УДК 519.3

Радиевский А. Е.

РАЗВИТИЕ "НЕКЛАССИЧЕСКИХ" МЕТОДОВ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Введение. Из всего многообразия проблематики проектирования современных систем управления техническими системами в различных отраслях хозяйства, проблема оптимальности является определяющей [1]. Особенности реализации проблемы оптимальности отмеченных систем управления указывают на необходимость использования "неклассических" методов вариационного исчисления [2], одним из которых является формализм Дубовицкого-Милютина [3,4].

Анализ предметной области. Формализм Дубовицкого-Милютина явился источником многочисленных исследований как теоретической, так и прикладной направленности. В настоящее время развитие формализма Дубовицкого-Милютина ведется в научных школах Российской Федерации, Украины, Республики Беларусь, Республики Молдова, Германии, Республики Польша, Румынии, Чешской Республики, Венгерской Республики, Соединенных Штатов Америки, Китайской Народной Республики, Финской Республики, Государства Израиль, Республики Венесуэла, Японии, Мексиканских Соединенных Штатов, Республики Куба, Южной Африки. В настоящей работе исследуются особенности развития формализма Дубовицкого-Милютина в работах польской математической школы. Развитие происходило как в теоретической, так и прикладной направленности. Относительно работ теоретической направленности можно выделить два направления: новые виды конических аппроксимаций и использование конических аппроксимаций формализма Дубовицкого-Милютина для исследования определенных классов экстремальных задач. Новые виды конических аппроксимаций, а также обобщение на их основе основной теоремы формализма Дубовицкого-Милютина используются в задачах: с n ограничениями типа равенство и многокритериальной оптимизации. Конические аппроксимации, свойственные формализму Дубовицкого-Милютина, используются в задачах: математического программирования, экстремальной для класса сложных функций, с запаздыванием, оптимального управления, с распределенными параметрами, численных алгоритмов. В методологическом аспекте исследования в ра-ботах польской математической школы базируются на методологии формализма Дубо-вицкого-Милютина, а их основные результаты аналогичны основным положениям об-щей схемы формализма Дубовицкого-Милютина.

Цель исследования. Целью настоящего исследования является анализ вклада польской математической школы в развитие "неклассических" методов вариационного исчисления в рамках общей схемы формализма Дубовицкого-Милютина.

Особенности развития формализма Дубовицкого-Милютина в трудах польской математической школы. *Новые виды конических аппроксимаций и обобщение основной теоремы формализма Дубовицкого-Милютина.* Конические аппроксимации, отличные от использующихся в формализме Дубовицкого-Милютина [3,4], вводятся в [5] (внутренний и внешний конус), [6] (конус прямого и обратного смысла) и [7] (регулярное направление). На основе введенных в [5-7] конических аппроксимаций основная теорема формализма Дубовицкого-Милютина [3,4] обобщается в двух аспектах [8,9]: использование более слабых конических аппроксимаций (для ограничений в форме внешних и внутренних конусов, а для их сопряженных - прямого и обратного смысла) и наличие в исследуемой задаче n ограничений типа равенство. В [9] в банаховом пространстве X задан функционал $F: X \to R$; $Z_i \in X, i \in [1,k]$ -ограничения типа неравенство, $Z_i \in X, i \in [k+1,n]$ -равенство. Точка $x^0 \in Q = \bigcap_{i=1}^{k} \operatorname{int} Z_i \cap \bigcap_{i=k+1}^{n} Z_i$ такая, что $F(x^0) = \min_{x \in Q \cap U(x)} F(x)$, где $U(x)$ окрестность точки x. Показано, что необходимым условием экстремума в точке x^0 является выполнение условия

$$\bigcap_{i=0}^{k} \operatorname{int} Z_i \cap \bigcap_{i=k+1}^{n} Z_j \cap U(x^0) \setminus x^0 = \varnothing .$$

Задача с n *ограничениями типа равенство.* В [10-22] исследуются различные аспекты задачи на экстремум, необходимые условия для которых получены в форме локального принципа максимума. В [10] предполагается, что функции, задающие ограничения типа неравенство и равенство непрерывны по (x,u), а частные производные по Фреше функций, задающих ограничения типа равенство, кроме того, измеримы по t. В [11,12] в банаховых пространствах $X, Y_i, i \in [1,n]$ исследуется оператор $F(x) = (F_1(x),.., F_n(x))$, где $F_i : X \to Y_i$, $Z = \bigcap_{i=1}^{n} Z_i$ =$(x \in X : F(x) = 0)$, $Z_i = (x \in X : F_i(x) = 0)$ - непрерывные, дифференцируемые по Фреше [11] или Гато [12]. Использование понятия регулярности оператора $F(x)$ в точке $x^0 \in Z$ (ослабление положений, изложенных в [8], относительно тангенциального конуса и его сопряженного, а также изложенных в [13], относительно дифференцируемости операторов по Гато), позволило обосновать применимость положений формализма Дубовицкого-Милютина для случая n ограничений типа равенство, заданных в операторной форме. При более слабых требованиях, чем в [8], в [14,15] исследуется проблематика необходимых условий экстремума для задачи с ограничениями типа равенство на фазовые координаты и управление. Классическая задача оптимального управления при более слабых (по сравнению с требованиями формализма Дубовицкого-Милютина) требованиях к дифференцируемости операторов по Гато, исследуется в [16,17]. Отмечается, что полученные результаты могут быть использованы при наличии смешанных ограничений в исследуемой задаче. В [18] в банаховом пространстве исследуется оператор $P(x)$, для нахождения конуса тангенциальных направлений $Q = (x : P(x) = 0)$ используется метод сжимающихся направлений [13]. Если ограничение типа равенство является нерегулярным, уравнение Эйлера-Лагранжа является вырожденным. Показано [19], что оно может быть получено в невырожденной форме, если исследуемый оператор, является дважды дифференцируем по Фреше. В [20] теорема Люстерника обобщена на случай, когда оператор, задающий ограничение типа равенство, дважды дифференцируем по Фреше. Используя это обобщение, в [21] доказывается локальный принцип максимума, имеющий невырожденную форму.

Задача многокритериальной оптимизации. В банаховом пространстве X задан векторный критерий качества $J(x) = (J_1(x),.., J_n(x))$, $J_i(x)$, $i \in [1,n]$-заданные функционалы, $Z_i \subset X$-ограничения типа неравенство, $\operatorname{int} Z_i \neq 0$, $i \in [1,k]$, $Z_i \subset X$-ограничения типа равенство, $\operatorname{int} Z_i = 0$, $i \in [k+1,n]$[11,19,22,23]. Необходимо определить

$J(x^0) = \min\limits_{x \in Z \cap U(x)} J(x)$, где $Z = \bigcap\limits_{k=1}^{n} Z_k$ и $U(x)$ некоторая окрестность точки x^0. На основе положений формализма Дубовицкого-Милютина и приведенных в [5] конических аппроксимаций, в [22,23] приводится теорема, обобщающая основную теорему формализма Дубовицкого-Милютина на задачи многокритериальной оптимизации. Задача, в которой ограничения типа равенство задаются в операторной форме, исследуется в [11,23]. В [19] исследуется анормальная задача многокритериальной оптимальности. Проанализированы особенности использования уравнения Эйлера-Лагранжа (необходимость выполнения требования дважды дифференцируемости по Фреше для операторов, определяющих ограничения типа равенство). В [11,19,22,23] основной результат получен в форме локального оптимума по Парето.

Задача математического программирования. В локально выпуклом пространстве X, $x \in A \subset X$, A –компакт, в [24] для невыпуклой задачи математического программирования, необходимо определить $\min J_0(x)$ при условии, что $J_i(x) \le 0, i \in [1,n]$. На основе положений формализма Дубовицкого-Милютина [3,4] определены: конус направлений убывания функционала $J_0(x)$ в точке x^0 и его сопряженный; конуса возможных направлений для множеств $Q_i = (x \in X : J_i(x) \le 0, i \in [1,n])$ и их сопряженные; конус тангенциальных направлений к ограничению $x \in A$ и его сопряженный. Основной результат сформулирован в форме теоремы Куна-Таккера.

Экстремальные задачи для класса сложных функций. В [25] исследуется задача для класса функций одной переменной, чьи элементы допускают интегральное представление. На основе положений формализма Дубовицкого-Милютина [3,4] определены: конус возможных направлений оптимизируемого критерия качества и сопряженный к нему; конус возможных направлений для ограничений типа неравенство и сопряженные к ним; конус тангенциальных направлений для ограничения типа равенство и сопряженный к нему; линейные функционалы $f_i^*, i \in [0,n]$, заданные на соответствующих сопряженных конусах не все нулевые одновременно и такие, что $\sum\limits_{i=0}^{n} f_i^* = 0$.

Задача управления с запаздыванием. Задача оптимального управления по интегральному критерию качества системой дифференциальных уравнений n-го порядка с запаздыванием по состоянию и управлению исследуется в [26]. На основе положений формализма Дубовицкого-Милютина [3,4] сформулированы необходимые условия оптимальности в форме локального принципа максимума.

Задача оптимального управления. В пространство абсолютно непрерывных функций $x(t)$ в [27,28] задан функционал

$$J(x,u) = \int_0^1 \Phi(x,u,t)dt$$

и ограничения $\frac{dx}{dt} = f(x,u,t)$, $u \in U$, где $x(0) = x_0$, U - множество измеримых функций в [27], $G^0(x(0)) = 0$, $G^1(x(1)) = 0$ -регулярные отображения, U – замкнутое выпуклое множество, $\operatorname{int} U \ne \varnothing$ [28]. На основе положений формализма Дубовицкого-Милютина [3,4] основной результат в [28,29] получен в форме интегрального принципа максимума. При этом, в [27] не предполагается выполнение условия $\operatorname{int} U \ne \varnothing$, а в [28]

- для рассматриваемого класса управлений не удовлетворяется поточечный принцип максимума.

Задачи с распределенными параметрами. В [29-37] в пространствах Соболева исследуются задачи Дирихле (гиперболического [29] и параболического [32-37] типов), Неймана (гиперболического типа [30]) и Больца [31]. Постановки задач идентичны рассмотренным в [38], а условия оптимальности базируются на положениях формализма Дубовицкого-Милютина [3,4].

Разработка численных алгоритмов. В [29,33,34] исследуются численные методы решения задач оптимального управления для систем с распределенными параметрами (задача Дирихле для линейного дифференциального управления гиперболического [29] и параболического [33,34] типов при квадратичном критерии качества). Обосновывается необходимость применения трансформация исходной задачи к задаче определения экстремума на замкнутом, выпуклом подмножестве гильбертова пространства. В [29,33] решение сформулированных задач сводится к задаче квадратичного программирова-ния, а в [34]-решение на основе метода проекции градиента в гильбертовом пространст-ве. Получены условия строгой сходимости для используемых методов.

Заключение. Исследованы работы польской математической школы по развитию методов вариационного исчисления. Объектом исследования явился класс "неклассических" задач вариационного исчисления в рамках основной схемы формализма Дубовицкого-Милютина. Проведенное исследование позволило получить следующие новые результаты, имеющие научное и прикладное значение. Научная значимость результатов исследования состоит в акцентировании факта развития формализма Дубовицкого-Милютина в плане исследования новых классов экстремальных задач. Практическая значимость результатов исследования определяется тем, что результаты работ польской математической школы позволяют их использовать в структуре математического обеспечения при проектировании современных систем управления техническими системами.

Литература: 1. Сиразетдинов Т.К. Методы решения многокритериальных задач синтеза технических систем. - М: Машиностроение, 1988. -160с. 2. Радиевский А.Е. Формализм Дубовицкого-Милютина в общей структуре вариационного исчисления. // Радиоэлектроника и информатика. - 2009. - №3. - С.32-37. 3. Дубовицкий А.Я., Милютин А.А. Задачи на экстремум при наличии ограничений // Ж. вычисл. мат. и мат. физ. - 1965. - 5, N3. - С. 395-453. 4. Гирсанов И.В. Лекции по математической теории экстремальных задач. - М.: Изд-во МГУ, 1970. - 117с. 5. Lasiecka J. Conical approximations of sets in optimization theory // Control and Cybernatic. - 1975 (1976). - vol 4, N3-4. - P. 39-58. 6. Walczak S. Some properties of cone in normed spaces and their application to investigating extremal problems // J. Optimiz. Theory and Appl. - 1984. - 42, N4. - P. 561-582. 7. Altman M. A general maximum principle for optimization problems // Studia math. - 1968. - 31, N4. - P.319-329. 8. Lasiecka J. Generalization of the Dubovitsky-Miluytin optimality conditions // J. Optimiz.Theory and Appl. - 1978. - 24, N3. - P. 421-436. 9. Kotarski W. Further generalization of the Dubovicki-Miluytin theorem // J. Optimiz. Theory and Appl. - 1987. - 54, N3. - P. 565-573. 10. Ledzewicz-Kowalewska U. A necessary conditions for a problem of optimal control with equality and inequality constraints // Control and Cybernatics. - 1985. - 14, N4. - P.351-360. 11. Ledzewicz-Kowalewska U. On some specification of the Dubovitskii-Milyutin method // Nonlinear ana-ysis. - 1986. - 10, N2.- P. 1367-1371. 12. Ledzewicz-Kowalewska U. Application of the method of contractor directions to the Dubovitskii-Milyutin formalism // J. Math. Anal. and Appl. - 1987. - 5, N1.- P. 174-184. 13. Altman M. An application of the method of contractor directions to nonlinear programming // Numer. Funct. Anal. Optim. – 1979. - 1, №6. - P. 647-663. 14. Led-zewicz-Kowalewska U. The extremum principle control with mixed constrained // Acta Universitatic Lodziensis Folia mathematica. - 1987. - N2. - P. 37-60. 15. Ledzewicz-Kowalewska U. Application of some specification of the the method of the Dubovitskii-Milyutin method to problems of optimal control // Nonlinear Anal., Theory, Met. and Appl. – 1988 .- 12, N2.- P. 101-108. 16. Ledzewicz-Kowalewska U. On the optimal control problems with Gateanx different-tiable operator constraints // J. Math. Anal. and Appl. - 1988. -130, N2. - P. 301-315. 17. Ledze-wicz-Kowalewska U. A necessary condition for the extremal problems under Gateanx differ-rentiability // J. Math. Anal. and Appl. - 1988. - 134, N1. - P.158-169. 18. Ledzewicz-Kowalewska U. On extremum problems in the presence of unbounded operator constraint // J. Math. Anal. and Appl. - 1990. - 151, N2. - P. 344-358. 19. Ledzewicz-Kowalewska U. Euler-Lagrange equa-tion in the case of nonregular equality constraintrs // J. Optimiz. Theory and Aappl. - 1991. - vol. 71, № 3. - P. 549-568. 20. Ledzewicz U., Schacttler H. Second-order condi-tions for extremum problems with nonregular equality constraints // J. Optimiz. Theory and Appl. - 1995. - 86, N1. - P. 113-144. 21. Ledzewicz U. Extension of the local maximum principle to abnormal opti-mal control problems // J. Optimiz. Theory and Appl. – 1993. - vol. 77, N3. - P. 661-681. 22. Kotarski W. Characterization of Pareto optimal points in problems with multi-equality constraints // Optimization. - 1989. - 20, N1.-P. 93-106. 23. Kotarski W. On some specifi-cation of the Dubovicki-Milutin theorem for Pareto optimal problems // Nonlinear Anal., The-ory, Meth. and Appl. - 1990. - 14, N3. - P.287-291. 24. Baranowicz J, Walczak S. On some mat-hematical programming problem in a locally convex space // Bull.Soc. Sci. et letter lodz. - 1986. - N25. - P. 1-11. 25. Mikolajczyk L, Walczak S. On application of the Dubovitsrii-Milyu-tin method to investigating certain extremal problems // Demonstr. Math. - 1980. - 13, N2. - P. 509-530. 26. Lasiecka J. Warunki konieczne optymaluosci sterowania do stanuzupelnego dla ukladow opisanych rowanniami rozniczkavymi zwyczajnymi z opoznieniami stanu i ste-rowania // Arch. Automat. i telemech.-1973.-18,N4.-P. 373 - 393. 27. Walczak S. On some control problem // Acta Universitatic Lodziensis. Folia mathematica. - 1984. - №1. - P. 187–196. 28. Sztajnic J. Transversalityt conditions for control with bounded variation // Acta Univer-sitatis Lodziensis. Folia mathematica. - 1984. - № 1. - P. 131-149. 29. Kowalewski A., Kotarski W. Application of Milutin-Dubovicki's method to solving an optimal cont-rol problem for hyperbolic systems // Проблемы управ. и информ. (ВНР). - 1980. - 9, N3.- P. 183-193.30. Ko-walewski A. O pewnym problemic optymalizacij dla obicktu hiperbolicznego // AGH. Opuscula mathematica. - 1986. - N2. - P. 95-104.31. Walczak S. Optimality conditions for a Bolza problem governed by hyperbolic system of Darboux-Goursa type // Annales polonici mathe-matici. - 1991. - 53, N1. - P. 7-14. 32. Kotarski W., Kowalewski A. On application of conical ap-proximations to an optimal control problem for parabolic systems // Pr. nauk. USI. Kato-wicach. - 1981. - N420. - P.1220. 33. Kowalewski A., Kotarski W .On the application of conical approximations to an optimal control problem for systems described by partial differential equations of parabolic type with time delay // Проблемы управ. и информ. (ВНР). - 1981. - 10, N5. - P. 341-351. 34. Kotarski W., Kowalevski A. On optimal control problem with initial state not priori given // Problems of Control and Information Theory.- 1983.-12 (5).-P.349-359.35. Kotarski W. Optimal control of a system gonerned by a parabolic eguation with an infinite number of variables and time delay // J. Optimiz. Theory and Appl.- 1989. - 63, N1. - P. 57-67. 36. Kotarski W. Optimal control of a system gonerned by a parabolic eguationith an infinite number of variables // J. Optimiz. Theory and Appl. - 1989.- 60, N1. - P. 33-41 .37. Kotar-ski W. Optimal control of distributed parameter systems with nonstandard cost functionals // Пробл. компл.автоматизации. Тр. 4 Междун. научн.-техн. конф., Киев,17-20 окт.1990. Секция 1.- Киев.-1990.-С.112-116. 38. Лионс Ж.-Л.

Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. – М.: Мир. – 1972. – 414с.

Радієвський А.Е.

РОЗВИТОК "НЕКЛАСИЧНИХ" МЕТОДІВ ВАРІАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ

Проаналізовано внесок польської математичної школи у розвиток "некласичних" методів варіаційного числення у межах загальної схеми формалізму Дубовіцького-Мілютіна.

Radievski A. E

DEVELOPMENT OF THE "UNCLASSICAL" METHOD OF THE CALCULUS OF VAELATHSONS

Analysis the development of polish mathematic school to "unclassical" method of the calculus of variations in limit of the general scheme of the Dubovitski-Milutin formalism under consideretion.