УДК 618.514.01:517.977.5

Радиевский А. Е.

ФОРМАЛИЗМ ДУБОВИЦКОГО-МИЛЮТИНА И ЗАДАЧА МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Введение. Характерной особенностью современного этапа автоматизации технологических процессов в таких областях как энергетика, машиностроение, металлургия, химия, нефтехимия, управление подвижными объектами, современные средства ведения вооруженной борьбы является требование, в частности, учета многокритериального характера функционирования исследуемых объектов управления (ОУ) и условия ограниченности и замкнутости областей их определения [1]. Основой математического обеспечения при реализации процедуры проектирования исследуемых систем управления (СУ) являются методы вариационного исчисления [2], а условие ограниченности и замкнутости областей их определения указывает на необходимость использования "неклассических" методов вариационного исчисления [3]. Одним из разделов вариационного исчисления, разработанного для проектирования и исследования класса "неклассических" задач, является формализм Дубовицкого-Милютина [4].

Анализ предметной области. Формализм Дубовицкого-Милютина явился источником многочисленных исследований как теоретической, так и практической направленности. На основе положений работ Дубовицкого А.Я. и Милютина А.А. [5-7] в работах [8-20] исследуются особенности развития формализма Дубовицкого-Милютина применительно к классу задач многокритериальной оптимизации (МО), которые могут быть классифицированы на две группы [21]. Первую группу составляют работы [8-15], в которых приводятся абстрактные исследования отдельных аспектов задач МО, а вторую группу составляют работы [16-20], в которых исследуются определенные типы задач МО. В работах первой группы исследуются необходимые и достаточные условия оптимальности. Так, в [8-11] исследуются задачи в линейных пространствах, на которых: задано рефлексивное и транзитивное бинарное отношение [8]; введенные в [12] аппроксимации (конус прямого и обратного смысла) исследуются в [9, 11]; условия слабого оптимума по Парето исследуется в [10]. В [13-15] на исходном пространстве задано частичное упорядочение (в [13,15] посредством выпуклого, замкнутого конуса с непустой внутренностью, в [14] – на основе положений векторной топологии). В работах [16,17] второй группы исследуется многокритериальная задача математического программирования, а в [18-20] - динамические задачи многокритериальной оптимизации. Необходимо отметить, что в методологическом аспекте теоретические исследования в работах [8-20] соответствуют методологии формализма Дубовицкого-Милютина, а их основные результаты - теоремы аналогичны основной теореме формализма Дубовицкого-Милютина.

Цель исследования. Целью настоящего исследования является установление того, что задача многокритериальной оптимизации должна исследоваться, с одной стороны, как экстремальная, а с другой - как многокритериальная.

Постановка и особенности динамической задачи многокритериальной оптимизации. Оптимизируется векторный критерий качества

$$J(u) = J(f_0(x, u, q, t)),$$

задаваемый как некоторая функция множества $(J_i(u))_{i=1}^m$ локальных критериев качества вида $J_i(u) = M(\lambda_i \int_{t_0}^{t_1} W_i(x,u,q_i,t)dt), i \in [1,m]$ при наличии ограничений

$$\frac{dx}{dt} = F(x,u,p,w,t), \tag{2}$$

$$(x,u,p,w,t) \in E, \tag{3}$$

$$(x,t_0) \in P_0, (x,t_1) \in P_1, \tag{4}$$

где E-область определения задачи; $x \in E^n$ состояние; $u \in E^r$-управление; $w \in E^w$-возмущение; E^n, E^r, E^w некоторые пространства; $q \in E_0^q = (q : |q| \le q_{max})$, $q_i \in E_{i0}^q = (q_i : |q_i| \le q_{i\max})$-параметр функционала $J(u)$ и i-го локального критерия качества соответственно; $\lambda_i \in \Lambda_0 = (\lambda_i : \lambda_i \ge 0, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1)$ - весовые коэффициенты; $p \in E^p = (p : |p| \le p_{max})$-параметр ОУ (2); $q_{max} = const > 0$, $q_{i\max} = const > 0$, $p_{max} = const > 0$-заданные числа; $P_i, i \in [0,1]$-многообразия; M–математическое ожидание; $(x^0(t), u^0(t), [t_0,t_1])$-решение исследуемой задачи.

Пусть $E^n = C^n(t_0,t_1)$-пространство n-мерных непрерывных на $[t_0,t_1]$ функций $x(t)$ с нормой $\|x\| = \max|x(t)|, \forall t \in [t_0,t_1] \subset R^1, x \in Q = (x : |x| \le x_{max}), \operatorname{int} Q \ne \varnothing$, $\varnothing$-пустое множество; $E^r = L_\infty^r(t_0,t_1)$-пространство r–мерных существенно ограниченных на $[t_0,t_1]$ измеримых функций $u(t)$ с нормой $\|u\| = \operatorname{vrai\,sup}|u(t)|, \forall t \in [t_0,t_1] \subset R^1, u \in U = (u : |u| \le u_{max})$, $\operatorname{int} U \ne \varnothing$;
$E^w = (\Omega, D, \mu)$-вероятностное пространство измеримых функций $w(t)$, заданных на множестве Ω, $D-\sigma$-алгебра, связанная с множеством Ω, μ-вероятностная мера; $x(t_0) \in X_0 = (x(t_0) : |x(t_0)| \le x_{max}(t_0))$, $x(t_1) = 0$; u_{max}, x_{max}, $x_{max}(t_0)$-заданные числа; $t \in [t_0,t_1] \subset R^1$-время, $[t_0,t_1]$-интервал управления, R^1-числовая прямая.

Исследование задачи (1)-(5) связано, с одной стороны, с исследованием проблем, специфичных для экстремальных задач (существование и единственность решения, необходимые и достаточные условия оптимальности, метод нахождения решения) [22], а с другой-для задач многокритериальной оптимизации (определение множества Парето, задание принципа оптимальности, нормализация и задание приоритета (степени важности) для множества локальных критериев качества) [23].

Существование и единственность решения. Множество U в силу его выпуклости и замкнутости [6] является компактным [24]. Множество пар вариаций $(\bar{x}, \bar{u})$, удовлетворяющих выражению $W_i(x,u,q_i,t)$, принадлежит конусу убывания

K_{i0}, образует открытый выпуклый конус с вершиной в нуле, $K_{io} \neq \varnothing$, для которого можно построить сопряженный конус K_{io}^{*} а, следовательно, и линейный функционал $f_{io}(\overline{x}, \overline{u}) \in K_{io}^{*}, f_{io}(\overline{x}, \overline{u}) \geq 0$ [6]. $K_0 = \bigcap_{i=1}^{m} K_{io} \neq \varnothing$, также является открытым выпуклым конусом с вершиной в нуле [25], для которого можно построить сопряженный конус K_0^{*}, а, следовательно, и линейный функционал $f_0(\overline{x}, \overline{u}) \in K_0^{*}, f_0(\overline{x}, \overline{u}) \geq 0$ [6]. Так как $(\bigcap_{i=1}^{m} K_{i0})^{\bullet} = \sum_{i=1}^{m} K_{i0}^{\bullet}$ [7], то $J(u) = M(f_0(\overline{x}, \overline{u})) = M(\sum_{i=1}^{m} f_{i0}(\overline{x}, \overline{u}))$. Заданный на открытом выпуклом множестве функционал $J(u)$ является непрерывным [7]. Поэтому в задаче (1)-(5) существует тройка $(x^0(t), u^0(t), [t_0, t_1])$ [22]. Если функционал $J(u)$ удовлетворяет свойству строгой выпуклости, то тройка $(x^0(t), u^0(t), [t_0, t_1])$ является единственной [26].

Множество Парето. $E = E^n \times E^r \times E^w \times E_0^q \times E^p \times X_0 \times R^1$. Тогда $E = E^c \cup E^s$, $E^c \cap E^s = \varnothing$, где $E^c = (u : J_i(u) \leq J_i(u^0) \text{ и } \Leftrightarrow J_i(u) < J_i(u^0))$, - множество Парето, $E^s = (u : J_i(u) = J_i(u^0))$-множество согласия [23]. Пусть $E_i^o = ((u : J_i(u) \leq J_i(u^0)) \setminus E^s) \cup E^s(u^0)$. Тогда имеет место следующая зависимость [27], удовлетворяющая свойству симметричности $(\bigcap_{i=1}^{m} E_i^0) \bigcap (\bigcap_{i=1}^{m} K_{i0}) = (u^0)$, левая часть которой определяет множество Парето.

Необходимые и достаточные условия оптимальности. Множества U и Q в силу их выпуклости и замкнутости [6] являются компактными [24]. Тогда функционал $f_0(\overline{x}, \overline{u}) \in K_0^{\bullet}$ получим в виде [6,7]

$$f^0(\overline{x}, \overline{u}) = M(-\int_{t_0}^{t_1}((\sum_{i=1}^{m} \lambda_i W_{ix}^{'}(x^0, u^0, q_i, t), \overline{x}) + (\sum_{i=1}^{m} \lambda_i W_{iu}^{'}(x^0, u^0, q_i, t), \overline{u}))dt)$$

где $W_{ix}^{'}(x^0, u^0, q_i, t)$, $W_{iu}^{'}(x^0, u^0, q_i, t)$ производные по x и u от $W_i(x, u, q_i, t)$. Если K_1 конус возможных направлений в точке u^0 и функционал $f_1(\overline{u}) \in K_1^{\bullet}$, то $f_1(\overline{u}) = (0, f_1^{'}(\overline{u}))$, где $f_1^{'}(\overline{u}) \in L_{\infty}^{r}(t_0, t_1)$ и является опорным к множеству U в точке u^0. Если K_4 конус возможных направлений в точке x^0 и функционал $f_4(\overline{x}) \in K_4^{*}$, то $f_4(\overline{x}) = (0, f_4^{'}(\overline{x})) \in K_4^{*}$, где $f_4^{'}(\overline{x}) \in C^{n*}(t_0, t_1)$ и является опорным к множеству Q в точке x^0. Тогда, принимая во внимание вид опорных функционалов для исследуемого ОУ, уравнение Эйлера запишем в виде [6] $\sum_{i=0}^{4} f_i(\overline{x}, \overline{u}) = 0$ или, учитывая вид опорных функционалов $f_i(\overline{x}, \overline{u}), i \in [0,4]$,

$$f_1^{'}(\overline{u}) = \int_{t_0}^{t_1}[(-(F_u^{'}(x^0, u^0, p, w, t)))^{T} \Psi(t) + M(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i W(x^0, u^0, q_i, t)), \overline{u}]dt + f_4^{/}(\overline{x}),$$

где т – транспонирование, а $\Psi(t)$ является решением системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d\Psi}{dt}+(F_x'(x^0,u^0,p,w,t))^{т}=M(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i W_{ix}'(x^0,u^0,q_i,t)),\ \Psi(t_1)=0.$$

Принимая во внимание вид интегрального линейного функционала, опорного к множеству U в точке u^0 [6, 7] получим, что $\forall t\in[t_0,t_1], \forall u\in U$

$$((-F_u'(x^0,u^0,p,w,t)))^{т}\Psi(t)+M(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i W_{iu}(x^0,u^0,q_i,t),u-u^0(t))\geq 0.$$

Задание принципа оптимальности. Множество пар вариаций $(\overline{x},\overline{u})$, удовлетворяющих выражению $W_i(x,u,q_i,t)$, принадлежит конусу убывания K_{i0}, образует открытый выпуклый конус с вершиной в нуле, $K_{io}\neq\varnothing$, для которого можно построить сопряженный конус K_{io}^* а, следовательно, и линейный функционал $f_{io}(\overline{x},\overline{u})\in K_{io}^*, f_{io}(\overline{x},\overline{u})\geq 0$ [6]. $K_0=\bigcap_{i=1}^{m}K_{io}\neq\varnothing$, также является открытым выпуклым конусом с вершиной в нуле [25], для которого можно построить сопряженный конус K_0^*, а, следовательно, и линейный функционал $f_0(\overline{x},\overline{u})\in K_0^*, f_0(\overline{x},\overline{u})\geq 0$ [6]. Так как $(\bigcap_{i=1}^{m}K_{i0})^{\bullet}=\sum_{i=1}^{m}K_{i0}^{\bullet}$ [7], то $J(u)=M(f_0(\overline{x},\overline{u}))=M(\sum_{i=1}^{m}f_{i0}(\overline{x},\overline{u}))$.

Заключение. Исследование динамической задачи многокритериальной оптимизации на основе положений формализма Дубовицкого-Милютина позволило показать, что динамическая задача многокритериальной оптимизации должна исследоваться на основе положений, с одной стороны, теории экстремальных задач, а , с другой – теории многокритериальной оптимизации. Вопросы, связанные с методами решения, нормализации и задания приоритета (степени важности) для множества локальных критериев качества, определяются техническими и технологическими особенностями функционирования исследуемой СУ.

Литература: 1. Сиразитдинов Т.К. Методы решения задач синтеза технических систем. – М.: Машиностроение, 1988. - 160с. 2. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление.– М.: Наука,1979. - 432с. 3. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. - М., ФМГ, 1961. - 391с. 4. Радиевский А.Е. Формализм Дубовицкого-Милютина в общей структуре вариационного исчисления.I // Радиоэлектроника и информатика. - 2009. - №3. - С.32-37. 5 Дубовицкий А.Я., Милютин А.А. Задачи на экстремум при наличии ограничений // Доклады АН СССР. - 1963. - 149, N4. - С.759 - 762. 6. Дубовицкий А.Я., Милютин А.А. Задачи на экстремум при наличии ограничений // Журнал вычислительной математики и математической физики. - 1965.- 5, N3.- С.395 - 453. 7. Гирсанов И.В. Лекции по математической теории экстремальных задач. - М.: Издательство МГУ,1970. - 117с. 8. Vlach Milan. On necessary conditions of optimality in linear spase // Comment. Math. Univ.carol. - 1970.- 11, N3 .- P.501 – 513.

9. Kotarski W. Characterization of Pareto optimal points in problems with multi-equality constraints // Optimization . - 1989. - 20, N1. - P.93 - 106. 10. Minami M. Weak Pareto optimality of multiobjective problems in a locally convex linear topolo-gical spase // Journal Optimization Theory and Applications. - 1981. - 34, N4. - P.469 - 484. 11. Kotarski W. On some specification of the Dubovicki-Milutin theorem for Pareto optimal problems // Nonlinear Anal., Theory, Meth. and Appl.- 1990. - 14, N3. - P.287- 291. 12. Walczak S. Some properties of cone in normed spaces and thier application to inves-tigating extremal problems // Journal Optimization Theory and Applications - 1984. - 42, N4. - P.561 – 582. 13. Lantos B. Necessary conditions for the optimality in abstract optimal control problems with non-scalar-valed performance criterion // Проблемы управления и теория информации (Венгрия). - 1976. - 5, N3 - P.271 - 284. 14. Gahler Siegfried. Eine Verallgemeinerung des Satzes von Dubovickij-Miljutin // Math.Nachr. - 1977. - 77. - P.117 – 138. 15. Zubiri J. A necessary condition for optimality in vector optimization problem // Dep. Math.Univ. Econ.Budapest (Publ.). - 1989. - N5. - P.49 - 56.16. Censor Y. Pareto optimality in multiobjective problems // Appl. Math. and Optim.- 1978.- 4, N1.- P.41 - 59.17. Vlach Milan. Dubovitskii - Milyutin optimization formalism for multi - criteria problems // Oper. Res. - Verfahren.- 1978.- 31.- P.677 - 687.18. Заботин В.И. О задаче оптимизации по векторному критерию // Труды КАИ.-1971.- Вып.135.- С.69 -75.19. Lantos B. The local supremum principle for optimum control problems with non-scalar- valed performance criterion // Period. polytechn. Elec. Eng. - 1976. - 20, N3. - P.313 - 323.20. Lantos B. Necessary conditions for the optimality in optimal control problems with non - scalar- valed performance criterion // “Link.Sci.and Appl.Automat. Contr. Proc. 7th Jrienn. World Congr. Jnt. Fed. Automat. Contr., Helsinki, 1978. vol 2” Oxford. e.a., 1979, P.1033 - 1040. 21. Радиевский А.Е. Задачи многокритериальной оптимизации и методы их решения // Автоматика.-1981.- №5.-С.84-92. 22. Иоффе А.Д., Тихомиров В.Н. Теория экстремальных задач.- М.: Наука, 1974. - 480с. 23. Емельянов С.В., Борисов В. И., Малевич А.А., Черкашин А.М. Модели и методы векторной оптимизации // Итоги науки и техники. Техническая кибернетика. - 1973. - т.5. - С.386-448. 24. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функциональный анализ.- М.: Наука, 1968. - 496с. 25. Рокафеллер Р.Т. Выпуклый анализ. - М.: Мир, 1973. - 469с. 26. Флеминг У., Ришел Р. Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. - М.: Мир, 1978. - 316с. 27. Болтянский В.Г. Экстремальные задачи и метод шатров // Труды ВНИИ системных исследований. - 1989.- №14.С.-136-147.

А.Е. Радієвський

ФОРМАЛІЗМ ДУБОВІЦЬКОГО-МИЛЮТІНА ТА ЗАДАЧА БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

На основі положень формалізму Дубовіцького - Мілютіна досліджується динамічна задача багатокритеріальної оптимізації. Доведено, що його застосування дозволяє досліджувати динамічну задачу багатокритеріальної оптимізації як екстремальну, так і як багатокритеріальну.

A. E.Radievski

THE DUBOVITSKI-MILUTIN FORMALISM AND THE TASK OF MULTICRITERION OPTIMIZATION

The dynamic task of the multicriterion optimuzation under consideration by use Dubovitski-Milutin formalism. The proof that his application allow investigation the task as extremal and as multecriterion.