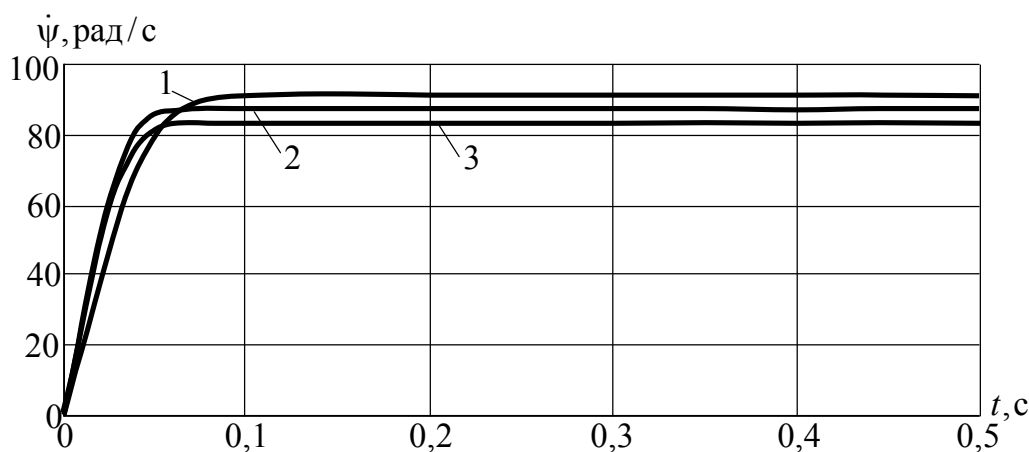


Рисунок 5 – Зависимость угловой скорости электродвигателя от времени при пуске: 1 – 5,5 кВт; 2 – 4 кВт; 3 – 3кВт

На трехмерном графике рис. 10 представлена кривая, иллюстрирующая характер установившегося движения левой опоры корпуса (x_l , y_l). Кривая фактически является плоской, т.е. движение опоры происходит по прямой (результат сложения двух гармонических колебаний). Знание законов движения опор дает возможность элементарным пересчетом находить усилия в амортизаторах.

Таким образом, разработанная обобщенная модель гидронасоса с электроприводом позволяет анализировать движение любых точек и тел устройства. Располагая та-

кой информацией нетрудно найти усилия, действующие на подшипники вала и ротора на переходных и установившихся режимах. Для иллюстрации на рис. 11 показаны составляющие и модуль силы, действующей на ротор, при запуске установки.

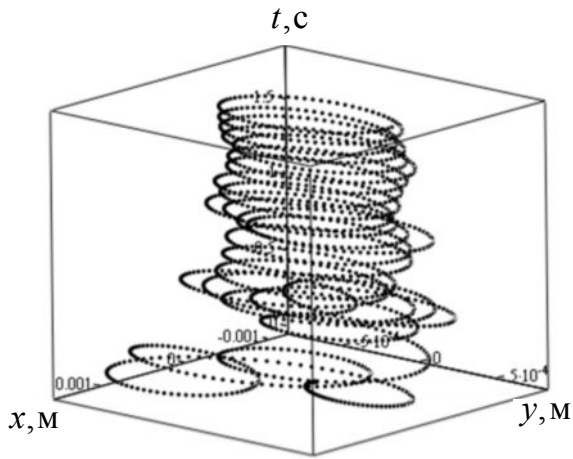


Рисунок 8 – Закон движения оси вала при пуске

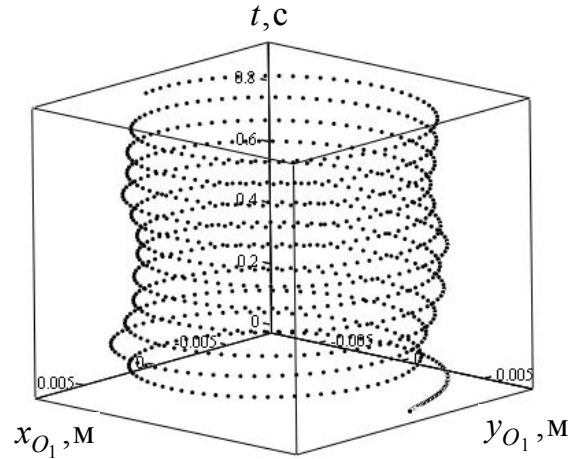


Рисунок 9 – Закон движения центра масс ротора при пуске

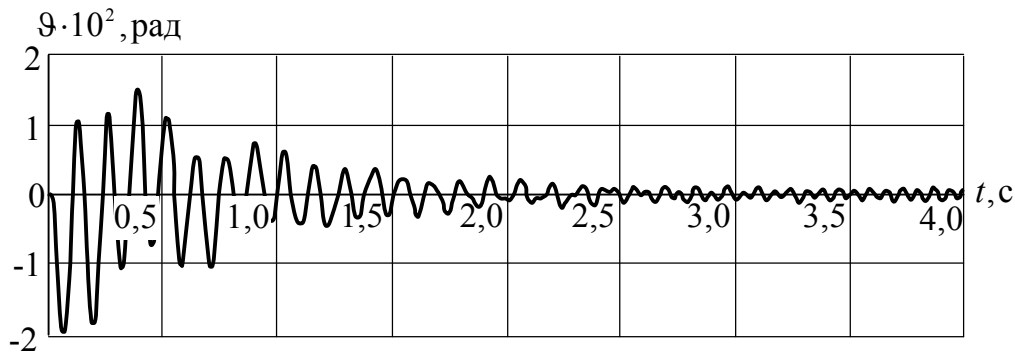


Рисунок 7 – Зависимость координаты ϑ от времени при пуске

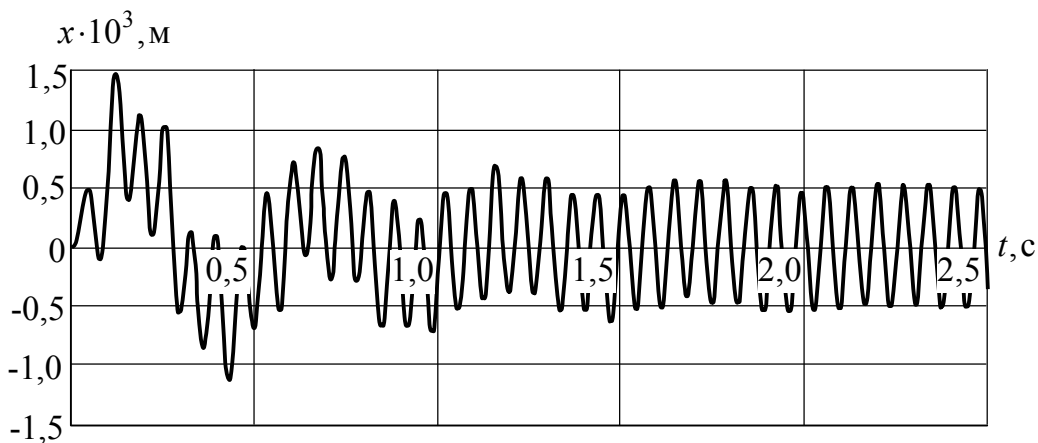


Рисунок 6 – Зависимость координаты x от времени при пуске

Динамические процессы в гидронасосе с противовесами. Если для разрабатываемой установки динамические нагрузки оказываются неприемлемыми, их существ-

венного снижения можно достигнуть за счет введения противовесов, хотя это и ведет к некоторому усложнению конструкции. Из-за ограниченности объема статьи приведем здесь только график изменения координат x и y для оси вала в функции времени. Кривая на рис. 12 показывает, что в этом случае на установившемся режиме достигается полное уравнивание. Колебания после пуска обусловлены действием “реактивного момента”. Особенность представленной кривой состоит также в том, что она фактически является плоской. Координата y при запуске практически не изменяется.

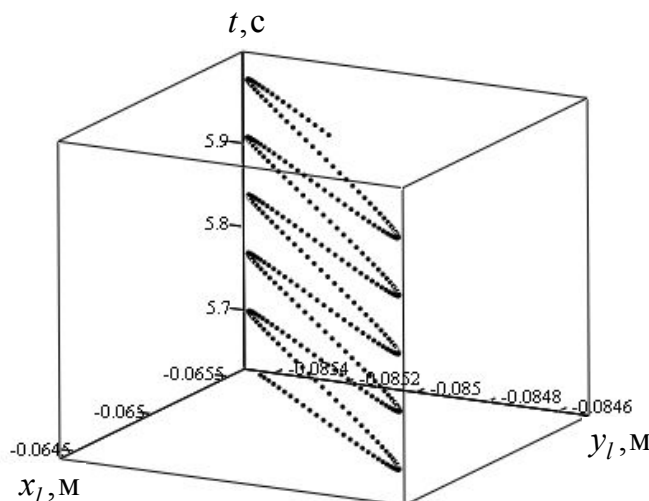


Рисунок 10 – Закон движения левой опоры корпуса на установившемся режиме

Выводы

1. Создана универсальная математическая модель для исследования динамических процессов в роторно-планетарных гидронасосах с асинхронным электродвигателем в качестве привода.
2. Учтены упругие свойства амортизаторов и упругой муфты между валами двигателя и насоса.
3. Предложена модель момента сопротивления жидкости при запуске насоса.
4. Выбрана динамическая характеристика асинхронного электродвигателя, позволяющая адекватно описывать переходные режимы и процессы при наличии нагрузки колебательного характера.
5. Приведены результаты расчетов переходных и установившихся режимов в конкретном гидронасосе с электроприводом: осуществлен выбор электродвигателя, исследованы движения характерных точек устройства и нагрузки на его элементы.
6. Показано, что динамические нагрузки существенно снижаются при установке на вал насоса соответствующих противовесов.
7. В дальнейших исследованиях предполагается использовать созданную модель для изучения влияния пульсаций жидкости на установившиеся динамические процессы.

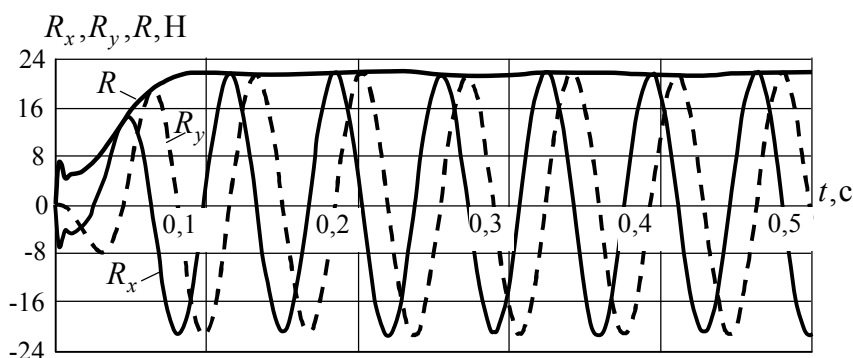


Рисунок 11 – Проекции и модуль силы, действующей на ротор насоса

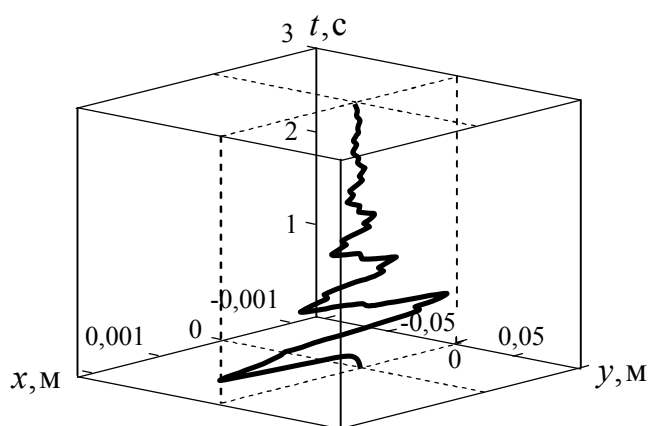


Рисунок 12 – Закон движения оси вала при пуске

Литература: 1. Росоха С.В., Куценко Л.Н. Геометричне моделювання об'ємів робочих камер роторно-планетарних трохоїдних машин: Монографія.– Харків: УЦЗУ, 2007.– 176 с. 2. Бениович В.С., Апазиди Г.Д., Бойко А.М. Роторпоршневые двигатели.– М.: Машиностроение, 1968.–152 с. 3. Бирюков Б.Н. Роторно-поршневые гидравлические машины. М.: Машиностроение, 1972.– 152 с. 4. Сухомлинов Р.М. Трохоидные роторные компрессоры. Харьков: ХГУ – Вища школа, 1975.– 152 с. 5. Рева В.Г., Куценко Л.М., Васильев О.Б. Геометричне моделювання взаємоспряжених профілів роторів і корпусів як обвідних сім'ї трохоїд. Київ: Чорнобильінтерінформ, 2003.– 150 с. 6. Шатохин В.М. Анализ и параметрический синтез нелинейных силовых передач машин: Монография.– Харьков: НТУ “ХПИ”, 2008.– 456 с. 7. Карвовский Г.А., Окороков С.П. Справочник по асинхронным двигателям и пускорегулирующей аппаратуре.– М.: Энергия, 1969.– 256 с. 8. Кирьянов Д.В. Mathcad 13.– СПб.: ВХВ-Петербург, 2006.– 608 с. 9. Вибрации в технике: В 6-ти т./ Под ред. Ф.М. Диментберга и К.С. Колесникова.– М.: Машиностроение, 1980.– т. 3.– 544 с.

Шатохин В.М., Ярмач М.С.

ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ У РОТОРНО-ПЛАНЕТАРНИХ ГІДРОНАСОСАХ

Створено універсальну математичну модель для дослідження динамічних процесів у роторно-планетарних гідронасосах з асинхронним електродвигуном у якості приводу, що враховує пружні властивості амортизаторів і пружної муфти між валами двигуна і насоса. Обрана динамічна характеристика асинхронного двигуна, що дозволяє

адекватно описувати перехідні режими і процеси при наявності навантаження коливального характеру. Приведено результати розрахунків перехідних і усталених режимів у конкретному гідронаосі з електроприводом: здійснений вибір електродвигуна; досліджені рухи характерних точок пристрою і навантаження на його елементи; вивчений вплив противаг на їхнє зниження.

Shatokhin V.M. , Yarmak N.S.

RESEARCH OF THE DYNAMIC PROCESSES IN ROTOR-PLANETARY
HYDRO PUMPS

Multipurpose mathematical model for dynamic processes research in rotor planetary hydro pumps with asynchronous motor as a driving gear is created. It takes into account elastic properties of shock absorbers and flexible coupling between engine and pump shafts. Dynamic characteristic of asynchronous motor, which allows to describe transient behaviours and processes under load with oscillating character, is chosen. Calculation results of transient and settling behaviours in specific hydro pump with electric drive are produced. Choice of electric motor is realized; motions of device typical particles and its elements load are examined; influence of counterbalances on decrease of dynamic loads is investigated.
