УДК 618.514.01:517.977.5

Радиевский А. Е.

ФОРМАЛИЗМ ДУБОВИЦКОГО-МИЛЮТИНА И ЗАДАЧА ДИНАМИЧЕСКОГО СИНТЕЗА

Постановка проблемы. Характерной особенностью современного этапа автоматизации технологических процессов в таких областях как энергетика, машиностроение, металлургия, химия, нефтехимия, управление подвижными объектами, современные средства ведения вооруженной борьбы является требование, в частности, оптимальной стабилизации основных режимных параметров. Последнее в значительной степени определяет качество, экономичность, надежность и безопасность функционирование как технологических процессов, так и основного технологического оборудования. Таким образом, в научно-техническом аспекте на современном этапе автоматизации технологических процессов проблематика динамического синтеза является определяющей [1]. Основой математического обеспечения при реализации процедуры динамического синтеза являются методы вариационного исчисления [2]. Как наука вариационное исчисление начало создаваться в начале 17 в.. Основное внимание уделялось анализу гладких функций и функционалов, заданных во всем пространстве или в ограниченных пределах гладкого многообразия ("классические задачи" вариационного исчисления). Условия экстремума записывались в виде уравнения Эйлера с множителями Лагранжа при наличии ограничений. Потребности экономики вызвали появление специальных методов поиска экстремума гладких функций на замкнутых областях с кусочно-гладкой границей. Первые результаты здесь были получены в 1939г. Канторовичем Л.В.. В настоящее время эта область математики известна под названием математического (нелинейного) программирования. Развитие техники поставило перед вариационным исчислением ряд новых задач - задач управления объектами, параметры которых изменяются в некотором замкнутом множестве, имеющим края ("неклассические" задачи вариационного исчисления). Широкий класс подобных задач был исследован в работах Понтрягина Л.С., Болтянского В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф., получивших необходимое условие экстремума в виде “принципа максимума Понтрягина” [3]. В конце 1962 г. Дубовицкий А.Я. и Милютин А.А. получили необходимые условия экстремума в виде некоторого уравнения, записанного в терминах функционального анализа [4]. Объектом исследования явился класс “неклассических” задач вариационного исчисления. Они показали, что класс “неклассических” задач вариационного исчисления может быть исследован методами, которые использовались при исследовании класса “классических” задач и которые приводят к уравнению Эйлера. Из этого условия удалось вывести как частные случаи все известные ранее необходимые условия экстремума [5]. Метод исследования экстремальных задач, разработанный Дубовицким А.Я. и Милютиным А.А. (формализм Дубовицкого-Милютина), возник на основе изучения идей, заложенных в “принципе максимума Понтрягина” и теории математического (нелинейного) программирования. По своему подходу он является современным аналогом классического метода исследования функций на экстремум при наличии ограничений. Изменилась лишь техника и пространство, на котором задана минимизируемая функция. От классического вариационного исчисления он отличается лишь методом учета ограничений: вместо классической техники погружений используются методы отделения выпуклых множеств. При этом, основным моментом является то обстоятельство, что определение необходимых условий экстремума сводится к определению условий непересечения некоторых множеств, заданных с помощью линейных форм – выпуклых конусов. Для эффективного применения условий экстремума в рассмотрение вводятся сопряженные конуса, на которых задаются линейные неотрицательные функционалы такие, что их сумма равна нулю. Последнее выражение названо уравнением Эйлера и является необходимым и достаточным условием непересечения выпуклых конусов.

Цель исследования. Целью настоящего исследования является установление того, что применение формализма Дубовицкого-Милютина при реализации процедуры

динамического синтеза позволяет синтезировать систему управления (СУ), которая удовлетворяет фундаментальным принципам синергетической теории управления [6].

Постановка и особенности задачи. Задача динамического синтеза, в классе задач аргументной оптимизации [7] может быть сформулирована следующим образом.

Необходимо найти

$$\min J(u), J(u) = \int_{t_0}^{t_1} W(x,u,q,t)dt \tag{1}$$

при наличии ограничений

$$\frac{dx}{dt} = F(x,u,p,t), \tag{2}$$

$$(x,u,p,t) \in E, \tag{3}$$

$$(x,t_0) \in P_0, (x,t_1) \in P_1, \tag{4}$$

где $x \in E^n$ -состояние; $u \in E^r$ -управление; E^n, E^r -некоторые пространства; E -область определения задачи; P_i -многообразия, $i \in [0,1]$; $p \in E^p = (p : |p| \le p_{max})$ -параметр объекта управления (ОУ) (2), $q \in E^q = (q : |q| \le q_{max})$ -параметр критерия качества (1), $p_{max} = const > 0$, $q_{max} = const > 0$ -заданные числа; $t \in [t_0, t_1] \subset R^1$ -время, $[t_0, t_1]$ -интервал управления, R^1 - числовая прямая.

Структура алгоритма управления. Пусть $E^n = C^n(t_0, t_1)$ -пространство n -мерных непрерывных на $[t_0, t_1]$ функций $x(t)$ с нормой $\|x\| = \max|x(t)|$, $\forall t \in [t_0, t_1]$; $E^r = L^r_\infty(t_0, t_1)$ -пространство r -мерных существенно ограниченных на $[t_0, t_1]$ измеримых функций $u(t)$ с нормой $\|u\| = \text{vrai}\sup|u(t)|$, $\forall t \in [t_0, t_1]$; $u \in U = (u : |u| \le u_{max})$, $u_{max} = const > 0$ - заданное число, $\text{int}\, U \ne \varnothing$, $\varnothing$ -пустое множество; $x \in Q = (x : |x| \le x_{max})$, $x_{max} = const > 0$ -заданное число, $\text{int}\, Q \ne \varnothing$; $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = 0$; t_1 - конечный, не фиксированный моментом времени; (x^0, u^0) - решение задачи (1)-(4). Тогда уравнение Эйлера запишем в виде [1]

$$f_1'(\overline{u}) = \int_{t_0}^{t_1} \left[-\left(F_u'\left(x^0, u^0, p, t\right)\right)^T \Psi(t) + W_u'\left(x^0, u^0, q, t\right), \overline{u}\right] dt + f_4'(\overline{x}),$$

где $\Psi(t)$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений (СДУ) [1,8]

$$\frac{d\Psi(t)}{dt} + (F_x'(x^0, u^0, p, t))^T \Psi(t) = W_x'(x^0, u^0, q, t) \text{ при } \Psi(t_0) = 0;$$

$W_x'(x^0, u^0, q, t), W_u'(x^0, u^0, q, t), F_x'(x^0, u^0, p, t), F_u'(x^0, u^0, p, t)$ производные в точке (x^0, u^0) по x и u от $W(x,u,q,t)$ и $F(x,u,p,t)$ соответственно; $f_1'(\overline{u})$ и $f_4'(\overline{x})$ опорные функционалы соответственно к множеству U в точке u^0 и множеству Q в точке x^0, T -символ операции транспонирования.

Так как множества U и Q являются собственными выпуклыми телами [9], то для их крайних точек $f_1'(\overline{u}) = \text{sign}\, u_{max}, f_4'(\overline{x}) = \text{sign}\, x_{max}$, а для внутренних - $f_1'(\overline{u}) = 0$,

$f'_4(\bar{x}) = 0$, а управляющее воздействие определяется выражением

$$-(F'_u(x^0, u^0, p, t))^T \Psi(t) + W'_u(x^0, u^0, q, t) = 0.$$

Структурный синтез. Пусть $x = (x_1, ..., x_n)$-матрица-столбец n-мерного вектора фазовых координат, любая компонента которого $x_i, i \in [1, n]$ может состоять как из одной фазовой координаты, так и представлять собой вектор; $u = (u_1, ..., u_r)$-матрица-столбец r-мерного вектора управляющих воздействий, $n \geq r$.Тогда алгоритм управления (АУ) получим в виде [10]

$$u(t) = \begin{cases} u_{max} & \text{при} \quad L(t) \geq u_{max} \\ L(t) & \text{при} \quad -u_{max} < L(t) < u_{max} \\ -u_{max} & \text{при} \quad L(t) \leq -u_{max} \end{cases}, \tag{5}$$

где $\quad L(t) = \dfrac{1}{2} M^{-1} \left(F'_u\left(x^0, u^0, p, t\right)\right)^T \Psi\left(t\right).$

Пусть $W(x, u, q, t) = W_x x + W_u u = x^T Rx + u^T Mu$, $R = diag\|r_i\|_1^n$, $M = diag\|m_i\|_1^m$, $F(x, u, p, t) = F_x x + F_u u = Ax + Bu$, для матрицы A существует матрица Вандермонда $P = \|p_{ij}\|_1^n$ такая, что $P^{-1}AP = \Lambda$, $\Lambda = diag\|\lambda_i\|_1^n$, λ_i -собственные числа матрицы A. Тогда

$$L(t) = M^{-1} B^T P^{-1T} \Lambda^{-1} \left(I - e^{\Lambda t}\right) P^T Rx(t_0),$$

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bsignu_{max}, \tag{6}$$

$$\frac{dx}{dt} = Ax + BM^{-1} B^T P^{-1T} \Lambda^{-1} \left(I - e^{\Lambda t}\right) P^T Rx(t_0), \tag{7}$$

где $\Lambda^{-1} = diag\left\|\dfrac{1}{\lambda_i}\right\|_1^n$, $e^{\Lambda t} = diag\left\|e^{\lambda_i t}\right\|_1^n$, I- единичная матрица n-го порядка.

Анализ выражений (6) и (7) показывает, что изменения синтезированного АУ пропорциональны (при постоянстве параметров исследуемого ОУ) изменениям элементов матриц R и M оптимизируемого критерия качества, которые квалифицируются как управляющие параметры синтезированного управляющего устройства (УУ) [10].

Топологические особенности исследуемой задачи. Область определения задачи (1)-(4) $E = E^n \times E^r \times E^p \times E^q \times R^1$ представляет собой выпуклое тело [9]. В силу выражения (5) ее можно представить в виде двух подмножеств $E_i, i \in [1,2]$, определяющих область насыщения и открытую область, в каждой из которых движение синтезированной СУ описывается СДУ с гладкими правыми частями. Структура СДУ изменяется на поверхности переключения. В [11] показано, что фазовые траектории могут двигаться только из одной области фазового пространства в другую и не могут двигаться по поверхности переключения. Таким образом, в синтезированной СУ существует непрерывное продолжение в область насыщения.

Структура синтезированной системы управления. Применив преобразование Лапласа к СДУ (6) и (7), проведя необходимые структурные преобразования, а также, принимая во внимание вид синтезированного АУ (5), передаточные функции синтезированной СУ для областей насыщения и открытой соответственно получим в виде

$$X^{нас.}(p)=X_{ОУ}(p)X_{ИМ}(p)X^{нас.}_{УПЧ}(p),\ X^{откр.}(p)=X_{ОУ}(p)X_{ИМ}(p)X^{откр.}_{УПЧ}(p),$$

где $X_{ОУ}(p)=\dfrac{B}{pI-A}$ -передаточная функция ОУ (2), $X_{ИМ}(p)=\dfrac{1}{p}F_{НЭ}$ -передаточная функция исполнительного механизма, $F_{НЭ}$ - нелинейный элемент (НЭ) типа "насыщение"; $X^{нас.}_{УПЧ}(p)$ и $X^{откр.}_{УПЧ}(p)$- передаточные функции усилительно-преобразовательных частей (УПЧ) для областей насыщения и открытой соответственно; p - независимая переменная изображения.

Передаточные функции УПЧ можно представить в виде

$$X^{нас.}_{УПЧ}(p)=\frac{p^2}{B};\ X^{откр.}_{УПЧ}(p)=\frac{p^2}{B}-pH_2(p)+H_1,$$

где $H_1(p)=M^{-1}B^{T}P^{-1T}\Lambda^{-1}P^{T}R$; $H_2(p)=M^{-1}B^{T}P^{-1T}\Lambda^{-1}e^{\Lambda t}P^{T}R$.

Элементы матрицы R классифицируются как управляющие параметры УПЧ, а матрицы M - как коэффициенты усиления НЭ типа "насыщение" [10].

Параметрический синтез. В рамках синтезированного управляющего устройства (УУ) необходимо выбрать параметры матриц R и M оптимизируемого критерия качества, при значениях которых движение синтезированной СУ при отработке требуемого задания удовлетворяет требуемым, наперед заданным "вторичным" [12] показателям качества. Процедура получения требуемых "вторичных" показателям качества является единственной в том смысле, что ни один из них не может быть получен в отрыве от других. Поэтому функционирование синтезированной СУ обычно оценивается одним из показателей качества при наличии ограничений на значения остальных. Исходя из концепции двуэтапности реализации параметрического синтеза [1] (построение желаемого процесса и выбор параметров матриц R и M из условия его воспроизведения) желаемый процесс может быть задан в виде СДУ $\dfrac{dx^{ж}}{dt}=A^{ж}x$, где матрица $A^{ж}$ является устойчивой, характеристический полином которой является функцией среднегеометрического корня Ω_0 [1]. Тогда на множество Q могут быть заданы непересекающиеся множества $(Q_i(\Omega_0))$, каждое из которых удовлетворяет конкретному значению среднегеометрического корня Ω_0, а, следовательно, и конкретному значению "вторичного" показателя качества. Реализуя процедуру параметрического синтеза [1], получим закон изменения параметров матриц R и M. Реализация параметрического синтеза в форме предложенной процедуры позволяет констатировать необходимость наличия средств вычислительной техники в структуре УУ синтезированной СУ. Аналитическое решение задачи структурного синтеза в каждом конкретном случае задания СДУ (2) позволяет определить размерности управляющих параметров как функции размерности параметров исследуемого ОУ [13].

Заключение. Аналитическое решение задачи структурного синтеза, полученное на основе формализм Дубовицкого-Милютина позволило показать, что синтезированная СУ удовлетворяет таким фундаментальным принципам синергетической теории управления как свойство кооперативности, возможность использования в исследуемой задаче синтеза физических закономерностей исследуемого ОУ, а также принцип иерархической последовательности оценки динамических свойств синтезированной СУ.

Литература: 1. Радиевский А.Е. Динамический синтез в общей проблематике современной теории управления // Радиоэлектроника и информатика.-2004.-№3.-С.70-75. 2. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление.-М.: Наука,1979.-432с. 3. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. - М.,ФМГ,1961.-391с 4. Дубовицкий А.Я., Милютин А.А. Задачи на экстремум при наличии ограничений // Доклады АН СССР.-1963.-149, N4.-С.759-762. 5. Дубовицкий А.Я., Милютин А.А. Задачи на экстремум при наличии ограничений // Журнал вычислительной математики и математической физики.-1965.-5,N3.-С.395-453. 6. Колесников А.А. Синергетическая теория управления (инварианты, оптимизация, синтез).-Таганрог, М.: Энергоатомиздат,1994.-344с.7. Цыпкин Я.З. Оптимальность в задачах и методах современной теории управления (htth: // www.ras.ru / FStorage / download.aspx?Id=fbab5b5e-9b17-4ee0-baec-01819cc1ef6).8. Гирсанов И.В. Лекции по математической теории экстремальных задач. М.: Изд-во МГУ,1970. -117с. 9. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.:- Наука,1968.-496с.10. Радиевский А.Е. Задача динамического синтеза при векторном управлении // Радиоэлектроника и информатика.-2003.-№4-С.57-60. 11. Неймарк Ю.И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1972. -472с.12. Летов А.М. Динамика полета и управление. М .:- Наука, 1969.360с. 13. Радиевский А.Е. Выбор функционала качества динамических систем на основе обратных задач динамики // Оптимизация электромеханических систем с упругими элементами. Харьков: ИМиС, 1995. С.282-288.

Радієвський А.Е.

ФОРМАЛІЗМ ДУБОВІЦЬКОГО-МИЛЮТІНА ТА ЗАДАЧА ДИНАМІЧНОГО СИНТЕЗУ

На основі положень формалізму Дубовіцького-Мілютіна досліджується задача динамічного синтезу. Доведено, що його застосування дозволяє отримати систему керування, яка задовольняє фундаментальним принципам синергетичної теорії керування.

Radievski A. E.

THE DUBOVITSKI-MILUTIN FORMALISM AND THE TASK OF DYNAMIC SYNTHESIS

The task of dynamics synthesis under consideration by use Dubovitski-Milutin formalism. The proof that the his application allow to obtain the system control with the fundamental principals of the synergetic theory of control.