

УДК 532:631.362

Ольшанский В.П., Ольшанский С.В.

## **О КОЛЕБАНИЯХ СКОРОСТИ ДВИЖЕНИЯ НЕОДНОРОДНОГО ВИБРООЖИЖЕННОГО СЛОЯ ЗЕРНА НА ПЛОСКОМ РЕШЕТЕ**

**Постановка проблемы.** Вибрации решета интенсифицируют процесс сепарирования зерновой смеси, в связи с чем исследование влияния параметров вибраций на сегрегацию зернового материала при движении его по рабочей поверхности решета относится к актуальным научно-прикладным задачам. Важное значение при этом приобретает разработка уточнённых математических моделей движения сепарируемых зерновых смесей с учётом переменности параметров во времени и по пространственным координатам. К таким, в частности, относятся колебания скорости потока и переменность вибровязкости, вызванная изменением давления по толщине движущегося слоя.

**Обзор последних публикаций.** Имеются различные подходы к моделированию движения вибросепарируемых зерновых смесей. Один из них базируется на аналогиях движений вязкой ньютоновской жидкости и сыпучей среды в условиях вибраций [1,2]. Используя эту аналогию, движение смеси описывают уравнениями динамики вязкой жидкости, которые получают в результате упрощений классических уравнений Навье-Стокса [3,4]. Так поступали и в работах [5,6] при моделировании колебаний потока слоя зерна на плоском наклонном виброрешете. Математическая модель существенно усложняется при учёте изменения вибровязкости смеси по толщине слоя. В одном из параграфов работы [4] в функциях Кельвина получено решение краевой задачи гидродинамики, когда изменение вибровязкости смеси подчиняется линейному закону. В [7] решена более общая задача с учётом разделения потока на проходную и сходящую фракции. Однако, остаётся неизученными закономерности изменения скорости потока при других законах изменения вибровязкости. Восполнение этого пробела определило цель работы.

**Целью работы** является получение формул для расчёта колебаний скорости потока зерна по плоскому виброрешету, когда вибровязкость неоднородного слоя по его толщине аппроксимируется экспоненциальной функцией. Для достижения этой цели в функциях Кельвина строится аналитическое решение краевой задачи гидродинамики и показывается расчётами к каким результатам оно приводит.

**Основная часть работы.** Движение слоя смеси в установившемся режиме считаем одномерным, т.е. две проекции скорости потока полагаем равными нулю. Отличную от нуля проекцию скорости движения в направлении координатной оси  $Ox$ , показанной на рисунке 1, принимаем зависимой только от координаты  $y$  и времени  $t$ . Её определяем из решения краевой задачи для уравнения

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \nu(y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial u}{\partial t} = -g \sin \theta \quad (1)$$

при граничных условиях:

$$u'_y(0, t) = 0; \quad u(h, t) = A^* \omega \sin(\omega t). \quad (2)$$

В выражениях (1), (2)  $A^*, \omega$  - амплитуда и частота продольных колебаний

решета, наклонённого под углом  $\theta$  к горизонту;  $g$  - ускорение свободного падения;  $u(y, t)$  - скорость потока;  $h$  - толщина слоя зерновой смеси.

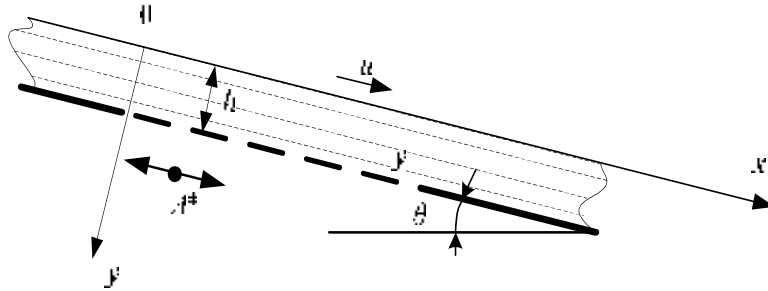


Рисунок 1 – Расчетная схема

Кинематическую вибровязкость смеси аппроксимируем экспоненциальной функцией

$$v(y) = v_0 \exp(\lambda y), \quad (3)$$

где  $v_0$  - вибровязкость на поверхности слоя;  $\lambda > 0$  - характеризует её возрастание по мере удаления от свободной поверхности вглубь слоя.

Учитывая (3), введением новой переменной

$$\xi = \exp(-\lambda y),$$

уравнение (1) преобразуем к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{1}{\lambda^2 v_0 \xi} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{g \sin \theta}{\lambda^2 v_0 \xi}. \quad (4)$$

Представим решение (4) суммой

$$u(y, t) = u_1(y) + u_2(y, t). \quad (5)$$

Подставив (5) в (4), получаем два уравнения:

$$\frac{d^2 u_1}{d \xi^2} = -\frac{g \sin \theta}{\lambda^2 v_0 \xi}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi^2} - \frac{1}{\lambda^2 v_0 \xi} \frac{\partial u_2}{\partial t} = 0. \quad (7)$$

Согласно (2), их решения должны удовлетворять следующим граничным условиям:

$$\left. \frac{du_1}{dy} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial u_2}{\partial y} \right|_{y=0} = 0; \quad u_1(h) = 0; \quad u_2(h, t) = A * \omega \sin(\omega t). \quad (8)$$

Повторное интегрирование, с учётом (8), приводит к решению краевой задачи для уравнения (6) в виде

$$u_1(y) = \frac{g \sin \theta}{\lambda^2 v_0} (\xi - \xi_1 + \xi_1 \ln \xi_1 - \xi \ln \xi), \quad (9)$$

где  $\xi_1 = \exp(-\lambda h)$ .

Решение краевой задачи для уравнения (7) выразим с помощью комплексной функции вещественного переменного  $w(y)$  суммой

$$u_2(y) = \mathbf{Re} w(y) \cdot \sin(\omega t) + \mathbf{Im} w(y) \cos(\omega t), \quad (10)$$

в котрой  $w(y)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - \frac{i\omega}{\lambda^2 v_0 \xi} w = 0, \quad i = \sqrt{-1} \quad (11)$$

и граничным условиям:

$$\begin{aligned} \mathbf{Re} w(h) &= A * \omega; \quad \mathbf{Im} w(h) = 0; \\ \mathbf{Re} w'_y(0) &= 0; \quad \mathbf{Im} w'_y(0) = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

вытекающем из (8).

Общее решение уравнения (11) имеет вид

$$w(y) = \eta \left[ (c_1 + ic_2) e^{i\frac{\pi}{2}} I_1 \left( \eta e^{i\frac{\pi}{4}} \right) + (c_3 + ic_4) e^{-i\frac{\pi}{2}} K_1 \left( \eta e^{i\frac{\pi}{4}} \right) \right], \quad (13)$$

где  $\eta = \frac{2}{\lambda} \sqrt{\frac{\omega}{v_0}} \xi$ ;  $c_1, c_2, c_3, c_4$  - вещественные произвольные постоянные;  $I_1(z)$ ,

$K_1(z)$  - модифицированная функция Бесселя и Макдональда индексов единица.

Для вычисления производной из (13) учтём соотношения [8]

$$\frac{d}{dz} [zI_1(z)] = zI_0(z); \quad \frac{d}{dz} [zK_1(z)] = -zK_0(z),$$

в которых  $I_0(z)$ ,  $K_0(z)$  - модифицированная функция Бесселя и функция Макдональда нулевого индекса.

Тогда

$$\frac{dw}{d\eta} = \eta \left[ (c_1 + ic_2) e^{i\frac{\pi}{2}} I_0 \left( \eta e^{i\frac{\pi}{4}} \right) - (c_3 + ic_4) e^{-i\frac{\pi}{2}} K_0 \left( \eta e^{i\frac{\pi}{4}} \right) \right] e^{i\frac{\pi}{4}}. \quad (14)$$

Чтобы разделить (13) и (14) на вещественную и мнимую части воспользуемся выражениями[8]

$$\begin{aligned} e^{i\frac{\pi}{2}} I_1 \left( \eta e^{i\frac{\pi}{4}} \right) &= ber_1(\eta) + ibei(\eta); \\ e^{-i\frac{\pi}{2}} K_1 \left( \eta e^{i\frac{\pi}{4}} \right) &= \mathbf{ker}_1(\eta) + kei_1(\eta); \\ e^{i\frac{\pi}{2}} I_0 \left( \eta e^{i\frac{\pi}{4}} \right) &= iber(\eta) - bei(\eta); \\ e^{-i\frac{\pi}{2}} K_0 \left( \eta e^{i\frac{\pi}{4}} \right) &= -i \mathbf{ker}(\eta) + kei(\eta), \end{aligned} \quad (15)$$

в которых  $ber(\eta)$ ,  $bei(\eta)$ ,  $\mathbf{ker}(\eta)$ ,  $kei(\eta)$ ,  $ber_1(\eta)$ ,  $bei_1(\eta)$ ,  $\mathbf{ker}_1(\eta)$ ,  $kei_1(\eta)$  - функции Кельвина индексов нуль и единица.

Учитывая (13), (14) и (15), находим

$$\begin{aligned} \mathbf{Re} w &= \eta [c_1 ber_1(\eta) - c_2 bei_1(\eta) + c_3 \mathbf{ker}_1(\eta) - c_4 kei_1(\eta)]; \\ \mathbf{Im} w &= \eta [c_1 bei_1(\eta) + c_2 ber_1(\eta) + c_3 kei_1(\eta) + c_4 \mathbf{ker}_1(\eta)]; \\ \mathbf{Re} \frac{dw}{d\eta} &= -\frac{\eta}{\sqrt{2}} \{c_1 [bei(\eta) + ber(\eta)] + c_2 [ber(\eta) - bei(\eta)] + \\ &+ c_3 [kei(\eta) + \mathbf{ker}(\eta)] + c_4 [\mathbf{ker}(\eta) - kei(\eta)]\}; \\ \mathbf{Im} \frac{dw}{d\eta} &= \frac{\eta}{\sqrt{2}} \{c_1 [ber(\eta) - bei(\eta)] - c_2 [bei(\eta) + ber(\eta)] + \\ &+ c_3 [\mathbf{ker}(\eta) - kei(\eta)] - c_4 [kei(\eta) + \mathbf{ker}(\eta)]\}. \end{aligned} \quad (16)$$

Выражения (12) и (16) приводят к системе четырёх алгебраических уравнений для определения констант  $c_j$ ,  $j = \overline{1;4}$ :

$$\begin{aligned} c_1 ber_1(\eta_1) - c_2 bei_1(\eta_1) + c_3 \mathbf{ker}_1(\eta_1) - c_4 kei_1(\eta_1) &= A^* \omega \eta_1^{-1}; \\ c_1 bei_1(\eta_1) + c_2 ber_1(\eta_1) + c_3 kei_1(\eta_1) + c_4 \mathbf{ker}_1(\eta_1) &= 0; \\ c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 + c_4 f_4 &= 0; \end{aligned} \quad (17)$$

$$c_1 f_2 - c_2 f_1 + c_3 f_4 - c_4 f_3 = 0.$$

Здесь  $\eta_0 = \frac{2}{\lambda} \sqrt{\frac{\omega}{\nu_0}}$ ;  $\eta_1 = \eta_0 \sqrt{\xi_1}$ ;  $f_{1,2} = \text{ber}(\eta_0) \pm \text{bei}(\eta_0)$ ;  
 $f_{3,4} = \text{ker}(\eta_0) \pm \text{kei}(\eta_0)$ .

Решив систему (17), находим постоянные:

$$c_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad c_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad c_3 = c_1 \delta_1 + c_2 \delta_2; \quad c_4 = -c_1 \delta_2 + c_2 \delta_1;$$

$$\Delta_1 = A^* \omega \eta_1^{-1} [\text{ber}_1(\eta_1) + \delta_1 \text{ker}_1(\eta_1) + \delta_2 \text{kei}_1(\eta_1)];$$

$$\Delta_2 = -A^* \omega \eta_1^{-1} [\text{bei}_1(\eta_1) + \delta_1 \text{kei}_1(\eta_1) - \delta_2 \text{ker}_1(\eta_1)];$$

$$\Delta = [\text{ber}_1(\eta_1) + \delta_1 \text{ker}_1(\eta_1) + \delta_2 \text{kei}_1(\eta_1)]^2 + [\text{bei}_1(\eta_1) + \delta_1 \text{kei}_1(\eta_1) - \delta_2 \text{ker}_1(\eta_1)]^2;$$

$$\delta_1 = -\frac{f_1 f_3 + f_2 f_4}{f_3^2 + f_4^2}; \quad \delta_2 = \frac{f_1 f_4 - f_2 f_3}{f_3^2 + f_4^2}.$$

Учитывая значения констант, а также выражения (5), (9), (10) и (16), получаем искомое решение краевой задачи

$$u(y, t) = \frac{g \sin \theta}{\lambda^2 \nu_0} (\xi - \xi_1 + \xi_1 \ln \xi_1 - \xi \ln \xi) + \eta [c_1 \text{ber}_1(\eta) - c_2 \times$$

$$\times \text{bei}_1(\eta) + c_3 \text{ker}_1(\eta) - c_4 \text{kei}_1(\eta)] \sin(\omega t) + \eta [c_1 \text{bei}_1(\eta) + c_2 \text{ber}_1(\eta) +$$

$$+ c_3 \text{kei}_1(\eta) + c_4 \text{ker}_1(\eta)] \cos(\omega t). \quad (18)$$

Для выбранной аппроксимации неоднородности колебания скорости потока слоя выражаются с помощью затабулированных в [8] функций Кельвина.

Эти таблицы можно применять и для расчёта удельной производительности решета, которая представляется интегралом

$$\bar{Q}(t) = \int_0^h u(y, t) dy = -\frac{2}{\lambda} \int_{\eta_0}^{\eta_1} u(\eta, t) \eta^{-1} d\eta. \quad (19)$$

Для вычисления интеграла учтём, что [8]

$$\int \text{ber}_1(\eta) d\eta = \frac{1}{\sqrt{2}} [\text{ber}(\eta) - \text{bei}(\eta)]; \quad \int \text{bei}_1(\eta) d\eta = \frac{1}{\sqrt{2}} [\text{bei}(\eta) + \text{ber}(\eta)];$$

$$\int \text{ker}_1(\eta) d\eta = \frac{1}{\sqrt{2}} [\text{ker}(\eta) - \text{kei}(\eta)]; \quad \int \text{kei}_1(\eta) d\eta = \frac{1}{\sqrt{2}} [\text{kei}(\eta) + \text{ker}(\eta)].$$

Подставив (18) в (19), находим

$$\bar{Q}(t) = \frac{gh \sin \theta}{\lambda^2 v_0} \left[ \xi_1 h (\ln \xi_1 - 2) + \frac{2}{\lambda} (1 - \xi_1) \right] - \frac{2}{\lambda} \times \\ \times [c_1 \Phi_1 - c_2 \Phi_2 + c_3 \Phi_3 - c_4 \Phi_4] \sin(\omega t) - [c_1 \Phi_2 + c_2 \Phi_1 + \\ + c_3 \Phi_4 + c_4 \Phi_3] \cos(\omega t).$$

Здесь

$$\Phi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} [ber(\eta_1) - ber(\eta_0) - bei(\eta_1) + bei(\eta_0)];$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} [bei(\eta_1) - bei(\eta_0) + ber(\eta_1) - ber(\eta_0)];$$

$$\Phi_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} [ker(\eta_1) - ker(\eta_0) - kei(\eta_1) + kei(\eta_0)];$$

$$\Phi_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} [kei(\eta_1) - kei(\eta_0) + ker(\eta_1) - ker(\eta_0)].$$

Производительность решета также меняется по гармоническому закону, но с некоторым смещением по фазе по отношению к колебаниям рабочей плоскости, по которой движется смесь.

**Численные результаты и их анализ.** Расчёты проведены для зерновой смеси пшеницы при следующих исходных данных:  $\rho = 750 \text{ кг/м}^3$ ;  $f = 0,47$ ;  $M = 0,00004 \text{ кг}$ ;  $r_0 = 0,001825 \text{ м}$ ;  $h = 0,006 \text{ м}$ ;  $\lambda = 50 \text{ м}^{-1}$ ;  $v_0 = 0,00005 \text{ м}^2\text{с}^{-1}$ .

Работу решета характеризовали параметрами:  $\theta = 5^0$ ;  $A^* = 0,0075 \text{ м}$ ;  $\omega = \omega_1 = 41,86 \text{ с}^{-1}$ ;  $\omega = \omega_2 = 52,33 \text{ с}^{-1}$ .

Вычисленные по формуле (18) распределения скорости по толщине слоя в различные моменты времени показаны на рис. 2 а) и б). С течением времени профиль скорости существенно меняется у поверхности решета. У свободной поверхности слоя он меняется незначительно. Там скорость потока смеси близка к постоянному значению.

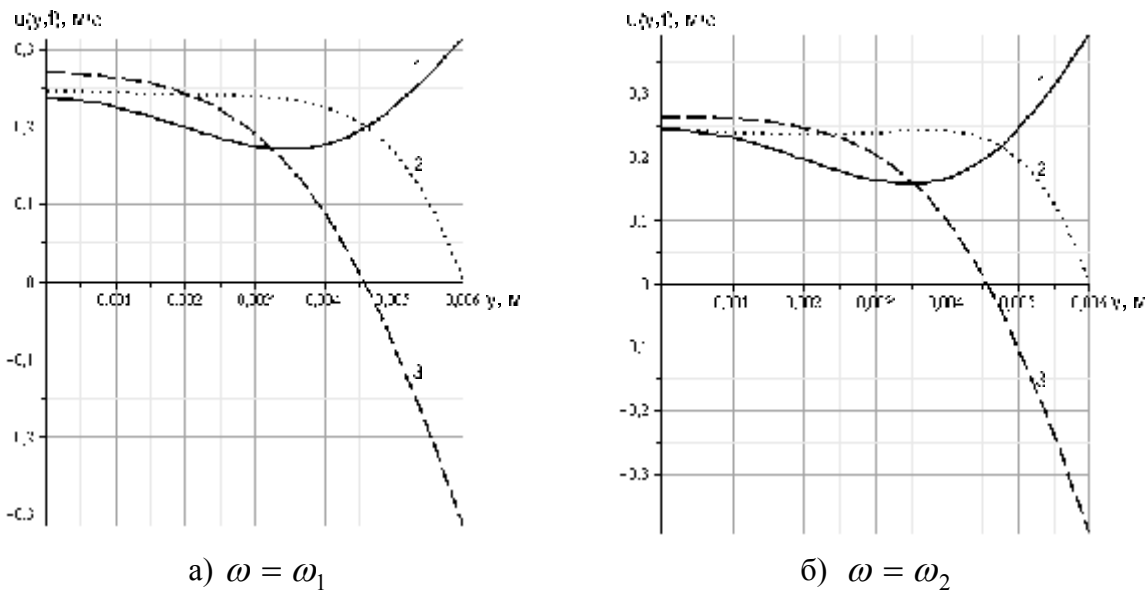


Рисунок 2 – Профили потока зерновой смеси пшеницы в различные моменты времени:

$$\text{—} \quad t = \frac{\pi}{2\omega}; \quad \cdots \quad t = \frac{\pi}{\omega}; \quad \text{---} \quad t = \frac{3\pi}{2\omega}.$$

**Выводы.** При экспоненциальном изменении эффективной вязкости зерновой смеси амплитуды колебаний скорости потока её на плоском виброрешете выражаются через функции Кельвина. Происходит быстрое затухание амплитуд колебаний с удалением от поверхности решета и у свободной поверхности слоя абсолютная скорость потока близка к постоянному значению.

Литература: 1. Захаров Н.М. Об аналогии вибрируемого слоя с вязкой жидкостью // Доклады МИИСП. – М., 1966. – Т. 3. Вип. 1. – С. 201-210. 2. Урьев Н.Б., Михайлов Н.В., Ребиндер П.А. Исследование реологических свойств высокодисперсных порошков в процессе вибрации // Доклады АН СССР, 1969, Т.184, № 2. – С. 14-17. 3. Тищенко Л.Н. Интенсификация сепарирования зерна. – Харьков: Основа, 2004. – 224с. 4. Тищенко Л.Н., Ольшанский В.П., Ольшанский С.В. Гидродинамика сепарирования зерна. – Харьков: Міськдрук, 2010. – 174 с. 5. Тищенко Л.Н., Ольшанский В.П., Ольшанский С.В. К расчёту движения зерновой смеси на вибрирующем плоском наклонном решете // Вібрації в техніці та технологіях. 2009. – №1(53). – С. 109-113. 6. Тищенко Л.Н., Ольшанский В.П., Ольшанский С.В. О колебаниях скорости зерновой смеси на виброрешете // Вібрації в техніці та технологіях. 2010. – №1(57). – С. 118-123. 7. Тищенко Л.Н., Ольшанский В.П., Ольшанский С.В. О колебаниях скорости неоднородного слоя зерновой смеси на плоском виброрешете // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. – Мелітополь: ТДАТУ, 2010. Вип. 10. Т.7. – С. 32-42. 8. Абрамовиц А., Стиган И. Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами). М.: Наука, 1979. – 832с.

Ольшанський В.П., Ольшанський С.В.

**ПРО КОЛИВАННЯ ШВИДКОСТІ РУХУ НЕОДНОРІДНОГО  
ВІБРОРОЗРІДЖЕНОГО ШАРУ ЗЕРНА НА ПЛОСКОМУ РЕШЕТИ**

Розглянуто усталені коливання швидкості потоку вібророзрідженого зернового шару зі змінною по товщині шару вібров'язкістю суміші. Для випадку, коли зміна вібров'язкості апроксимується показниковою функцією, розв'язок динамічної граничної задачі виражено в функціях Кельвіна. Проведено аналіз результатів розрахунків.

Olshanskii V.P., Olshanskii S.V.

**ABOUT VIBRATIONS OF VELOCITY OF MOTION NON-UNIFORM  
VIBROLIQUEFACTION OF A LAYER GRAIN ON A FLAT SIEVE**

The vibrations of velocity of a flow vibroliquefaction of a grain layer with variable on thickness of a layer vibroviscosity of a mix are considered. For a case, when change vibroviscosity approximate by indicative function, the solution of a dynamic regional problem is expressed in Kelvin functions. The analysis of results of account is carried out.

---