
УДК 539.3

Ткачук А.Н.

ТЕРМОУПРУГИЙ ОСЕСИММЕТРИЧНЫЙ КОНЕЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ ДЛЯ РЕШЕНИЯ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Введение. В процессе производства и эксплуатации машин их тонкостенные элементы подвергаются термомеханическим контактными нагрузкам. Часто контактные термоупругие задачи не могут быть решены в несвязанной постановке. На напряженно-деформированное состояние (НДС) влияют температурные деформации. Обратное влияние осуществляется через температурные потоки в зонах контакта, размеры и расположение которых определяются деформированным состоянием. При этом только для отдельных задач удается получить аналитическое решение [1]. В связи с этим актуальность приобретает разработка численных методов расчета связанных термоупругих контактных задач с учетом присущих им особенностей.

К особенностям относится плохая обусловленность исходной задачи. Мембранная, изгибная и поперечная жесткости оболочек отличаются на порядок. Поэтому погрешности аппроксимации поля деформаций внутри конечных элементов (КЭ) приводят к „паразитным” жесткостям. Эффект завышения изгибной жесткости вследствие погрешности аппроксимации деформаций срединной поверхности, поперечного сдвига и обжатия называют мембранным, сдвиговым и поперечным локкингом („заеданием”) соответственно [2]. Кроме того, деформация обжатия и поперечный сдвиг оказывают существенное влияние на размеры зон контакта и распределение контактных давлений [3]. Правильный учет этих деформаций позволяет регуляризовать контактные ограничения с физически обоснованными параметрами.

В связанных (multiphysics) конечных элементах аппроксимация полей должна быть согласована. Чрезмерная степень аппроксимации одного из полей не повышает точность

решения в целом, а лишь увеличивает сложность конечно-элементного анализа. Аппроксимация должна также удовлетворять условиям Ладышевской-Бабушки-Брези (ЛББ) [4], потому что температурное и механическое поля связаны через напряжения. Элементы, нарушающие условие ЛББ, являются неустойчивыми и дают осциллирующие решения.

Поскольку универсальный метод решения этих связанных контактных задач отсутствует, то целью данной работы является построение осесимметричного термоупругого оболочечного конечного элемента на примере цилиндрических оболочек.

Обзор литературы. Существует два основных подхода для формулировки оболочечных конечных элементов. Первый использует „дегенерацию” твердотельных КЭ с учетом гипотез о распределении напряжений или „естественном” деформированном состоянии оболочки (см., например, [5]). Основное преимущество такого КЭ для решения связанных контактных задач состоит в том, что на лицевых поверхностях оболочки размещаются узлы, расположенные в местах, где происходит контакт. Однако существует ряд проблем с локкингом (особенно при утонении элемента).

Второй заключается в использовании метода Галеркина непосредственно к уравнениям той или иной теории оболочек. Для учета деформаций поперечного сдвига и обжатия используются кинематические гипотезы Кирхгофа-Лява [6, 7]. Такой подход позволяет учесть контакт в одной точке срединной поверхности только с одной лицевой поверхностью оболочки (рис. 1). Введение дополнительных параметров, отвечающих за обжатие [2], позволяет учесть контакт с обеих лицевых поверхностей (см. рис. 1).

Предлагаемый подход. В данной работе используется уточненная теория термоупругих оболочек [8, 9]. В ней пренебрегается деформацией сдвига, однако учитываются поперечные деформации и распределение температуры по толщине. Поперечная деформация не использует дополнительных параметров, а выражается через контактные давления. Для распределения температуры используется 2 параметра на толщину. Применяв метод Галеркина к уравнениям равновесия и теплового баланса, получаем матрицу жесткости конечных элементов.

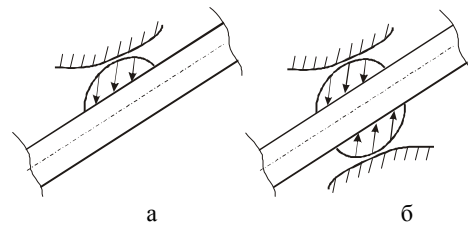


Рисунок 1 – Контакт с одной (а) и двумя (б) лицевыми поверхностями оболочек

Уравнения термоупругого изгиба оболочек. Осесимметричный температурный изгиб цилиндрической оболочки в области, свободной от контакта, имеет вид [1]:

$$Dw^{IV} + Kw = p - D\alpha(1 - \nu)(T_2)'' + K\alpha T_1 R, \quad (1)$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$ – цилиндрическая жесткость; $K = Eh / R^2$ – окружная жесткость;

α – коэффициент линейного расширения; p – давление, приведенное к срединной поверхности; T_1 – температура срединной поверхности; T_2 – градиент температуры по толщине; E, ν – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала оболочки.

Уравнение теплопроводности для той же оболочки описывается системой дифференциальных уравнений [9]:

$$\begin{cases} kh(T_1)'' + q^+ + q^- = 0; \\ \frac{kh^2}{12}(T_2)'' - kT_2 + \frac{q^+ - q^-}{2} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

где k – коэффициент теплопроводности; q^+ и q^- – тепловые потоки на лицевых поверхностях, а также предполагает кубическое распределение для деформации ε_z [1].

Уравнения (1) и (2) можно привести к слабому виду:

$$\begin{cases} \int_{\Omega} (w'' D \cdot \delta w'' + w K \cdot \delta w) dx = \int [(p - D\alpha(1-\nu)(T_2)'' + K\alpha T_1 R) \cdot \delta w] dx; \\ \int_{\Omega} kh(T_1)' \cdot \delta(T_1) dx = \int (q^+ + q^-) \cdot \delta(T_1) dx; \\ \int_{\Omega} [(kh^2/6)(T_2)' \cdot \delta(T_2)' + kT_2 \cdot \delta(T_2)] dx = \int (q^- - q^+) \cdot \delta(T_2) dx. \end{cases} \quad (3)$$

Для дискретизации уравнений (1) и (2) будем создавать КЭ, приведенный на рис. 2. Принятые на нем обозначения: d_1, d_3 – узловые прогибы; d_2, d_4 – углы поворота; θ_1, θ_2 – узловые значения средней температуры; r_1, r_2, r_3 – узловые значения для градиента температуры по толщине.

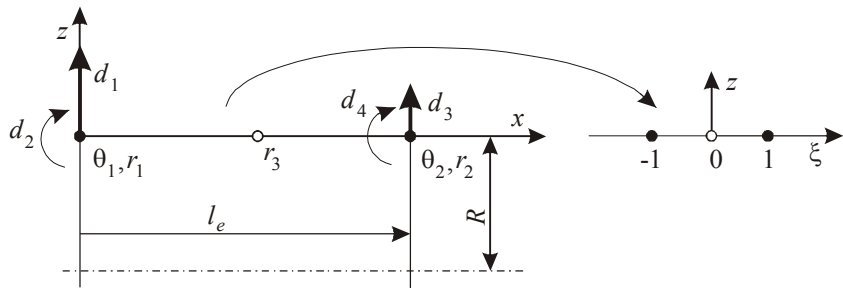
Аппроксимации задаются с помощью выражений:

$$w = \sum_{i=1}^4 d_i N_i^{(d)}; \quad T_1 = \sum_{i=1}^2 \theta_i N_i^{(\theta)}; \quad T_2 = \sum_{i=1}^2 r_i N_i^{(r)}, \quad (4)$$

или в матричном виде

$$\mathbf{w} = \mathbf{d}^{(T)} \mathbf{N}^{(d)}; \quad \mathbf{T}_1 = \mathbf{N}^{(\theta)} \boldsymbol{\theta}; \quad \mathbf{T}_2 = \mathbf{N}^{(r)} \mathbf{r}. \quad (5)$$

Рисунок 2 – Геометрия предлагаемого конечно-го элемента в естественных и собственных координатах



В изопараметрических координатах базисные функции имеют вид:

$$\begin{cases} N_1^{(d)} = (1/4)(1-\xi)^2(2+\xi); \\ N_2^{(d)} = (1/8)l_e(1-\xi)^2(1+\xi); \\ N_3^{(d)} = (1/4)(1+\xi)^2(2-\xi); \\ N_4^{(d)} = (1/8)l_e(1+\xi)^2(1-\xi); \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} N_1^{(\theta)} = (1/2)(1-\xi); \\ N_2^{(\theta)} = (1/2)(1+\xi); \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} N_1^{(r)} = (1/2)(\xi-1)\xi; \\ N_2^{(r)} = (1/2)(1+\xi)\xi; \\ N_3^{(r)} = (1-\xi)(1+\xi), \end{cases} \quad (8)$$

где l_e – длина элемента, ξ – собственная координата КЭ (см. рис. 2).

Подстановка (5) в (3) приводит к матрице жесткости конечных элементов K^e :

$$K^e = \begin{bmatrix} K_{dd} & K_{d\theta} & K_{dr} \\ 0 & K_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & K_{rr} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

где

$$K_{dd} = \int_{\Omega^e} \left((\mathbf{N}^{(d)})'' D (\mathbf{N}^{(d)})'' + \mathbf{N}^{(d)} K \mathbf{N}^{(d)} \right) dx;$$

$$K_{d\theta} = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^{(d)} K \alpha R \mathbf{N}^{(d)} dx; \quad K_{dr} = - \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^{(d)} D \alpha (1-\nu) (\mathbf{N}^{(r)})'' dx;$$

$$K_{\theta\theta} = \int_{\Omega^e} (\mathbf{N}^{(\theta)})' kh (\mathbf{N}^{(\theta)})' dx; \quad K_{rr} = \int_{\Omega^e} \left((\mathbf{N}^{(r)})' \frac{kh^2}{6} (\mathbf{N}^{(r)})' + \mathbf{N}^{(r)} k \mathbf{N}^{(r)} \right) dx.$$

Матрица жесткости K^e является несимметричной, т.к. содержит термоупругие члены $K_{d\theta}$ и K_{dr} (см. (9)).

Разрешающее уравнение примет вид:

$$K^e [\mathbf{d} \quad \theta \quad \mathbf{r}]^T = [\mathbf{f}_d \quad \mathbf{f}_\theta \quad \mathbf{f}_r]^T.$$

Таким образом, построен связанный конечный элемент для моделирования термоупругих полей в цилиндрических оболочках.

Учет контактных условий. В контакте необходимо удовлетворить температурным и механическим контактными условиям. Применяем эти условия поточечно в точках лицевой поверхности, соответствующих узлам конечных элементов (рис. 3), в которых задается прогиб. Сами контактные условия записываются относительно дискретных значений зазора, контактного давления, температуры и теплового потока в контакте. Дискретные значения определяются из соотношений уточненной теории оболочек [1, 8].

Перемещения на внешней лицевой поверхности представим в виде:

$$w^+ = w + \frac{\nu h^2}{8} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} + \alpha T_2 \right) - \frac{13 h p^+}{32 E} + \alpha \left(\frac{3h}{8} T_1 + \frac{23}{96} h^2 T_2 \right). \quad (10)$$

Опустим в дискретном выражении (10) слагаемое $\frac{\nu h^2}{8} \frac{d^2 w}{dx^2}$ в связи с его малостью. Тогда относительно узловых перемещений в i -м узле d_i, θ_i, r_i и узловой контактной реакции λ_i условие контакта принимает вид

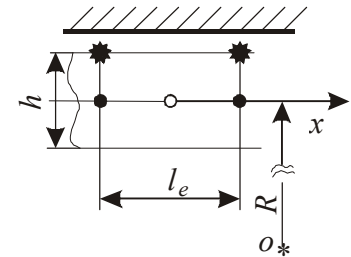


Рис. 3. Точки идентификации контакта на внешней поверхности:

- – узел с переменной $w(x)$; ○ – дополнительный узел с температурной переменной;
- ★ – место идентификации контакта

$$\begin{cases} d_i^+ = d_i + \alpha \left[\frac{3h}{8} \theta_i + \left(\frac{23}{96} + \frac{\nu}{8} \right) h^2 r_i \right] - \frac{13h\lambda_i}{E}; \\ \lambda_i \geq 0, d_i^+ - d_i^k \leq 0, \lambda_i (d_i^+ - d_i^k) = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Температура и поток на внешней лицевой поверхности связаны соотношениями неидеального теплового контакта [1]

$$h_c [T_k - (T_1 + 0.5hT_2)] = q^+, \quad (12)$$

где h_c – контактная температурная проводимость, T_k – температура контактируемого тела.

В дискретном виде выражение (12) можно записать как

$$q_i^+ = h_c [\theta_i^k - (\theta_i + 0.5hr_i)]. \quad (13)$$

Для того, чтобы не увеличивать размерность задачи, исключим из уравнения контактные реакции λ_i и тепловые потоки q_i^+ . Тогда в активных узлах необходимо добавит члены, соответствующие матрице контактной жесткости K_i^T и приведенных контактных сил f_i^T :

$$K_i^T = \begin{bmatrix} c & 0 & 0 & 0 & -\frac{3\alpha ch}{8} & 0 & -\left(\frac{23}{96} + \frac{\nu}{8}\right) h^2 \alpha c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_c & 0 & 0.5hh_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5hh_c & 0 & 0.25h_c h^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (14)$$

$$f_i^T = [cd_i^k \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad h_c \theta_i^k \quad 0 \quad h_c h \theta_i^k \quad 0 \quad 0], \quad (15)$$

где $c = 32E/13h$.

Таким образом, получена матрица контактной жесткости K_i^T , которая является не-симметричной и включает связанные термоупругие элементы, и контактная сила f_i^T .

Сборка матрицы жесткости с учетом (14) и (15) дает полную систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{K} = \underset{e=1}{\overset{N}{\mathbf{A}}} \mathbf{K}^e + \underset{\substack{i=1 \text{ по} \\ \text{активным} \\ \text{узлам}}}{\overset{T}{\mathbf{A}}} \mathbf{K}_i^T; \quad \mathbf{f} = \underset{e=1}{\overset{N}{\mathbf{A}}} \mathbf{f}^e + \underset{\substack{i=1 \text{ по} \\ \text{активным} \\ \text{узлам}}}{\overset{T}{\mathbf{A}}} \mathbf{f}_i^T, \end{array} \right. \quad (16)$$

где \mathbf{A} – оператор сборки по элементам.

Результаты численного моделирования. Для проверки правильности предложенного конечного элемента был проведен численный эксперимент. В качестве тестовой взята задача об осесимметричном термоупругом контакте цилиндрической оболочки конечной длины с жестким бандажом с известным аналитическим решением и с решением, полученным с применением другого КЭ [1]. На торцах оболочки задана температура T_0 , а температура бандажа – T_k .

На рис. 4-7 приведены распределение прогиба по всей длине оболочки, приведен прогиб и температура в области бандажа и изгибающий момент, полученный с использованием построенного КЭ, с одной стороны, и аналитического и конечно-элементного решения с применением двумерного осесимметричного элемента, – с другой.

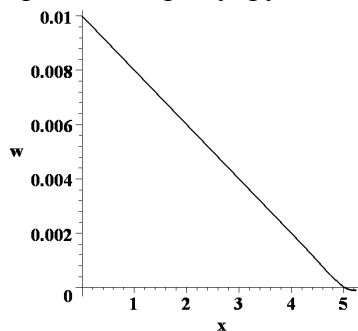


Рисунок 4 – Общий вид прогиба цилиндрической оболочки

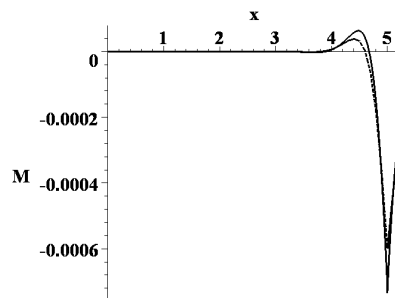


Рисунок 6 – Изгибающий момент цилиндрической оболочки

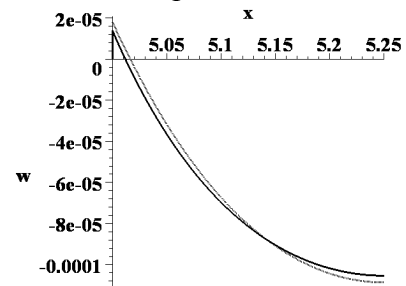


Рисунок 5 – Прогиб цилиндрической оболочки в области контакта

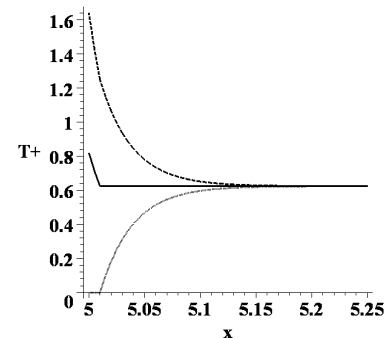


Рисунок 7 – Распределение температуры по длине цилиндрической оболочки

Контакт реализуется вблизи угловых точек бандажа, что согласуется с полученной аналитически картиной. Зона контакта при численном моделировании получилась равной 0.015 м, что с учетом размера элемента (0.005 м) согласуется с аналитическим значением 0.016. Как видно из рисунков, численное решение хорошо согласуется с аналитическим решением.

Выводы. По результатам проведенных исследований можно сделать следующие выводы.

1. Получен новый связанный термоупругий осесимметричный конечный элемент для решения контактных задач цилиндрических оболочек. Учет деформаций обжатия позволил получить физически обоснованные коэффициенты матрицы контактной жесткости, что отличает данный подход к построению конечных элементов от традиционных.

2. Данная связанная постановка приводит к несимметричным матрицам жесткости КЭ.

3. Построенный конечный элемент, в отличие от традиционно используемых КЭ в известных программных комплексах, может напрямую быть использован при решении связанных термоупругих контактных задач, поскольку учитывает (причем на физическом уровне) основные факторы контактного взаимодействия тонкостенных элементов конструкций (поперечное обжатие, связанные условия термомеханического контакта), а также избавлен от „паразитного” влияния эффекта локкинга. Этим самым

создается возможность существенно понизить размерность конечно-элементных моделей (Shell-элементы вместо 3D или 2D) без потери качественных особенностей решения и точности численного моделирования.

В качестве направлений дальнейших исследований можно предложить введение дополнительных параметров для учета обжатия и учет сдвига, а также построение конечных элементов без принятых в статье упрощений.

Предложенную методику можно также применить для получения произвольных конечных элементов тонкостенных конструкций.

Литература: 1. Львов Г.И. Об аналитическом решении термоупругой контактной задачи цилиндрической оболочки с бандажом / Г.И. Львов, А.Н.Ткачук // Вестник НТУ «ХПИ». Тем. вып.: Динамика и прочность машин. – 2009. 2. Nagi El-Abbasi A New Strategy for Treating Frictional Contact in Shell Structures using Variational Inequalities // PhD thesis, University of Toronto, 1999. – 134 p. 3. Львов Г.И., Ткачук А.Н. О влиянии параметров и гипотез деформирования цилиндрической оболочки на зоны контакта с бандажом // Вестник НТУ „ХПИ”. Тем. вып.: Динамика и прочность машин. – 2006. № 32. – С.98-104. 4. Cannarozzi Agostino Antonio A mixed variational method for linear coupled thermoelastic analysis / Agostino Antonio Cannarozzi, Francesco Ubertini // International Journal of Solids and Structures, 2001. – # 38. – PP. 717–739. 5. Büchter Norbert Three-Dimensional Extension of Nonlinear Shell Formulation Based on the Enhanced Assumed Strain Concept / Norbert Büchter, Ekkehard Ramm, Deane Roehl // Int. Journal of Numerical Methods in Engineering, 1994. – # 37. – PP. 2551-2568. 6. Блох М.Б. К вопросу модели в задачах о контакте тонкостенных тел // Прикладная механика. – 1977. – Том XIII. – Вып. 5. – С. 34-42. 7. Пелех Б.Л., Сухорольский Н.А Контактные задачи теории упругих анизотропных оболочек. – Киев: Наукова думка, 1980. – 216 с. 8. Галиньш А.К. Уточненные уравнения движения термоупругих ортотропных оболочек // Исследования по теории пластин и оболочек. – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1972. – Вып. 8. – С. 365–392. 9. Григолюк Э.И., Толкачев В.М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. – М.: Машиностроение, 1980. – 411 с.

Ткачук А.М.

ТЕРМОПРУЖНИЙ ОСЕСИМЕТРИЧНИЙ СКІНЧЕННИЙ ЕЛЕМЕНТ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ КОНТАКТНИХ ЗАДАЧ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК

У статті описано новий зв'язаний термопружний осесиметричний скінченний елемент (СЕ) для розв'язання контактної задачі циліндричних оболонок. Урахування деформацій обтискання дало змогу одержати фізично обґрунтовані коефіцієнти матриці контактної жорсткості. Дана зв'язана постановка приводить до несиметричних матриць жорсткості СЕ. Наведено порівняння результатів аналітичного і числового розв'язання тестових задач.

Tkachuk A.M.

THERMOELASTIC AXIAL-SYMMETRIC FINITE ELEMENT FOR SOLUTION OF CONTACT TASKS OF CYLINDRICAL SHELLS

This paper is dedicated to a coupled thermoelastic axisymmetric finite element suitable for solution of contact problems. Consideration of transversal deformation delivers physically based contact stiffness matrix. This formulation leads to an unsymmetrical system of equations. Comparison between analytical and numerical solution of test problems is presented.
