

УДК 539.3

Танченко А.Ю.

## **СВЯЗАННАЯ ЗАДАЧА О НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ И КОРРОЗИОННОМ УТОНЕНИИ ТОНКОСТЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ**

**Введение.** Коррозионный износ является существенной проблемой для высоконагруженных машин, работающих длительный срок в жестких условиях эксплуатации, таких как краны, краны-перегрузатели. При этом существенную роль играет характер напряженно-деформированного состояния (НДС). Это особо актуально для тонкостенных оболочечных конструкций, у которых запланированное утонение на период эксплуатации составляет 20-25% от номинальных толщин. Таким образом, возникает связанная задача определения «изменяемого» напряженно-деформированного состояния, зависящего от толщины стенки, которая в свою очередь зависит от НДС. В статье [1] ставилась подобная задача на примере шарнирно опертого стержня, однако была учтена лишь изгибная составляющая напряжений (хотя, нужно заметить, в довольно сложной форме – под действием перемещаемого груза). При дальнейшем исследовании процесса был выявлен существенный вклад в характер НДС помимо изгибных воздействий (от перемещаемого по верхнему строению грейферной тележки с грузом и без) влияние растягивающих (вдоль рельсового полотна) нагрузок. Это связано с особенностями самой конструкции, у которой главный рабочий инструмент – главная балка с перемещаемой грейферной тележкой, расположена на несущих всю нагрузку опорах, одна из которых «шарнирная». Таким образом, целью данной публикации является расширить и дополнить ранее предложенную [1] методику расчета изменяемого напряженно-деформированного состояния для случая связанного с ним процесса коррозионного утонения.

**Постановка задачи.** Пусть в начальный момент времени  $t_0 = 0$  исследуемое тело занимает область  $\Omega_0 = \Omega(t_0)$ . Учитывая, что процесс коррозионного износа является достаточно медленным, то в случае приложения статической нагрузки  $f$  его НДС описывается системой дифференциальных уравнений теории упругости [2]:

$$L(u)|_{\Omega} = f, \quad (1)$$

где  $L$ - дифференциальный оператор системы уравнений теории упругости в перемещениях.

При этом область  $\Omega$  на интервале времени  $[t, t + \Delta t]$  изменяется (рис.1):

$$\Omega(t + \Delta t) = \Omega(t) - \Delta\Omega(t)\Delta t. \quad (2)$$

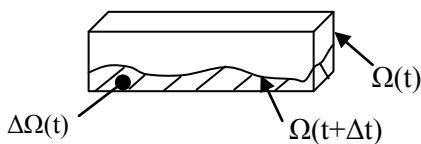


Рисунок 1 – Изменение области  $\Omega$  в процессе коррозионного утонения

Зависимость скорости изменения от параметров НДС можно определить, используя модель Долинского [3], которая определяет скорость утонения в дифференциальной форме как функцию интенсивности напряжений  $\sigma$ :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -C_1 - C_2 \sigma(z, t). \quad (3)$$

Учитывая, что  $\sigma = \sigma(u)$ , то система уравнений (1-3) определяет связанную задачу, которую необходимо решать совместно.

**Методика решения.** Рассмотрим связанную задачу (1-3) для тонкостенных

элементов машиностроительных конструкций. Тогда, обозначая через  $S$  срединную поверхность тела, область  $\Omega$  можно представить в виде [1]

$$\Omega = S \times h. \quad (4)$$

Учитывая, что в выражении (4) наиболее существенное влияние оказывает именно толщина  $h(t)$ , то можно положить  $S = const$ . Тогда система уравнений (1-4) записывается относительно переменных  $(u, h)$ . При этом для частных случаев тонкостенных элементов эти уравнения можно трансформировать к виду:

$$L_S(u, h) = f_S, \quad (5)$$

где  $L_S$  - оператор, определенный на области  $S$  (например, для срединных поверхностей пластин, оболочек или стержней),  $h$  - параметр, определяемый уравнением (3).

Принимая во внимание, что в случае медленного процесса утонения  $h(t)$  напряженно-деформированное состояние тела изменяется плавно, можно провести дискретизацию во времени соотношений (3), заменив непрерывное изменение  $h(t)$  на кусочно-линейное:

$$h(t_{k+1}) = h(t_k + \Delta t_k) \approx h(t_k) + \frac{\partial h}{\partial t}(t_k) \cdot \Delta t_k. \quad (6)$$

Тогда для моментов времени  $t_k, k=0,1,\dots$ , получаем последовательность задач

$$L_S(u, h_k) = f_S, \quad (7)$$

которые можно решать традиционными методами механики сложной среды, а между полученными полями  $u_k = u(t_k)$  провести кусочно-линейную аппроксимацию во времени.

**Частный случай стержня на шарнирном опирании.** Рассмотрим иллюстрацию предложенного подхода на частном случае изгиба шарнирно опертого стержня (полосы) (рис. 2) прямоугольного поперечного сечения  $b \times h$ .

Предположим, что справедливы допущения:

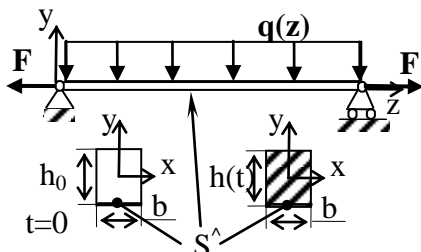


Рисунок 2 – Расчетная схема стержня

1. Коррозионный износ происходит только по нижней части поверхности стержня  $S^{\wedge}$ .
2. Утонение происходит по направлению к начальной нормали поверхности (изменением направления нормали пренебрегаем).
3. Утонение в различных сечениях ( $z = const$ ) происходит независимо друг от друга.
4. Утонение по ширине постоянно.

Тогда удастся записать дифференциальную постановку задачи. Уравнение, связывающее изменение толщины с напряженно-деформированным состоянием, выглядит следующим образом:

$$\frac{dh}{dt} = -C_1 - C_2 \cdot \sigma_z(z, t). \quad (8)$$

Здесь  $C_1, C_2$  - некоторые физико-механические характеристики процесса коррозионного утонения, определяемые свойствами среды и материала,  $\sigma = \sigma_z(z, t)$  - изгибные напряжения на нижней поверхности стержня.

Распределения изгибающих моментов  $M$  в балке описывается уравнением

$$\frac{d^2 M}{dz^2} = f(z). \quad (9)$$

Максимальные изгибные напряжения

$$\sigma(z, t) = M(z, t)/W, \quad (10)$$

где  $W$  - момент сопротивления (в нашем случае  $W = bh^2/6$ ).

Дополним ранее предложенную постановку [1] напряжениями от действия сил растяжения. В зависимости от направления приложения силы (знака) возможно как растяжение стержня, так и его сжатие. Напряжения от продольного усилия  $F$  запишутся в виде (см. рис.2)

$$\sigma(z,t) = \frac{F}{A} = \frac{F}{b \cdot h}, \quad (11)$$

где  $A$  - площадь поперечного сечения,  $F$  – продольное усилие.

Тогда

$$\frac{dh}{dt} = -C_1 - C_2 \cdot \left( \frac{6 \cdot M(z)}{b \cdot h^2} + \frac{F}{b \cdot h} \right) = -C_1 - \frac{C_2(z)}{h^2(t)} - \frac{C_3}{h(t)}, \quad (12)$$

где  $C_2 = C_2 \cdot \frac{6 \cdot M(z)}{b}$ ,  $C_3 = C_2 \cdot \frac{F}{b}$ .

После добавления слагаемого, характеризующего продольное растяжение/сжатие, стал возможен вариант перемены знака суммарных напряжений и возникновение коллизии «нарастания» толщины слоя со временем при неучете этой возможности. Для устранения данного вида заведомо нефизичного процесса, возьмем слагаемые с скобках по модулю. Физически это будет означать, что корродирование происходит с одинаковой интенсивностью как при положительных (растягивающих) так и отрицательных (сжимающих) напряжениях, т.е. пропорционально величине интенсивности напряжений:

$$\frac{dh}{dt} = -C_1 - C_2 \cdot \left| \frac{6 \cdot M(z)}{b \cdot h^2} + \frac{F}{b \cdot h} \right|, \quad (13)$$

Заметим, что уравнение (8) довольно затруднительно решить в аналитическом виде, хотя не составляет особого труда реализовать процедуру численного решения. Для решения же в аналитическом виде можно записать уравнение в обратной форме, используя обозначения:

$$\dot{h} = \frac{dh}{dt} = \frac{1}{dt/dh} = \frac{1}{t'}. \quad (14)$$

Тогда уравнение коррозионного износа (8) при знакопостоянном напряжении на корродирующей поверхности можно записать в следующей форме:

$$t' = -\frac{1}{C_1 + C_2/h^2 + C_3/h} = \frac{h^2}{C_1 h^2 + C_2 + C_3 h}, \quad (15)$$

и его решение будет иметь вид

$$t(h) = -\frac{h}{C_1} + \frac{C_3}{2C_1^2} \ln(C_1 h^2 + C_2 + C_3 h) + \frac{2C_1 C_2 - C_3^2}{C_1^2 \sqrt{4C_1 C_2 - C_3^2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2C_1 h + C_3}{\sqrt{4C_1 C_2 - C_3^2}}\right) + \tilde{t}, \quad (16)$$

$$\tilde{t} = t(h_0) = -\frac{h_0}{C_1} + \frac{C_3}{2C_1^2} \ln(C_1 h_0^2 + C_2 + C_3 h_0) + \frac{2C_1 C_2 - C_3^2}{C_1^2 \sqrt{4C_1 C_2 - C_3^2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2C_1 h_0 + C_3}{\sqrt{4C_1 C_2 - C_3^2}}\right).$$

Отсюда получаем зависимость между временем и толщиной корродирующей балки, где  $t(0) = T_{kr}$  - характерное критическое время (время полного растворения наиболее нагруженной зоны).

**Численное моделирование процесса утонения.** Частный случай равномерно распределенной нагрузки ( $q = \text{const}$ ) с добавлением продольного растягивающего/сжимающего усилия.

В этом случае уравнение (9) будет иметь вид

$$\frac{d^2 M}{dz^2} = q, \Rightarrow M(z) = \frac{q \cdot z(z-l)}{2}. \quad (17)$$

Изгибные напряжения как функция пространственной и временной координат:

$$\sigma(z, t) = \frac{3q \cdot z(z-l)}{b \cdot h^2(t)}. \quad (18)$$

Тогда с учетом (18) закон утонения можно записать в виде

$$\frac{dh}{dt} = -C_1 - C_2 \cdot \left| \frac{3q \cdot z(z-l)}{b \cdot h^2} + \frac{F}{b \cdot h} \right| = -C_1 - \left| \frac{C_2(z)}{h^2(t)} + \frac{C_3}{h(t)} \right|. \quad (19)$$

В данном случае решается качественная модельная задача, поэтому были заданы аналогично [1] некие начальные единичные значения коэффициентов  $C_1=1$ ,  $C_2=1$ ,  $C_3=1$ , а также  $l=10$ ,  $q=1$ ,  $b=1$ ,  $h_0=1$ , и получены зависимости изменений толщин и напряжений на нижней поверхности  $S^\wedge$ , изменяющиеся во времени (рис.3). На графиках рис.3 и далее время  $t$  и пространственная координата  $z$  представлены в интервале  $[0..T_{kr}]$  и  $[0..l]$  соответственно (числами обозначены номера точек дискретизации по  $t$  и по  $z$ ).

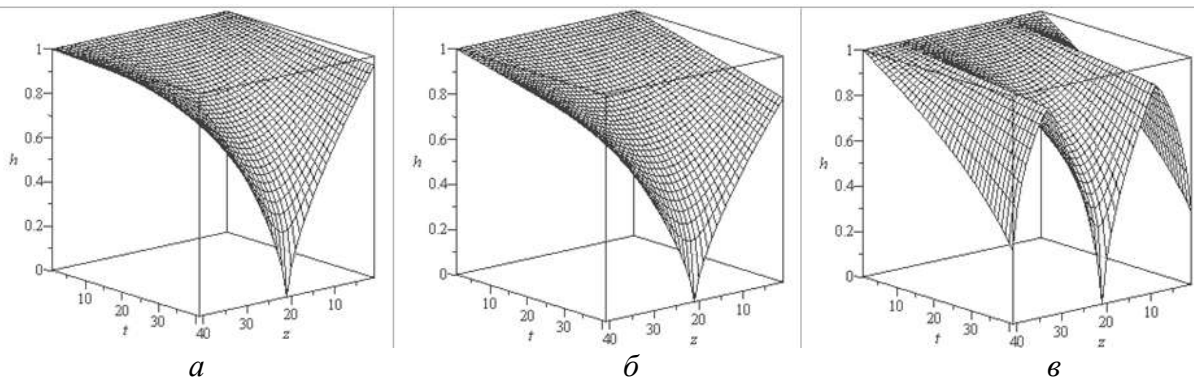


Рисунок 3 – Графики изменения толщин балки с течением времени под действием распределенной и продольной нагрузок

(а – без продольной нагрузки, б – с действием постоянного растягивающего усилия, в – с постоянным сжимающим усилием)

Заметим, что для каждого случая критическое время  $T_{kr}$  различно, а, следовательно, различны и интервалы «жизнеспособности» балки. Но для качественного сравнения здесь и далее все графики отнормированны по величине  $T_{kr}$ .

На следующем рисунке представлены графики изменения толщины балки во времени – для характерного временного участка. На графиках рис.4 представлено отличие толщин для случаев дополнительного растягивающего (рис.4а) и сжимающего (рис.4б) усилий по сравнению с его отсутствием.

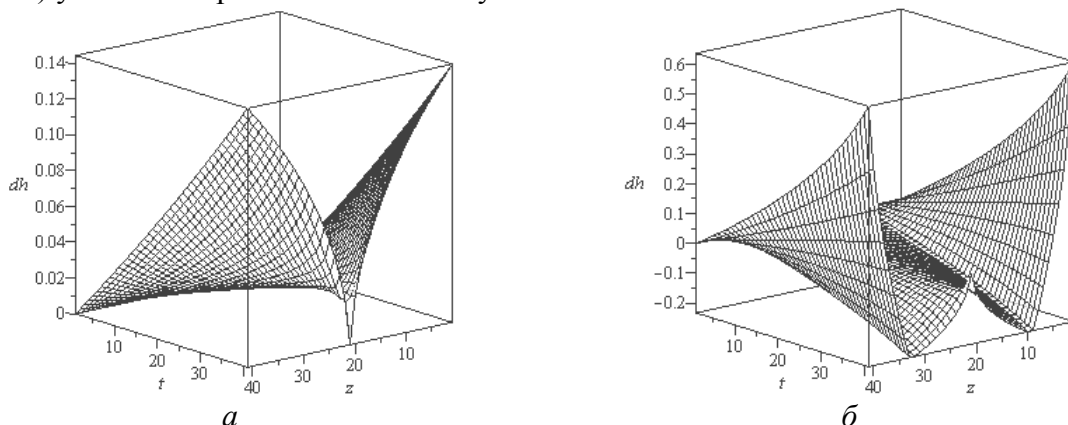


Рисунок 4 – Графики абсолютного отличия процессов корродирования при наличии и отсутствии дополнительного продольного усилия

(а – растягивающего, б - сжимающего)

На графиках рис. 5 представлены изменения напряжений в балке при наличии и отсутствии дополнительного продольного усилия.

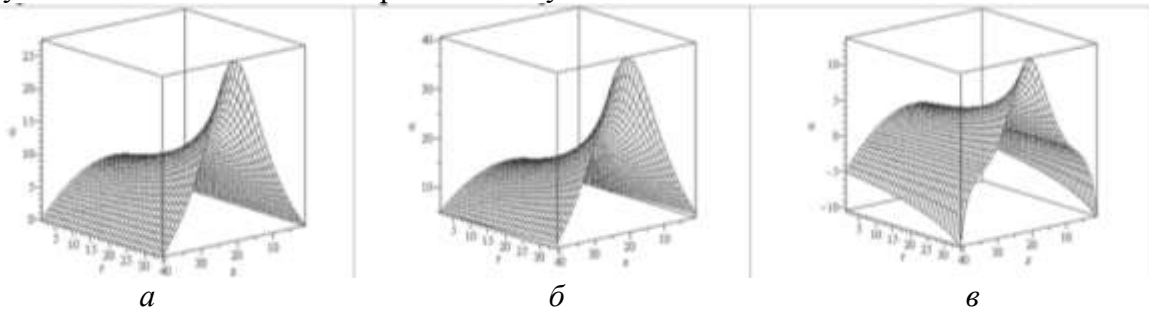


Рисунок 5 – Графики изменения напряжений в балке с течением времени под действием распределенной и продольной загрузок (*a* – без продольной нагрузки, *б* – с действием постоянного растягивающего усилия, *в* – с постоянным сжимающим усилием)

**Определение исходного профиля балки.** Под нахождением исходного профиля понимается обратная задача: определить такой профиль балки, который выполняет условие запланированного одновременного разрушения во всех сечениях через характерное критическое время. Из нижеследующих графиков хорошо видно, насколько сильно влияет продольное натяжение/сжатие.

Рис. 6 наглядно демонстрирует различие в проектировании с изначальным учетом коррозионного износа. В такой постановке приоритетным является не начальное во времени состояние, а конечное (которые может быть выражено в долях от некоего «критического времени», при котором НДС достигает критических значений одновременно по всей конструкции). Этот профиль получен путем обратного интегрирования уравнения (13). На рис. 7 приведены графики изменения толщины и эквивалентных напряжений во времени для случая исходного профиля балки с дополнительным продольным сжатием.

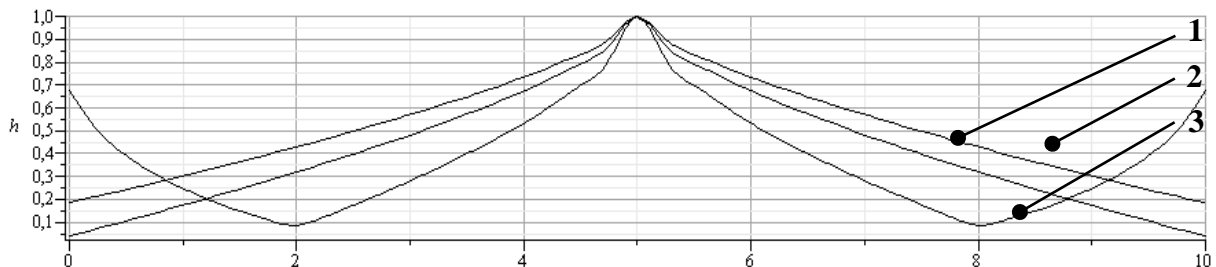


Рисунок 6 – Профили сечения балки, обеспечивающие равномерность утонения при достижении характерного «критического времени» (1-без продольного усилия, 2-дополнительное растяжение, 3-дополнительное сжатие)

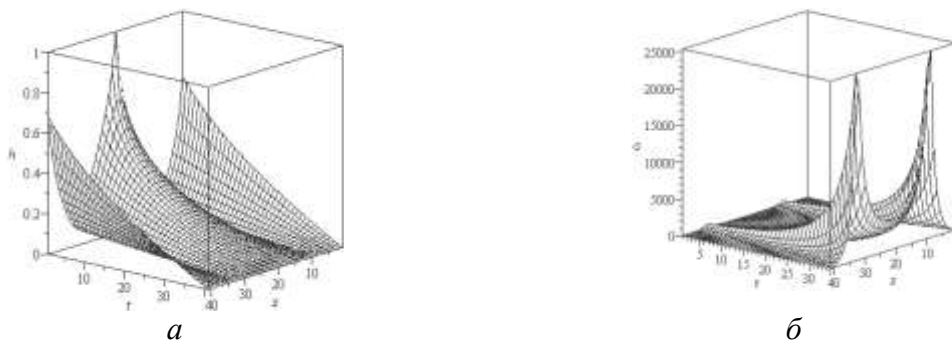


Рисунок 7 – Графики изменения толщин балки (*a*) и напряжений (*б*) с течением времени для случая профиля, полученного при решении обратной задачи

Заметим, что в случае наличия дополнительного продольного сжатия наименее нагруженные зоны шарнирно опертой балки сдвигаются от краев на величину, пропорциональную продольному усилию, и концы балки также подвергаются существенному коррозионному воздействию.

**Заключение.** Как и предполагалось, добавочное продольное нагружение вносит ощутимый вклад в процесс деградации материала. Существенным фактом также является направление продольного усилия, и в случае сжатия получаем качественно иной вид поверхности утонения балки, а, следовательно, и ее напряженно-деформированного состояния. Довольно актуальной является задача нахождения некоего исходного профиля с заранее запланированной деградацией поверхности: так, если в статье приведены данные для некоего модельного случая полного растворения наиболее нагруженной зоны, то не составляет труда ввести ограничения на пределы напряженного либо деформированного состояния, а также коррективы на «технологичность» - результатом такого синтеза может быть получена экономически выгодная модель конструкции. Однако при этом возрастают требования к точности задания действующих нагрузок и возрастает цена ошибки, поскольку конструкция синтезируется на их основе.

Литература: 1. Танченко А.Ю. Связанная задача утонения и напряженно-деформированного состояния шарнирно опертого стержня / А.Ю. Танченко // Вісник НТУ «ХП». Тем. вип.: Транспортное машиностроение, 2010. – №38. – с.140-151. 2. Лурье А.И. Теория упругости / А.И. Лурье / – М.: Наука, 1970. – 940с. 3 Долинский В.М. Расчет элементов конструкций, подверженных равномерной коррозии / В.М. Долинский // Деформирование материалов и элементов конструкций в агрессивных средах. – Саратов, 1983. – С.61-67.

Танченко А.Ю.

#### ЗВ'ЯЗАНА ЗАДАЧА ПРО НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ТА КОРОЗИЙНЕ СТОНШУВАННЯ ТОНКОСТІННИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЇ

У статті поставлена та розв'язана задача про зв'язані процеси корозійного стоншування та напружено-деформованого стану тонкостінних елементів машинобудівних конструкцій. Задача розв'язана на прикладі шарнірно опертого стрижня. Досліджено вплив від сумісної дії напружень розтягання-стиску та згинання на характер стоншування стрижня.

Tanchenko A.Y.

#### COUPLED PROBLEM ON THE STRESS-STRAIN STATE AND CORROSION THINNING OF THIN-WALLED STRUCTURAL ELEMENTS

In this paper the problem of the associated process of corrosion thinning and stress-strain state of engineering structures thin-walled elements is solved. The problem is solved at the example of a simply supported rod. The effect of the combined action of compression stresses stretching and bending on the rod thinning is researched.

---