"HAI", 2009. – № 10 (67). – S. 82-84. 7. Isakowitz S.J. International Ref-erence Guide to Space Launch Systems. Second Edition / S.J. Isakowitz.– Washington: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1991. – 341 p.

Дронь М.М., Хорольський П.Г., Дубовик Л.Г.

АНАЛІЗ ЕФЕКТИВНОСТІ ОДНОГО З МАНЕВРІВ КОСМІЧНОГО ТРАЛЬЩИКА ПРИ ВИКОНАННІ ОПЕРАЦІЇ ОЧИЩЕННЯ НАВКОЛОЗЕМНОГО ПРОСТОРУ

Розглянуто ефективність роботи космічного тральщика (КТ), який використовує декілька уловлюваних пристроїв, почергово знімаючи їх з вихідної орбіти, на яку вони виводяться окремо від КТ ракетою-носієм такого самого типу.

Dron N., Horolsky P, Dubovik L.

EFFICIENCY OF ONE SPACE TRAWLER MANEUVER AT CARRING OUT CLEANING OPERATION OF EARTH SPACE

The efficiency of work space trawler (ST) which uses some catching devices, serially removing them from an initial orbit, on which they are injecting separately from ST by launch vehicle of the same type, is considered.

УДК 519.3

Радиевский А. Е., канд. тех. наук

РАЗВИТИЕ ОБЩЕЙ СХЕМЫ ФОРМАЛИЗМА ДУБОВИЦКОГО-МИЛЮТИНА В ТЕОРЕТИЧЕСКОМ АСПЕКТЕ. I

Введение. Из всего многообразия проблематики проектирования современных систем управления (СУ) техническими системами, проблема оптимальности является определяющей [1]. Особенности реализации проблемы оптимальности в отмеченных СУ указывают на необходимость использования "неклассических" методов вариационного исчисления [2], одним из которых является формализм Дубовицкого-Милютина [3,4], и который явился источником многочисленных исследований как теоретической, так и прикладной направленности. В настоящей статье исследуются работы отечественных и зарубежных ученых по теоретической направленности развития формализма Дубовицкого-Милютина. В методологическом аспекте исследуемые работы базируются на методологии формализма Дубовицкого-Милютина, а их основные результаты аналогичны основным положениям общей схемы формализма Дубовицкого-Милютина

Цель исследования. Целью настоящего исследования является анализ вклада отечественных и зарубежных ученых в развитие "неклассических" методов вариационного исчисления в рамках общей схемы формализма Дубовицкого-Милютина.

Особенности развития формализма Дубовицкого-Милютина в трудах отечественных и зарубежных ученых. *Концептуальные особенности задач вариационного исчисления*. Показано [5], что достаточные условия сильного экстремума в классическом вариационном исчислении носят нелокальный характер. Новые (по сравнению с [3]) конические аппроксимации и обобщения основной теоремы формализма Дубовицкого-Милютина исследуются в [6,7].

Задачи управления с n ограничениями типа равенство. Класс задач исследован в [7].

Локальный минимум в задаче математического программирования. В нормированном линейном пространстве X, $L \subset X$ в [8] рассматривается функция $f: X \to R^{\mu+m+1}$, где μ и m – неотрицательные целые числа. Необходимо найти $\overline{x} \in A$ такой, что $f_0(\overline{x}) = \min_{x \in A} f_0(x)$, где $A = (x: f_i(x) \le 0, i \in [-\mu, m], x \in L)$. Основной результат сформулирован в форме абстрактного принципа максимума. В [9] показано, что первая и вторая теоремы формализма Дубовицкого–Милютина могут быть получено методами, отличными от их доказательств в [3]. Показано, что основная теорема формализма Дубовицкого-Милютина следует из результатов, полученных в [9]. В локально выпуклом пространстве X при $x \in A \subset X$, где A -компакт, в [10] исследуется невыпуклая задача математического программирования: определить $J_0(x)$ при условии, что $J_j(x) \le 0, j \in [1, m]$. Получено необходимое условие существования эстремального решения в форме теоремы Куна-Таккера.

Задача управления с отклоняющимся аргументом. Задача исследована в [7].

Задачи оптимального управления. Класс задач исследован в [7].

Задача управления с нестандартным критерием качества. В [11,12] исследуется задача оптимального управления с критериями качества вида

$$J(x,u) = \left(\int_{t_0}^{t_1} W^1(x(t),u(t),t)dt\right) \Big/ \left(\int_{t_0}^{t_1} W^2(x(t),u(t),t)dt\right)$$

$$J(x,u) = \left(\int_{t_0}^{t_1} W^1(x(t),u(t),t)dt\right)\left(\int_{t_0}^{t_1} W^2(x(t),u(t),t)dt\right),$$

где $x(t) \in C^n(t_0, t_1)$-состояние; $u(t) \in L_\infty^r(t_0, t_1)$-управление, $u(t) \in U$; t-время. Исследуются два варианта задачи: U – любое произвольное выпуклое множество, t_1- не фиксировано; U – выпуклое множество, $\mathbf{int}\, U \ne \varnothing$; t_1-фиксировано.

Задача управления со случайными воздействиями. В [13] необходимые и достаточные условия оптимальности для объекта управления (ОУ) со случайными воздействиями исследуются в виде следующей последовательности: преобразование исходной задачи к виду, удобному для локального варьирования; установка связи исходной и преобразованной задачи; локальное варьирование преобразованной задачи. По результатам исследования получены необходимые и достаточные условия оптимальности.

Приближенный принцип максимум. В [14] на основе вариационного принципа Экланда [15] получен приближенный принцип максимума.

Экстремальные задачи для класса сложных функций. На множестве действительных функций $u(t) \in U$, измеримых на интервале $[t_0, t_1]$ и удовлетворяющих условиям

$$J_j[u] = F_j\left(\frac{1}{t_1 - t_0}\int_{t_0}^{t_1} q(z_0,t)u(t)dt, \ldots\ldots, \frac{1}{t_1 - t_0}\int_{t_0}^{t_1} q^n(z_0,t)u(t)dt\right),$$

$$\frac{1}{t_1 - t_0}\int_{t_0}^{t_1} u(t)dt = 1$$

в [16] исследуется задача определения экстремального значения функционала

$$J_0[u] = F_0\left(\frac{1}{t_1 - t_0}\int_{t_0}^{t_1} q(z_0, t)u(t)dt, \ldots\ldots, \frac{1}{t_1 - t_0}\int_{t_0}^{t_1} q^n(z_0, t)u(t)dt\right).$$

При сделанных предположениях получено уравнение Эйлера для исследуемой задачи.

Формализм Дубовицкого-Милютина и теория групп. Теорема отделимости, являющаяся основой формализма Дубовицкого-Милютина, в [17] распространяется на коммутативные (абелевы) группы.

Задача негладкой оптимизации. Используя понятие шатра [18] как касательной аппроксимации в [19] доказана возможность применения теоремы пересечения формализма Дубовицкого-Милютина к задачам негладкой оптимизации.

Существование решения. Для канонической задачи оптимального управления [20] в [21] исследуется проблематика существования и единственности решения.

Основной результат сформулирован и доказан в виде теоремs существования (если в исследуемой задаче существует хотя бы одна пара, удовлетворяющая условиям задачи, тогда существует пара, доставляющая абсолютный минимум) и единственности (строго выпуклый оптимизируемый функционал на выпуклом множестве имеет единственный минимум). В [22,23] на движениях ОУ $dx/dt = F(x, u, p, w, t)$ исследуется проблематика существования экстремального решения для функционалов $J(u) = M(\int_{t_0}^{t_1} W(x, u, q, t)dt)$ в [22] и $J(u) = J(M(f_0(x, u)))$, заданного как некоторая функция множества $(J_i(u))_{i=1}^m$ локальных критериев качества вида $J_i(u) = M(\lambda_i \int_{t_0}^{t_1} W_i(x, u.q, t)dt)$ в [23], где $\lambda_i \in \Lambda_0 = (\lambda_i : \lambda_ш \geq 0, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$, $x \in C^n(t_0, t_1)$ – состояние; $u \in L_\infty^r(t_0, t_1)$-управление; $w \in E^w = (\Omega, \Phi, \mu)$ – возмущение, (Ω, Φ, μ) – вероятностное пространство измеримых функций; p-параметр ОУ; q-параметр оптимизируемого функционала; M-математическое ожидание. Доказано, что для рассматриваемых задач существуют тройки $(x^0, u^0, [t_0, t_1])$, для которых имеет место неравенство $J(u) \geq J(u^0)$.

Изопериметрическая задача. В [24] исследуется задача определения $\min J(u)$, $J(u) = \int_0^{t_1} W(u(\tau), \tau)d\tau$ при наличии ограничения $\int_0^{t_1} \Psi(u(\tau), \tau)d\tau \leq C(t)$ где $u(t)$ – n-мерная векторная функция; $W(u(t), t), \Psi(u(t), t)$ и $C(t)$ скалярные. Необходимые и достаточные условия для исследуемой задачи получены в виде

$$W(u^0(t), t) - m(t)\Psi(u^0(t), t) = \max_{u \in U}[W(u(t), t) - m(t)\Psi(u(t), t)] \ \forall t \in [0, t_1],$$

где $m(t) = \int_0^{t_1} d\mu_1(\tau), \mu_1$- полностью аддитивная неотрицательная мера $(d\mu_1(t) \geq 0)$, сосредоточенная на множестве $M_1 = (t \in [0, t_1] : \int_0^1 \Psi(u^0(\tau), \tau)d\tau) = C(t)$.

При наличии ограничения на управление в рассмотрение вводится вспомогательная функция $r(u,t) = (\partial W(u,t)/\partial u)/(\partial \Psi(u,t)/\partial u)$ и исследуются два случая: $r(u,t)$ убывающая или возрастающая по u. В первом случае существует $u^0(t)$, а во втором – решение существует только в классе скользящих функций. В [25] исследуются две разновидности (с фиксированным и свободным временем) задачи определения $\min J(x,u)$, $J(x,u) = \int_0^{t_1} W(x,u)dt$ при наличии ограничения $\int_0^{t_1} \Psi(x,u(t))dt \le 0$. Основной результат получен в форме уравнения Эйлера. В [26] изопериметрическая задача оптимального управления исследуется в классе динамических задач многокритериальной оптимизации. В [27] исследуется конечномерный вариант классической изопериметрической задачи. На основе положений теории условий высших порядков найдены все стационарные точки и проанализированы условия стационарности.

Дискретные задачи управления. Выпуклые дискретные задачи оптимального управления исследуются в [28,29]. На основе положений формализма Дубовицкого-Милютина получены необходимые условия оптимальности в задаче Лагранжа и исследованы ее седловые точки [28], а в [29] - исследуется принцип максимума для исследуемой задачи.

Многокритериальной оптимизации. Основные аспекты проблематики задач многокритериальной оптимизации в рамках общей схемы формализма Дубовицкого-Милютина были проанализированы в [30,31].

Задача управления с операторными ограничениями. В [32] необходимо найти

$$\max J(u), J(u) = \int_0^1 \int_0^1 W(x,y,u(x,y))dxdy$$

при наличии ограничений $\int_0^1 f(x,y,u(x,y))dy = 0, \int_0^1 g(x,y,u(x,y))dx = 0$. В рассмотрение вводится семейство линейных экстремальных задач, которое исследуется методом трансляции решений уравнения Эйлера [33]. Найден общий вид и нетривиальные решения уравнения Эйлера. Анализируя цепочку уравнений Эйлера, получен принцип максимума. Задачи оптимизации в банаховых пространствах исследуются в [34-37]. Необходимо определить $\min J(x,u)$ при наличии ограничения $T(x,u) = 0$ в [34,35] и $Ax = f(x,u)$ в [36,37], $u \in U$, где x - состояние; u - управление; $T(x,u) = 0$ и $Ax = f(x,u)$-математические модели исследуемых процессов. Приводятся необходимые условия оптимальности первого порядка в [34,35] и уравнение Эйлера в [36,37].

Анормальные задачи управления. Распространение положений формализма Дубовицкого-Милютина на нерегулярные операторные ограничения исследуется в [38,39]. На основе обощенной теоремы Люстерника (предположение о двойной дифференцируемости операторных ограничений по Фреше), получен локальный принцип максимума, который имеет неырожденную форму в анормальном случае.

Скользящие режимы. Использование вариаций скольжения в задачах с ограничениями типа равенство рассматривается в [40]. Приведены условия, при выполнении которых, для доказательства принципа максимума можно использовать не скользящую вариацию, а близкую к ней. В [41-43] исследуется задача нахождения необходимых и достаточных условий минимума в классе последовательностей траекторий. В качестве основы используется общая теория минимума высших порядков для задач с ограничениями [44].

Задачи с обобщенными управлениям–мерами. Проблематика оптимизации динамических систем в ситуации, когда управление является распределенным типа меры исследуется в [45,46]. Проблема, связанная с решением дифференциального уравнения в распределениях – условие виброкоректности дифференциального уравнения (полная интегрируемость перераспределенной системы, что позволяет определить виброрешение как предел последовательности решений, отвечающих абсолютно непрерывным воздействиям и условие существование решения) исследуются в [45]. В [46] приводится доказательство интегрального принципа
максимума для исследуемой в [45] задачи. Для линейно-выпуклой задачи показано, что удовлетворяется также достаточное условие минимума.

Задачи минимаксного (максиминного) типа. В [47-53] исследуются различные варианты поименованных задач при иаличии ограничений. Задача определения $J(u^0) = \min_{u \in U} J(u), J(u) = \max_{t \in [t_0, t_1]} J(u)$ исследуется в [47]. Показано, что вывод формулы производной оптимизируемого функционала по любому направления позволило получить необходимое условие его минимума. В [48,49] определено необхолимое условие функционала $J(u) = \max_{t \in [t_0, t_1] I} \min_{i \in [1, s]} f(u_i(t), t)$. На основе определенного выпуклого конуса возможных направлений оптимизируемого функционала получены необходимые условия оптимальности. Принцип максимума для негладких функций исследуется в [50]. Доказательство основного результата базируется на идеях функционального анализа и ν-технике. Задача $\min J(u),\ J(u) = \max_{\alpha \in Y} f(u_i(t), \alpha)$, где α-параметр, исследуется в [51]. Получены условия, накладываемые на гамильтониан исследуемой задачи. Оптимизация критерий качества типа супремума от интегральной функции исследуется в [52]. На основе построенного конуса направления убывания оптимизируемого функционала и его сопряженного, получено уравнение Эйлера. На основе метода множителей Лагранжа в [53] исследуются достаточные условия минимакса в целом.
Метод шатров. Являясь развитием формализма Дубовицкого - Милютина, метод шатров [54] базируется на идеях выпуклых множеств и алгебраической топологии. В основе метода шатров лежит теория отделимости выпуклых множеств, применение которой позволило избавиться от специфического для формализма Дубовицкого - Милютина требования телесности конусов.

Литература: *1. Сиразетдинов Т.К. Методы решения многокритериальных задач синтеза технических систем / Т.К. Сиразетдинов.- М.: Машиностроение, 1988.-160 с. 2. Радиевский А.Е. Формализм Дубовицкого-Милютина в общей структуре вариационного исчисления.I/ А.Е. Радиевский // Радиоэлектроника и информатика.-2009.- № 3.- С.32-37. 3. Дубовицкий А.Я. Задачи на экстремум при наличии ограничений / А.Я. Дубовицкий, А.А. Милютин. // Ж. вычисл. мат. и мат. физ.-1965.- 5, № 3.- С. 395-453. 4. Гирсанов И.В. Лекции по математической теории экстремальных задач/ И.В. Гирсанов. // - М.: МГУ,1970.-117 с. 5. Егоров Ю.В. О достаточных условиях сильного экстремума в классе кривых с ограниченной производной/ Ю.В. Егоров, А.А. Милютин // Докл. АН СССР.-1964.-159, №5.- С.971-974. 6. Halkin H.A. Satisfactory treatment of equality and operator constraints in the Dubovitsrii Milyutin optimization formalism/ H.A. Halkin // J. Optimiz. Theory and Appl.-1970.- 6, №2.- P.138-149. 7. Радиевский А.Е. Развитие "неклассических" методов вариационного исчисления. / А.Е Радиевский // Мех. та машинобудування - 2010.- №1.- С.19-24. 8. Halkin H.A. The method of Dubovitsrii-Milyutin in mathematical programming / H.A. Halkin // Lecture Notes in Physics.-1973. - 21. - P. 1-12. 9. Пшеничный В.Н. Необходимые условия экстремума / В.Н. Пшеничный. - М. : Наука,1969.- 152 с. 10. Baranowicz J., Walczak S. On some mathematical programming problem in a locally convex space / J. Baranowicz, S. Walczak . //. Bull. Soc. Sci. Et letter lodz.-1986.-.№25.- P.1-11. 11. Subrahmanyam M.B. Necessary conditions for minimum in problems with nonstandard cost functionals/ M.B Subrahmanyam // J. of*

Math. Anal. and Appl.-1977.-60,№3.- P. 601-616. 12. Subrahmanyam M.B. A control problem with application to integral inequalities/ M.B Subrahmanyam // J. of Math. Anal. and Appl.-1981.-81,№2.- P. 346-355. 13.Федунов Б.Е. Условия оптимальности в некоторых задачах управления со случайными воздействиями / Б.Е. Федунов // Ж. вычисл. мат. и мат. физ.- 1971.- 11, №4. - С. 894 - 909. 14. Quijada O. Approximate maxitum principle via Dubovitskii-Milytin theory/ O. Quijada // [Publ.] Dep. Math. Karl. Max. Univ. Econ., Budapest. - 1987. - N3.-P.9 - 20. 15. Ekeland I. On the variation principle/ I. Ekeland // J. of Math. Anal. and Appl.-1974.-47.- P.324-353. 16. Mikolajczyk L. On application of the Dubovitsrii-Milyutin method to investigating certain extremal problems / L. Mikolajczyk, S. Walczak // Demonstr. Math. - 1980. - 13, N2. - 509 - 530. 17. Pales Z. A generalization of the Dubovitsrii-Milyutin separation theorem for commutative semi-groups/ Z. Pales // Arch.Math.-1989.-52, N4.-P.384-392. 18. Болтянский В.Г. Метод шатров в теории экстремальных задач/ В.Г. Болтянский // Успехи мат. наук. - 1975.-30, №3. - С.3-55.20. 19. Watkins G.G. Nonsmooth Milyutin-Dubovitski theory and Clark tangent cone/ G.G Watkins // Math. Oper. Res. - 1986.- 11, №1.- P.70-80. 20. Дубовицкий А.Я. Теория принципа максимума/ А.Я. Дубовицкий, А.А. Милютин // Методы теории экстремальных задач в экономике.- М.: Наука,1981.- С.6 - 46. 21. Дикусар В.В. Приложение.1/ В.В. Дикусар // Качественные и численные методы в принципе максимума.- М.: Наука,1989. - С.136 - 138. 22. Радиевский А.Е. Существование и единственность решения в стохастической задаче управления одного класса/ А.Е. Радиевский // Исследование операций и АСУ.- Киев: Лыбидь , 1993. - Вып.39. - С.38 - 40. 23. Радиевский А.Е. Стохастическая задача многокритериальной оптимизации / А.Е. Радиевский // Автоматика. - 1992.- № 4.- С.30 - 32. 24. Malanowski K. Maksymalizacij funkcijonalu calkowego przy ogzamezenin amplitudy i calki argumentn/ K. Malanowski // Arch.automat. i telemech.- 1968.- 13,N3. - P.267 - 290. 25. Sudhakar Divakarani P. Optimal control problems with nondifferentiable isoperimetric constraints/ P. Sudhakar Divakarani , D. Eyman Earl // Jnt. J. Contr.- 1977.- 25,N1.- P.129 - 152. 26. Радиевский А.Е Изопериметрическая задача динамического синтеза/ А.Е Радиевский //Информационно-управляющие системы на железнодорожном транспорте, 2002. - №3.- С.59-62. 27. Левитин Е.С. Исследование конечномерной изопериметрической задачи с помощью теории высших порядков локального минимума/ Е.С. Левитин А.А., Милютин, Н.П. Осмоловский // Дифференциальные уравнения и численные методы.- Новосибирск, 1986.- С.224 - 237. 28. Фам Хыу шак. Об оптимальном управлении дискретными процессами/ Фам Хыу шак // Автом. и телемех. - 1968. - N8.- С.78 - 86. 29. Tamminen E. Optimal control problems with discrete time linear dynamic and convex state-control constraint/ E.Tamminen. // Publ. Elec. And Nucl. Technol. Techn. Res. Centr. Finland.- 1979. - N26.- 42 p. 30. Радиевский А.Е. Формализм Дубовицкого-Милютина и задача многокритериальной оптимизации. / А.Е. Радиевский // Мех. та машинобудування.- 2010.- №1- С.24-29. 31. Радиевский А.Е. Динамическая задача многокритериальной оптимизации / А.Е. Радиевский // Тр. Одес. политехнического ун-та.-Одесса, 2001.-Вып.3(15).- С. 84-87. 32. Аркин В.И. Выпуклость значений векторных интегралов, теоремы измеримого выбора и вариационные задачи/ В.И. Аркин, В.Л. Левин // Успехи мат. наук. - 1972. - 27, №3(165).-С.21-77. 33. Дубовицкий А.Я. Трансляция уравнений Эйлера / А.Я. Дубовицкий А.А. Милютин // Ж. вычисл. мат. и мат.физ.-1969.-9, N6.- С.1263 – 1284. 34. Lorentz R. Eine anwendung des Satzes von Dubovickij-Miljutin anf ein Problem der optimalen steuerung im B-Raum /R. Lorentz // Wiss. Z. Techn. Hochsch. Iimenau.-1977.-23, N4.- P.71 - 80. 35. Lorentz R. Notwendiges Optimalitats - kriterium fur eine Steueraufgable mit nicht eindentig losbarer Zustandsgleichung/ R.Lorentz // Abh. Akad. Wicc. DDR. Abt. Math. Naturwiss. Tech.-1977.- N1.- P.337 - 340. 36. Swartz Charles. A control problem of Rodak and Scott –Thomas/ Charles Swartz // J. of Math. Anal. and Appl.- 1980.- 78, N1.- P.127 -132. 37. Swartz Charles. A control problem of Rodak and Scott-Thomas/ Charles Swartz // J. of Math. Anal. and Appl.- 1981.-79, N1.- P.218 - 223. 38. Ledzewicz U. Extension of the local maxitum principle to abnormal optimal control problems/ U. Ledzewicz // J. Optimiz.Theory and Appl. - 1993. - vol. 77, No3. - p. 661 - 681. 39. Ledzewicz U. Second-order conditions for extremum problems with nonregular equality constraints/ U. Ledzewicz, H. Schacttler // J. Optimiz. Theory and Appl.- 1995.- 86,N1.- P.113 - 144. 40. Дмитрук А.В .К обоснованию метода скользящих режимов для задач оптимального управления со смешанными ограничениями/ А.В/ Дмитрук // Функциональный анализ и его приложения. - 1976. -10, вып.3.- С.39 - 44. 41. Дубовицкий В.А. Необходимые и достаточные условия понтрягинского минимума в задачах оптимального управления с особыми и обобщенными управлениями/ В.А. Дубовицкий // Успехи мат. наук. -

1982.- 37,N3.- С.185 - 186. 42. Дубовицкий В.А. Необходимые и достаточные условия минимума в задачах оптимального уп-равления со скользящими режимами и обобщенными управлениями. Ч2. / Дубовицкий В.А. /- Черноголовка, 1981. - 24 с. (Препринт / АН СССР. Институт хим. физ.). 43. Дубовицкий В.А. Необходимые и достаточные условия минимума в задачах оптимального управления со скользящими режимами и обобщенными управлениями/ В.А. Дубовицкий // Автом. и телемех. - 1984. - N2. - С.33 - 44. 44. Левитин Е.С. Условия высших порядков локального минимума в задачах с ограничениями/ Левитин Е.С., А.А. Милютин, Н.П. Осмоловский // Успехи мат. наук- 1978.- 33,N6. - С.85 - 148. 45. Орлов Ю.В. Вариационный анализ оптимальных систем с обобщенными управлениями типа меры.1/ Ю.В. Орлов // Автом. и телемех. - 1987. - N2. - С.28 - 32. 46. Орлов Ю.В. Вариационный анализ оптимальных систем с обобщенными управлениями типа меры.2/ Ю.В. Орлов // Автом. и телем.-1987.- N3.- С.36 - 48. 47. Виноградова Т.К. О минимаксном подходе к решению некоторых задач оптимального управления / Т.К. Виноградова. -Л. : Изд-во ЛГУ.1974. -12с. Деп. в ВИНИТИ 26.08.74, N2338 - 74ДЕП. 48. Грубиянов С.Ф. Необходимые условия оптимальности для задач с некоторым классом локально-невыпуклых функционалов/ С.Ф. Грубиянов // Динамика управляемых систем.- Новосибирск : Наука, 1979.- С.99 - 103. 49. Грубиянов С.Ф. Необходимые условия оптимальности для задач с некоторым классом локально-невыпуклых функционалов/ С.Ф. Грубиянов // Вестник МГУ. Мат., мех.-1980.- N1.- С.14 - 17. 50. Гасанов К.К. Принцип максимума в одной экстремальной задаче/ К.К. Гасанов А.Г. Агамалиев // Уч. записки Азерб. ун-та. Вопросы прик. мат. и кибернетики. – 1978 - N1 .- С.24 - 27. 51. Acosta H.Q., Fernandes A.G. Aplicacion de la tecnica de los conos convexos a un problema de control con retardo y restriccions / H.Q. Acosta, A.G. Fernandes // Revista investigacion operacional. - 1984.- 5,N1.- P.13 – 29. 52. Железнов Е.И. Необходимые условия оптимальности по минимаксу программного управления при наличии ограничений/ Е.И. Железнов // Дифференциальные уравнения. - 1983.- 19,N9. - С.1487 - 1495. 53. Величенко В.В. О достаточных условиях глобального минимакса/ В.В. Величенко // ДАН СССР. - 1974. - 219, №5. - С.1045 -1048. 54. Болтянский В.Г. Метод шатров в теории экстремальных задач/ В.Г. Болтянский // Успехи мат. наук .- 1975. -30, N3. - С.3 - 55.

Bibliography (transliterated): *1. Sirazetdinov T.K. Metody reshenija mnogokriterial'nyh zadach sinteza tehnicheskih sistem / T.K. Sirazetdinov.- M.: Mashinostroenie, 1988.-160 s. 2. Radievskij A.E. Formalizm Dubovickogo-Miljutina v obwej strukture variacion-nogo ischislenija.I / A.E. Radievskij // Radiojelektronika i informatika.-2009.- № 3.- S.32-37. 3. Dubovickij A.Ja. Zadachi na jekstremum pri nalichii ogranichenij / A.Ja. Du-bovickij, A.A. Miljutin. // Zh. vychisl. mat. i mat. fiz.- 1965.- 5, № 3.- S. 395-453. 4. Girsanov I.V. Lekcii po matematicheskoj teorii jekstremal'nyh zadach/ I.V. Girsa-nov. // - M.: MGU,1970.-117 s. 5. Egorov Ju.V. O dostatochnyh uslovijah sil'nogo jekstremuma v klasse krivyh s ogranichennoj proizvodnoj/ Ju.V. Egorov, A.A. Miljutin // Dokl. AN SSSR.- 1964.-159, №5.- S.971-974. 6. Halkin H.A. Satisfactory treatment of equality and operator constraints in the Dubovitsrii Milyutin optimization formalism/ H.A. Halkin // J. Optimiz. Theory and Appl.-1970.- 6, №2.- P.138-149. 7. Radievskij A.E. Razvi-tie "neklassicheskih" metodov variacionnogo ischislenija. / A.E Radievskij // Meh. ta mashinobuduvannja - 2010.- №1.- S.19-24. 8. Halkin H.A. The method of Dubovitsrii-Milyutin in mathematical programming / H.A. Halkin // Lecture Notes in Physics.-1973.- 21.- P.1-12. 9. Pshenichnyj V.N. Neobhodimye uslovija jekstremuma / V.N. Pshenichnyj. - M.:Nauka,1969.- 152 s. 10. Baranowicz J., Walczak S. On some mathematical programming problem in a locally convex space / J. Baranowicz, S. Walczak . //. Bull. Soc. Sci. Et letter lodz.-1986.-.№25.- P.1-11. 11. Subrahmanyam M.B. Necessary conditions for minimum in problems with nonstandard cost functionals/ M.B Subrahmanyam // J. of Math. Anal. and Appl.-1977.-60,№3.- P. 601-616. 12. Subrahmanyam M.B. A control problem with applica-tion to integral inequalities/ M.B Subrahmanyam // J. of Math. Anal. and Appl.-1981.-81,№2.- P. 346-355. 13.Fedunov B.E. Uslovija optimal'nosti v nekotoryh zadachah upravlenija so sluchajnymi vozdejstvijami / B.E. Fedunov // Zh. vychisl. mat. i mat. fiz.- 1971.- 11, №4. - S. 894 - 909. 14. Quijada O. Approximate maximum principle via Dubovitskii-Milytin theory/ O. Quijada // [Publ.] Dep. Math. Karl. Max. Univ. Econ., Buda-pest.- 1987.-N3.-P.9 - 20. 15. Ekeland I. On the variation principle/ I. Ekeland // J. of Math. Anal. and Appl.-1974.-47.- P.324-353. 16. Mikolajczyk L. On application of the Dubovitsrii-Milyutin method to investigating certain extremal problems / L. Mikolajczyk, S. Walczak // Demonstr. Math.-1980.-13, N2.-509-530. 17. Pales Z. A generalization of the Dubovitsrii-Milyutin separation theorem for commu-*

tative semi-groups/ Z. Pales // Arch.Math.-1989.-52, N4.-P.384-392. 18. Boltjanskij V.G. Metod shatrov v teorii jekstremal'nyh zadach/ V.G. Boltjanskij // Uspehi mat. nauk.-1975.-30, №3.- S.3-55.20. 19. Watkins G.G. Nonsmooth Milyutin-Dubovitski theory and Clark tangent cone/ G.G Watkins // Math. Oper. Res.- 1986.- 11, №1.- P.70-80. 20. Dubovickij A.Ja. Teorija principa maksimuma/ A.Ja. Dubovickij, A.A. Miljutin // Metody teorii jekstremal'nyh zadach v jekonomike. - M.: Nauka,1981.- S.6 - 46. 21. Dikusar V.V. Prilozhenie.1/ V.V. Dikusar // Kachestvennye i chislennye metody v principe maksimuma.- M.: Nauka,1989. - S.136 - 138. 22. Radievskij A.E. Su-westvovanie i edinstvennost' reshenija v stohasticheskoj zadache upravlenija odnogo klassa/ A.E. Radievskij // Issledovanie operacij i ASU.- Kiev: Lybid' , 1993. - Vyp.39. - S.38 - 40. 23. Radievskij A.E. Stohasticheskaja zadacha mnogokriterial'noj optimizacii / A.E. Radievskij // Avtomatika. - 1992. - № 4.- S.30 - 32. 24. Malanowski K. Maksymalizacij funkcijonalu calkowego przy ogzamezenin amplitudy i calki argumentn/ K. Malanowski // Arch.automat. i telemech.- 1968.- 13,N3. - P.267 - 290. 25. Sudhakar Divakarani P. Optimal control problems with nondifferentiable isoperimetric constraints/ P. Sudhakar Divakarani , D. Eyman Earl // Jnt. J. Contr.- 1977.- 25,N1.- P.129 - 152. 26. Radi-evskij A.E Izoperimetricheskaja zadacha dinamicheskogo sinteza/ A.E Radievskij //Informacionno-upravljajuwie sistemy na zheleznodorozhnom transporte, 2002.- №3.- S.59- 62. 27. Levitin E.S. Issledovanie konechnomernoj izoperimetricheskoj zadachi s pomow'ju teorii vysshih porjadkov lokal'nogo minimuma/ E.S. Levitin A.A., Milju-tin, N.P. Osmolovskij // Differencial'nye uravnenija i chislennye metody.- Novo-sibirsk, 1986.- S.224 - 237. 28. Fam Hyu shak. Ob optimal'nom upravlenii diskret-nymi processami/ Fam Hyu shak // Avtom. i telemeh. - 1968. - N8.- S.78 - 86. 29. Tam-minen E. Optimal control problems with discrete time linear dynamic and convex state-control constraint/ E.Tamminen. // Publ. Elec. And Nucl. Technol. Techn. Res. Centr. Finland.- 1979. - N26.- 42 p. 30. Radievskij A.E. Formalizm Dubovickogo-Miljutina i zadacha mnogokriterial'noj optimizacii. / A.E. Radievskij // Meh. ta mashinobudu-vannja.- 2010.- №1- S.24-29. 31. Radievskij A.E. Dinamicheskaja zadacha mnogokriteri-al'noj optimizacii / A.E. Radievskij // Tr. Odes. politehnicheskogo un-ta.-Odessa, 2001.- Vyp.3(15).- S. 84-87. 32. Arkin V.I.. Vypuklost' znachenij vektornyh integra-lov, teoremy izmerimogo vybora i variacionnye zadachi/ V.I. Arkin, V.L. Levin // Uspehi mat. nauk.-1972.-27, №3(165).-S. 21-77. 33. Dubovickij A.Ja. Transljacija urav-nenij Jejlera / A.Ja. Dubovickij A.A. Miljutin // Zh. vychisl. mat. i mat.fiz.-1969.-9, N6.- S.1263 – 1284. 34. Lorentz R. Eine anwendung des Satzes von Dubovickij-Miljutin anf ein Problem der optimalen steuerung im B-Raum /R. Lorentz // Wiss. Z. Techn. Hochsch. Iimenau.-1977.-23, N4.- P.71 - 80. 35. Lorentz R. Notwendiges Optimalitats - kriterium fur eine Steueraufgable mit nicht eindentig losbarer Zustandsgleichung/ R.Lorentz // Abh. Akad. Wicc. DDR. Abt. Math. Naturwiss. Tech.-1977.- N1.- P.337 - 340. 36. Swartz Charles. A control problem of Rodak and Scott –Thomas/ Charles Swartz // J. of Math. Anal. and Appl.- 1980.- 78, N1.- P.127 -132. 37. Swartz Charles. A control problem of Rodak and Scott-Thomas/ Charles Swartz // J. of Math. Anal. and Appl.- 1981.-79, N1.- P.218 - 223. 38. Ledzewicz U. Extension of the local maximum principle to abnormal optimal control problems/ U. Ledzewicz // J. Optimiz.Theory and Appl.. - 1993. - vol. 77, No3. - p. 661 - 681. 39. Ledzewicz U. Second-order conditions for extremum problems with nonregular equality constraints/ U. Ledzewicz, H. Schacttler // J. Optimiz. Theory and Appl.- 1995.- 86,N1.- P.113 - 144. 40. Dmitruk A.V .K obosnovaniju metoda skol'zjawih rezhimov dlja zadach optimal'nogo upravlenija so smeshannymi ogranichenijami/ A.V/ Dmitruk // Funkcio-nal'nyj analiz i ego prilozhenija. - 1976. -10, vyp.3.- S.39 - 44. 41. Dubovickij V.A. Neobhodimye i dostatochnye uslovija pontrjaginskogo minimuma v zadachah optimal'no-go upravlenija s osobymi i obobwennymi upravlenijami/ V.A. Dubovickij // Uspehi mat. nauk. - 1982.- 37, N3.- S.185 - 186. 42. Dubovickij V.A. Neobhodimye i dostatoch-nye uslovija minimuma v zadachah optimal'nogo up-ravlenija so skol'zjawimi rezhimami i obobwennymi upravlenijami.Ch2./ Dubovickij V.A./-Chernogolovka, 1981.- 24 s. (Pre-print/ AN SSSR. Institut him. fiz.). 43. Dubovickij V.A. Neobhodimye i dostatoch-nye uslovija minimuma v zadachah optimal'nogo upravlenija so skol'zjawimi rezhimami i obobwennymi upravlenijami/ V.A. Dubovickij // Avtom. i telemeh. - 1984. - N2. - S.33 - 44. 44. Levitin E.S. Uslovija vysshih porjadkov lokal'nogo minimuma v zadachah s ogranichenijami/ Levitin E.S., A.A. Miljutin, N.P. Osmolovskij // Uspehi mat. nauk - 1978.- 33, N6. - S.85 - 148. 45. Orlov Ju.V. Variacionnyj analiz optimal'nyh sistem s obobwennymi upravlenijami tipa mery. 1 / Ju.V. Orlov // Avtom. i telemeh. - 1987. - N2. - S.28 - 32. 46. Orlov Ju.V. Variacionnyj analiz optimal'nyh sistem s obobwennymi upravlenijami tipa mery. 2 / Ju.V. Orlov // Avtom. i telem.-1987.- N3.- S.36 - 48. 47. Vinogradova T.K. O minimaksnom podhode k resheniju nekotoryh zadach optimal'-nogo upravlenija / T.K. Vinogradova.

-L. : Izd-vo LGU.1974. -12s. Dep. v VINITI 26.08.74, N2338 - 74DEP. 48. Grubijanov S.F. Neobhodimye uslovija optimal'nosti dlja zadach s nekotorym klassom lokal'no-nevypuklyh funkcionalov/ S.F. Grubijanov // Dinamika upravljaemyh sistem. - Novosibirsk : Nauka, 1979.- S.99 - 103. 49. Grubijanov S.F. Neobhodimye uslovija optimal'nosti dlja zadach s nekotorym klassom lokal'no-nevypuklyh funkcionalov/ S.F. Grubijanov // Vestnik MGU. Mat., meh.-1980.- N1.- S.14 - 17. 50. Gasanov K.K. Princip maksimuma v odnoj jekstremal'noj zadache/ K.K. Ga-sanov A.G. Agamaliev // Uch. zapiski Azerb. un-ta. Voprosy prik. mat. i kibernetiki. – 1978 - N. - S.24 - 27. 51. Acosta H.Q., Fernandes A.G. Aplicacion de la tecnica de los conos convexos a un problema de control con retardo y restriccions / H.Q. Acosta, A.G. Fernandes // Revista investigacion operacional. - 1984. - 5,N1.- P.13 – 29. 52. Zheleznov E.I. Neobhodi-mye uslovija optimal'nosti po minimaksu programmnogo upravlenija pri nalichii og-ranichenij/ E.I. Zheleznov // Differencial'nye uravnenija. - 1983.- 19,N9. - C.1487 - 1495. 53. Velichenko V.V. O dostatochnyh uslovijah global'nogo minimaksa/ V.V. Velichenko // DAN SSSR. - 1974. - 219, №5. - S.1045 -1048. 54. Boltjanskij V.G. Metod shat-rov v teorii jekstremal'nyh zadach/ V.G. Boltjanskij // Uspehi mat. nauk. - 1975. -30, N3. - S.3 - 55.

Радієвський А.Є.

РОЗВИТОК ЗАГАЛЬНОЇ СХЕМИ ФОРМАЛІЗМУ ДУБОВІЦЬКОГО–МІЛЮТИНА У ТЕОРЕТИЧНОМУ АСПЕКТІ. І

Досліджуються роботи вітчизняних та закордонних вчених стосовно розвитку "некласичних" методів варіаційного числення у рамках загальної схеми формалізму Дубовіцького-Мілютіна.

Radievski A. E

DEVELOPMENT THE DENERAL SCHEM OF DUBOVITSKI-MILUTIN FORMALISM IN THEORY ASPECT. I

Analysis the works of native and foreign scientist respect the development "nonclassical" method of the calculus variations in the limits of the general scheme Dubovitski - Milutin formalism.