

Дронь М.М., Хорольський П.Г., Дубовик Л.Г., Безуглий В.А.

**ОЦІНКА ЕФЕКТИВНОСТІ ОЧИЩЕННЯ НИЗЬКИХ НАВКОЛОЗЕМНИХ
ОРБИТ ВІД ДРІБНОГО КОСМІЧНОГО СМІТТЯ ПРИ АВТОНОМНОМУ
СТАРТІ ПРИСТРОЮ ДЛЯ ЙОГО УЛОВЛЮВАННЯ**

Розглянуто ефективність очищення навколоземного простору від дрібного космічного сміття при окремому виведенні космічного тральщика і сферичного уловлювального пристрою для різних способів виведення кожного з них.

Dron N., Horolsky P., Dubovik L., Bezugly V.

**EFFICIENCY OF CLEARING OF THE LOW EARTH
ORBITS FROM SMALL SPACE DEBRIS AT THE INDEPENDENT
START OF THE DEVICE FOR ITS CATCHING**

Efficiency of clearing earth space from small space debris is considered at separate injection of a space trawler and the spherical catching device for different ways injection of each of them.

УДК 534.1:531.44

Ковтун А.В., канд. техн. наук

**ОБ ИЗМЕНЕНИИ РЕЗОНАНСНЫХ ЧАСТОТ КОЛЕБАНИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ
СИСТЕМ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ**

Введение. Одной из проблем, стоящих перед современной наукой, является обеспечение надежности машин [1,4]. Среди многих явлений, приводящих к эксплуатационным повреждениям узлов и деталей машин, наиболее опасными являются трение, износ и динамическая усталость. В первую очередь, это относится к механическим системам, элементы которых связаны между собой силами сухого трения. Такие системы широко распространены в технике, особенно в узлах контактирования элементов с трением [2]. Если контакт тела с контр телом происходит по противоположным поверхностям (назовем такие конструкции вложенными), то это приводит к возникновению новых эффектов, учет которых необходим для обеспечения повышенной надежности машин.

Известно, что реальная механическая система имеет бесконечно большое число степеней свободы. Однако, при решении практических задач обычно пользуются упрощенными схемами, которые характеризуются конечным числом степеней свободы. В таких расчётных схемах некоторые (наиболее лёгкие) части системы считаются вовсе лишёнными массы и представляются в виде деформируемых безинерционных связей, при этом тела, за которыми в расчётной схеме сохраняется свойство инерции, считаются материальными точками [1]. Изучение колебаний механических систем на таких моделях позволяет получить основные закономерности влияния интересующих факторов на динамические характеристики системы.

Особое место в теории колебаний отводится исследованиям вопроса взаимодействия сил трения, действующих в системе, и вынужденных колебаний. При этом этот вопрос дискутируется в основном в двух аспектах: трение как источник автоколебаний и колебания – механизм управляющий трением. В результате, не уделяется внимание вопросу влияния сил трения на величину частоты резонансных колебаний механических систем. Это связано, возможно, с тем, что этот вопрос считается решённым. Однако выделение класса вложенных конструкций (среди нелинейных механических систем) требует некоторых уточнений.

Вложенным конструкциям соответствует механическая модель определенного вида. Особенность модели заключается в том, что одно массовая модель вложенной конструкции имеет две степени свободы [2]. Это приводит к появлению у вложенных конструкций новых свойств.

Цель статьи – определить влияние силы трения на величину частоты колебаний механических систем.

Основной раздел. Для того чтобы выделить эти свойства рассмотрим влияние трения на частоту свободных колебаний одно массовой механической системы, представляющей собой груз массой m , подвешенный на пружине с жёсткостью k , параллельно которой включён демпфирующий элемент с коэффициентом демпфирования C (рис.1).

Дифференциальное уравнение движения груза, как известно, имеет вид [3-6]:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0.$$

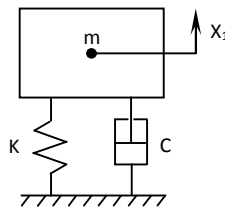


Рис.1. Расчетная схема одно массовой механической системы с одной степенью свободы

Известно решение этого уравнения:

$$x = e^{\frac{ct}{2m}} [C_1 \cos pt + C_2 \sin pt],$$

где C_1, C_2 - произвольные постоянные; p - частота собственных колебаний.

$$p = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}.$$

Из последнего равенства видно, что с увеличением сопротивления частота колебаний груза уменьшается, что подтверждается экспериментами.

Приложим к грузу внешнюю силу $Q(t) = Q_0 \sin \omega t$. Проследим, как влияет на величину частоты резонансных колебаний груза увеличение коэффициента демпфирования. Резонанс в системе будет наступать уже не при отношении частоты вынужденных колебаний ω к частоте собственных колебаний системы без трения p равном 1, а при меньших частотах, то есть максимумы кривых зависимости коэффициента динамичности системы от отношения ω/p , будут смещены влево от значения $\omega/p = 1$ [6]. Таким образом, для рассматриваемой системы, увеличение коэффициента демпфирования C приводит к уменьшению величины частоты резонансных колебаний груза. В работе [7] приведен расчёт механической системы, состоящей из n масс и n демпферов. И в этом случае равное увеличение коэффициентов демпфирования в n демпферах приводит к уменьшению величины частоты

резонансных колебаний грузов. Дальнейшее увеличение демпфирования приводит к прекращению колебательных движений системы.

Из определения данного вложенным конструкциям следует, что вложенным конструкциям соответствуют механические модели определённого вида. Одна из таких моделей с двумя степенями свободы (с одной массой и одним узлом трения) изображена на рис. 2. Особенностью вложенных конструкций является условие $s < n$ (s – количество демпфирующих элементов, n – число степеней свободы).

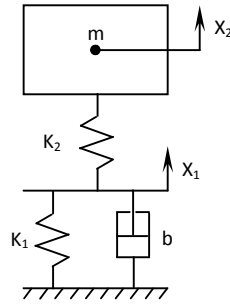


Рис.2. Расчетная схема одно массовой механической системы с двумя степенями свободы

Исследуем, в общем случае, зависимость собственных частот колебаний механической системы от величины силы трения. При этом рассмотрим такие системы, в которых количество демпфирующих элементов, как равно ($s = n$), так и меньше количества степеней свободы ($s < n$), что соответствует вложенным конструкциям.

Рассмотрим колебания механической системы, состоящей из двух масс m_1 и m_2 (принимая $m_1 = m_2 = m$), связанных с основанием и между собой посредством упругих элементов с жёсткостью k и демпфирующих элементов с коэффициентом демпфирования C (рис.3).

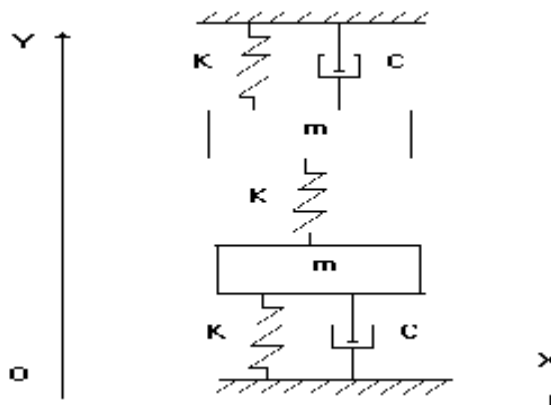


Рис.3. Расчетная схема двух массовой механической системы с демпферами

Приложим к массам внешнюю силу $Q = Q_0 \sin \omega t$. Уравнения колебаний системы имеют вид [6]:

$$\ddot{x}_1 = \frac{k_3}{m_1} x_2 - \frac{(k_1 + k_3)}{m_1} x_1 - \frac{c_1}{m_1} \dot{x}_1 + \frac{Q_0}{m_1} \sin \omega t,$$

$$\ddot{x}_2 = \frac{k_3}{m_2} x_1 - \frac{(k_1 + k_3)}{m_2} x_2 - \frac{C_2}{m_2} \dot{x}_2 + \frac{Q_0}{m_2} \sin \omega t.$$

Анализ результатов расчёта резонансных частот колебаний рассмотренной системы в зависимости от величины коэффициента демпфирования (с параметрами $m_1=m_2=m=1$ кг, $k_1=k_2=k_3=200$ н/м) и расчётов много массовых систем, проведенных с использованием численных методов, позволяют сформулировать утверждения об изменении резонансных частот колебаний механических систем при наличии трения.

Утверждение 1. Введение в механическую систему с n степенями свободы s диссипативных элементов приводит к тому, что резонансные частоты вновь образованной системы по отношению к системе без трения, располагаются следующим образом:

- при $s = n$ $p_k > p_k^s$ ($k = 1, 2, \dots, n$);
- при $s < n$ для n и $(n-s)$ степеней свободы $p_k \leq p_k^s < p_{k+1}$ ($k=1, 2, \dots, n-1$).

Доказательство:

1. Рассмотрим механическую систему, у которой количество демпфирующих элементов равно числу степеней свободы ($n = s$). Уравнение движения системы в усилиях в матричной форме имеют вид [8]:

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + SX = Q,$$

где M - матрица масс; C - демпфирующая матрица; S - матрица жесткостей.

В работах [6,8] показано, что в этом случае i -е уравнение движения в нормальных координатах будет иметь вид:

$$\ddot{x}_i + 2n_i \dot{x}_i + p_i^2 x_i = q_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n,$$

где $2n$ - постоянная демпфирования.

Каждое из этих n уравнений является несвязанным со всеми остальными. Поэтому динамическое перемещение, соответствующее i -й форме колебаний, можно найти так же, как для системы с одной степенью свободы с демпфированием.

Динамические перемещения, соответствующие i -ой форме колебаний системы, при наличии демпфирования, определяются выражением [6]:

$$x_i = e^{-n_i t} (x_{0i} \cos p_{\text{Л}i} t + \frac{\dot{x}_{0i} + n_i x_{0i}}{p_{\text{Л}i}} \sin p_{\text{Л}i} t).$$

Круговая частота при демпфированных колебаниях определится из выражения:

$$p_{\text{Л}i} = \sqrt{p_i^2 - n_i^2} = p_i \sqrt{1 - \gamma_i^2},$$

где p_i – круговая частота недемпфированных колебаний; C_i – соответствующее значение коэффициента демпфирования.

Таким образом, $p_i > p_i^s$.

2. Рассмотрим механическую систему, у которой количество демпфирующих элементов меньше числа степеней свободы ($n > s$). Предположим, что s_1 демпфирующий элемент превращен в жесткую связь ($C \rightarrow \infty$). Уравнение связи можно представить выражением [8]:

$$A_{11}q_1 + A_{12}q_2 + \dots + A_{1n}q_n = 0,$$

где A_{11}, \dots, A_{1n} – постоянные числа, q_i – обобщенные координаты.

Вековое уравнение до наложения на систему связи имеет вид:

$$\begin{vmatrix} a_{11} \cdot p^2 - c_{11} & a_{12} \cdot p^2 - c_{12} & \dots & a_{1n} \cdot p^2 - c_{1n} \\ a_{21} \cdot p^2 - c_{21} & a_{22} \cdot p^2 - c_{22} & \dots & a_{2n} \cdot p^2 - c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} \cdot p^2 - c_{n1} & a_{n2} \cdot p^2 - c_{n2} & \dots & a_{nn} \cdot p^2 - c_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

Вековое уравнение системы после наложения на нее связи получится из первого векового уравнения вычеркиванием в нем первой строки и первого столбца. Согласно теореме о разделении корней векового уравнения, $n-1$ корней p_k^s связанной системы располагаются между корнями векового уравнения не связанной системы.

Продолжая аналогичные рассуждения и, вводя последовательно следующие связи, получим неравенства для системы после наложения на нее всех s связей, то есть $p_k \leq p_k^s < p_{k+1}$ ($k=1, 2, \dots, n-1$).

Таким образом, в зависимости от соотношения n и s при одном и том же значении C для каждой формы колебаний возможны два значения резонансной частоты колебаний механической системы $\omega_{рез}$, которые сходятся к значению p_1 при $C \rightarrow 0$. График зависимости резонансной частоты колебаний системы от величины коэффициента демпфирования для расчетной схемы (рис. 3, с параметрами $m_1=m_2=m=1$ кг, $k_1=k_2=k_3=200$ н/м), представлен на рис.4.

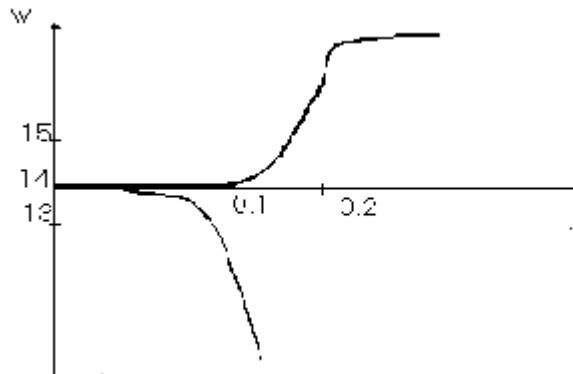


Рис. 4. График зависимости резонансной частоты колебаний системы от величины коэффициента демпфирования

Утверждение 2. Для механической системы с $n = s$, при увеличении силы трения в $(s - k)$ диссипативных элементах ($s > k$), в интервале изменения резонансной

частоты колебаний $\omega_{рез.}(C)$ существует такое значение C , при котором величина $\omega_{рез.}$ будет минимальной.

Доказательство. Пусть упругая механическая система с n степенями свободы имеет s демпфирующих элементов при условии $s = n$. Предположим, что в начальный момент времени коэффициенты демпфирования C_i ($i = 1, 2, \dots, n$) равны нулю. Тогда механическая система представляет собой систему с n степенями свободы без демпфирования. Эта система имеет n собственных частот колебаний, которые располагаются в следующем порядке:

$$p_1 < p_2 < \dots < p_n.$$

Увеличим коэффициент демпфирования C_i ($i = 1, \dots, n$) во всех демпферах. При демпфированных колебаниях собственные частоты системы определяются из выражения: $p_{дi} = p_i \sqrt{1 - C_i^2}$. Таким образом, $p_{дi} < p_i$.

Превратим i -ый демпфер в жесткую связь. В этом случае получим систему с $n - 1$ степенью свободы, собственные частоты которой, согласно теореме о разделении корней векового уравнения, располагаются между корнями системы с n степенями свободы. Продолжая аналогичные рассуждения и вводя последовательно связи (увеличивая силу трения в следующем демпфере), получим неравенства: $p_k \leq p_k^s \leq p_{k+s}$ ($k = 1, 2, \dots, n-s$), которые будут иметь место для частот системы после наложения на нее всех s связей.

Таким образом, выполняется неравенство $p_{дi} < p_i \leq p_i^s$, что и требовалось доказать.

Выводы. Сформулированные в теоремах свойства колебательных систем обнаруживаются при численном исследовании и могут быть обобщены следующими положениями:

- 1) Установившиеся колебания происходят относительно положения устойчивого равновесия с частотой возмущающей силы.
- 2) Если частота возмущающей силы близка к одной из собственных частот системы, то амплитуды колебаний всех масс возрастают и достигают локальных максимумов, величины которых зависят от сил трения.
- 3) Локальные экстремумы резонансной кривой при $n=s$ достигаются на частотах, меньших собственных частот системы.
- 4) Локальные экстремумы резонансной кривой $n>s$ достигаются на частотах не меньших собственных частот системы.
- 5) В системах с малым трением изменение коэффициента трения в любом месте вызывает изменение резонансных амплитуд колебаний: при увеличении трения амплитуды уменьшаются. В системах с большим трением можно подобрать такое значение трения, при котором амплитуда колебаний определенной массы будет минимальной. Изменение трения в системе может привести к случаю, когда частота резонансных колебаний будет минимальной.

Литература: 1. Ден-Гартог Дж.П. Механические колебания / Дж.П. Ден-Гартог [пер. с англ. Петрова Л.И].- М.: Физматгиз, 1969.- 560 с. 2. Вибрации конструкций при сухом трении между элементами / Б.Г. Коренев.- Х.: Прапор, 1970.- 176 с. 3. Цзе Ф.С. Механические колебания / Цзе Ф.С., Морзе И.Е., Хинкл Р.Т. [пер. с англ.

Истомина М.В.] - М.: Машиностроение, 1966.- 508 с. 4. Левитский Н.И. Колебания в механизмах / Н.И. Левитский.- М.: Наука, 1988.- 336 с. 5. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний / Я.Г. Пановко.- М.: Наука, 1991.- 255 с. 6. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории упругих колебаний / Я.Г. Пановко.- М.: Машиностроение, 1967.- 316 с. 7. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний / В.Л. Бидерман.- М.: Высшая школа, 1980.- 408 с. 8. Бабаков И.М. Теория колебаний / И.М. Бабаков.- М.: Наука, 1964.- 560 с.

Bibliography (transliterated): 1. Den-Gartog Dzh.P. Mehanicheskie kolebanija / Dzh.P. Den-Gartog [per. s angl. Petrova L.I].- М.: Fizmatgiz, 1969.- 560 s. 2. Vibracii konstrukcij pri suhom trenii mezhdju jelementami / B.G. Korenev.- Н.: Prapor, 1970.- 176 s. 3. Cze F.S. Mehanicheskie kolebanija / Cze F.S., Morze I.E., Hinkl R.T. [per. s angl. Istomina M.V.].- М.: Mashinostroenie, 1966.- 508 s. 4. Levitskij N.I. Kolebanija v mehanizmah / N.I. Levitskij.- М.: Nauka, 1988.- 336 s. 5. Panovko Ja.G. Vvedenie v teoriju mehanicheskikh kolebanij / Ja.G. Panovko.- М.: Nauka, 1991.- 255 s. 6. Panovko Ja.G. Osnovy prikladnoj teorii uprugih kolebanij / Ja.G. Panovko.- М.: Mashinostroenie, 1967.- 316 s. 7. Biderman V.L. Teorija mehanicheskikh kolebanij / V.L. Biderman.- М.: Vysshaja shkola, 1980.- 408 s. 8. Babakov I.M. Teorija kolebanij / I.M. Babakov.- М.: Nauka, 1964.- 560 s.

Ковтун А.В.

ПРО ЗМІНУ РЕЗОНАНСНИХ ЧАСТОТ КОЛИВАНЬ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ ПРИ НАЯВНОСТІ ТЕРТЯ

Сформульовано й доведено твердження про зміну резонансних частот коливань механічних систем при наявності тертя. Наведено результати розрахунків.

Kovtun A.V.

TO CHANGE THE RESONANT FREQUENCY OSCILLATION OF MECHANICAL SYSTEMS WITH FRICTION

Formulated and proved the approval to change the frequency of resonance vibrations of mechanical systems with friction. This article describes the results of the calculations.

УДК 631.362:532

Ольшанский В.П., д-р. техн. наук; Ольшанский С.В.

УПРОЩЕННЫЙ РАСЧЕТ КОЛЕБАНИЙ ЗЕРНОВОЙ СМЕСИ, СЕПАРИРУЕМОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ ВИБРОРЕШЕТОМ

Постановка проблемы. Для интенсификации виброрешетного разделения зерновых смесей на фракции нужно знать закономерности движения сыпучих материалов по вибрирующим поверхностям. Часто, с целью упрощения расчетов, определяют усредненную за период колебаний скорость потока зерновой смеси. Но такой приближенный подход к моделированию процесса движения не дает информации об изменении скорости во времени, а также о распределении вибрационных полей внутри зерновой смеси. Поскольку вибрации сопутствуют разделению зернового материала, желательно знать как распространяются они от виброрешета по объему движущегося зернового слоя. С этой целью приходится решать