

S. 130–138. 15. Andreev Yu. M. *Komputernoe modelirovanie negolonomnykh sistem tverdukh tel na osnove principa Dalamberta – Lagranga* / Yu. M. Andreev, O. K. Morachkovsky // *Prikl. mehanika*. – 2006. – Т. 42, №9. – С. 106–115. 16. Wittenburg Y. *Dinamika sistem tverdukh tel* / Y. Wittenburg. – М.: Мир. – 1980. – 296 с. 17. Velichenko V. V. *Matrichno-geometricheskie metodu v mehanike s prilozheniyami k zadacham robototekhniki* / V. V. Velichenko. – М.: Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit. – 1988. – 280 с. 18. Konoplev V. A. *Agregativnaya mehanika sistem tverdukh tel* / V. A. Konoplev. – М.: Nauka. – 1996. – 166 с. 19. Kane T. R. *Dynamics: Theory and Applications* / T. R. Kane, D. A. Levinson. – New York: McGraw-Hill, 1985. – 402 p.

Андреев Ю.М., Ларин А.О.

**МЕТОД СТРУКТУРНИХ МАТРИЦЬ В МЕХАНІЦІ МАШИН
(ІСТОРІЯ ПИТАННЯ)**

Стаття обговорює історію застосування у механіці машин метода структурних матриць. Особлива увага приділяється роботам, що проводилися у ХПІ під керівництвом відомого вченого професора Л. І. Штейнвольфа.

Андреев Ю.М., Ларин А.А.

**МЕТОД СТРУКТУРНЫХ МАТРИЦ В МЕХАНИКЕ МАШИН
(ИСТОРИЯ ВОПРОСА)**

В статье рассматривается история применения в механике машин метода структурных матриц. Особое внимание уделяется работам, проводившимся в ХПИ под руководством известного ученого профессора Л. И. Штейнвольфа.

Andreev Yu.M., Larin A.A.

**METHOD OF STRUCTURAL MATRIXES IN THE MECHANIC OF MACHINES
(HISTORY OF THE PROBLEM)**

In article the history of application in the mechanic of machines of a method structural matrixes is considered. The special attention is given the works which are spent in KhPI under direction of known scientific professor L. I. Shtejnvolff.

УДК 539.3:534.1

Ольшанский В.П., д-р ф.-м. наук

**ОБ ИССЛЕДОВАНИЯХ А.П. ФИЛИПОВА В ТЕОРИИ
УПРУГОГО УДАРА**

Введение. Работы по упругому удару приходятся на период расцвета творческой деятельности академика А.П. Филиппова. Он начал решать задачи упругого удара уже будучи признанным специалистом в СССР по механике неупругого удара. Но, зная несовершенства теории неупругого удара Сен-Венана, Анатолий Петрович не стал дальше развивать эту теорию, а начал решать задачи нестационарных колебаний балок и пластин в более современной постановке, которую предложил С.П. Тимошенко. Переход к новому способу описания явления удара стал возможным благодаря внедрению ЭВМ в научные исследования. На ЭВМ стало возможным численно решать нелинейное интегральное уравнение упругого удара с неизвестным контактным усилием взаимодействия соударяющихся тел. Это численное решение позволило найти зависимость силы удара от времени, обнаружить многократность соударения, а также вычислить перемещения и напряжения в ударяемом теле. Рассмотрим достижения Анатолия Петровича в этом направлении за время длительной научной деятельности, подтвержденной его публикациями.

Основная часть обзора. Прежде всего, отметим, что в качестве тел, подверженных удару, Анатолий Петрович выбрал балки и пластины. Эти элементы конструкций распространены в машиностроении, судостроении, авиастроении и других областях техники. Поэтому работы А.П. Филиппова были направлены на совершенствование прочностных расчетов этих элементов конструкций при упругом ударе.

В отличие от теории Сен-Венана, в теории упругого удара перемещение ударяющегося тела не приравнивается прогибам балки или пластины. Разница между ними равна величине местного контактного сжатия соударяющихся тел

$$\varepsilon = \varepsilon(P), \quad (1)$$

где P – усилие контактного взаимодействия.

Это усилие определяют из уравнения:

$$w(t) = y_1(t) + \varepsilon(t), \quad (2)$$

в котором, $w(t)$ – перемещение ударяющегося тела; $y_1(t)$ – прогиб балки или пластины в центре области контакта с ударяющим телом.

Существенно то, что при $\varepsilon = 0$ равно нулю и усилие P . Усилие удара отлично от нуля, лишь в те моменты времени t , когда

$$\varepsilon(t) = w(t) - y_1(t) > 0.$$

Поэтому уравнение (2) позволяет определять зависимость $P = P(t)$ и продолжительность удара во времени при условии, что известна функция

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(P(t)).$$

Решая задачу удара шара по балке, С.П. Тимошенко брал ее в виде [1]

$$\varepsilon = K P^{2/3}, \quad (3)$$

где множитель K – зависит от материалов соударяющихся тел.

Выражение (3) получил Г. Герц, решив задачу вдавливания одного упругого тела в другое, в предположении, что область контакта гораздо меньше размеров контактирующих тел.

Это допущение может не соблюдаться при ударе тела по тонкостенной пластике, что подтвердили исследования А.П. Филиппова. Решая задачу вдавливания шара в плиту, он получил формулу [2,3]:

$$\varepsilon(P) = K_1 P^{2/3} - K_2 P,$$

где K_1, K_2 – зависят от размеров плиты. За счет второго слагаемого, пропорционального P , появилась поправка к теории Г. Герца.

Перемещение груза при ударе $w(t)$ определяют интегрированием уравнения его движения. Интегрирование дает:

$$w(t) = v_0 t - \frac{1}{M} \int_0^t dt \int_0^t P(t) dt,$$

при условии, что в момент начала удара $t = 0$ скорость груза равна v_0 .

Поэтому, согласно (2), усилие удара находят из интегрального уравнения:

$$v_0 t - \frac{1}{M} \int_0^t dt \int_0^t P(t) dt = \varepsilon(P(t)) + y_1(t), \quad (4)$$

в котором $y_1(t)$ – прогиб тела, подвергнутого удару.

В случае удара груза по балке [4]:

$$y_1(t) = \frac{l^2}{\delta^2 F \rho l} \sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{r_K^2} X_K^2(\xi_1) \int_0^t P(t_1) \sin \frac{r_K \delta}{l^2} (t - t_1) dt_1. \quad (5)$$

Здесь $\delta^2 = \frac{EJ}{\rho F}$; EJ – изгибная жесткость; $\rho F l$ – масса балки длиной l ;

$r_K, X_K(\xi)$ – собственные числа и собственные функции, зависящие от граничных условий; $\xi_1 = x_1 l^{-1}$ – безразмерная координата, где происходит удар грузом.

При центральном ударе груза по шарнирно-опертой балке:

$$\xi_1 = 0,5; \quad r_K = k\pi; \quad X_K(\xi) = \sin(k\pi \xi).$$

Для численного решения функционального уравнения удара, которое получают подстановкой (5) в (4), исследуемый интервал времени $[0; t]$ разбивают на малые промежутки времени τ и на каждом промежутке аппроксимируют $P(t)$.

В отличие от С.П. Тимошенко, Анатолий Петрович применяет не кусочно-постоянную (ступенчатую), а линейную аппроксимацию вида [4]

$$P(t) = P_q - (P_q - P_{q-1}) \left(q - \frac{t}{\tau} \right), \quad P(0) = 0, \quad q = 1, 2, 3, \dots \quad (6)$$

При такой аппроксимации производная $P(t)$ по t является ограниченной величиной, что улучшает сходимость ряда (5) для $y(t)$. Это позволяет вычислить не только прогибы, а и напряжения в балке при ударе, т.е. оценить прочность тела, подвергнутого удару.

Опуская подробности численного решения, приводим результаты расчетов, которые А.П. Филиппов получил для шарнирно-опертой и заземленной по краям стальных балок длиной $l = 0,8$ м. Размеры квадратного поперечного сечения были равны $0,0254 \times 0,0254$ м. Груз массой $M = 1,78$ кг падал с высоты $H = 0,16$ м и ударял по центру балки ($\xi_1 = 0,5$).

Полученные графики усилия $P(t)$, прогиба балки $y_1(t)$ и наибольших изгибных напряжений $\sigma(t)$ представлены на рис. 1-4.

При переходе к более жестким условиям закрепления уменьшились динамические напряжения в балке.

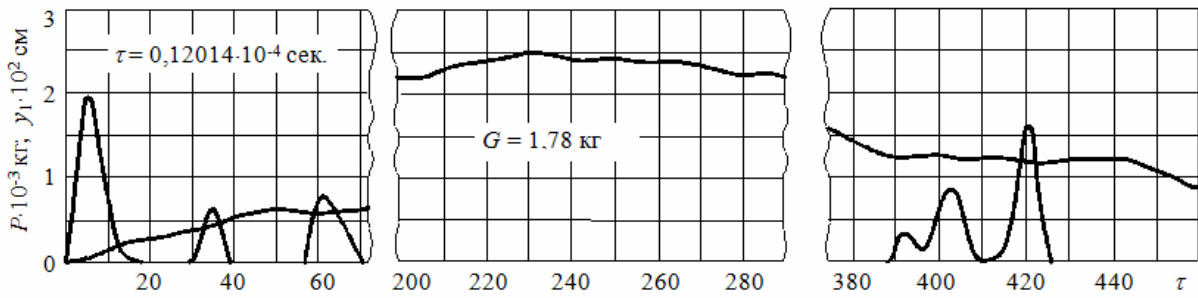


Рис.1. Усилие удара и прогибы шарнирно-опертой балки

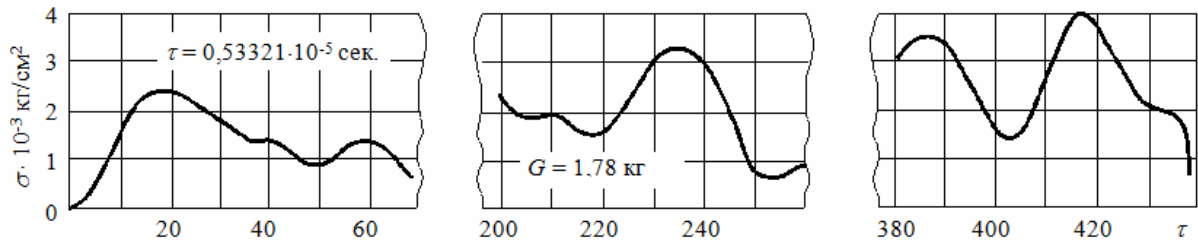


Рис. 2. Напряжения в шарнирно-опертой балке

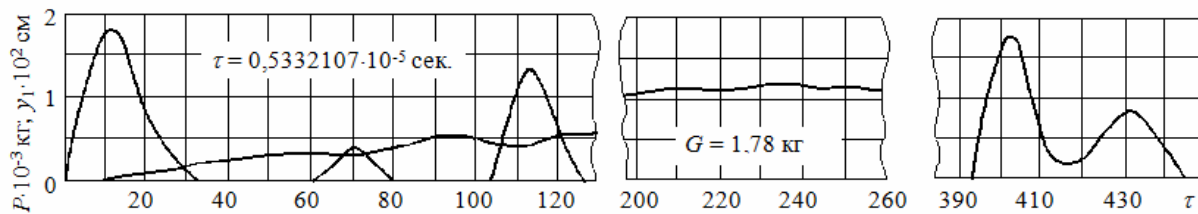


Рис.3. Усилие удара и прогибы защемленной по краям балки

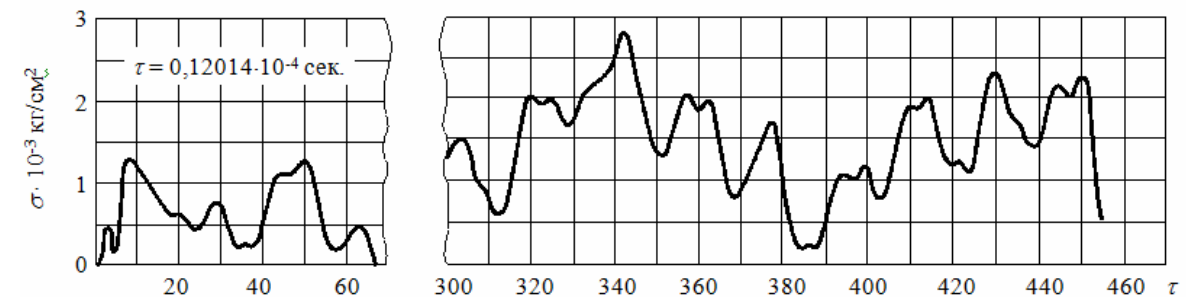


Рис. 4. Напряжения в защемленной по краям балке

На деформации сравнительно коротких стержней при ударе могут существенное влияние оказывать сдвиг и инерция поворота сечений. Поэтому Анатолий Петрович далее рассмотрел задачу упругого удара, исходя из волнового уравнения изгиба балки, которое вывел С.П. Тимошенко.

При учете влияния волновых процессов в балке он использовал уравнения [5,6]:

$$\rho F \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} - K' \left(\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) FG = P(t) \delta(x - x_1);$$

$$EJ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + K' \left(\frac{\partial y_1}{\partial x} - \psi \right) FG - J \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0. \quad (7)$$

В них F – площа поперечного сечення стержня; J – момент інерції сечення; ρ – щільність матеріала; ψ – кут повороту елемента стержня; $y_1 = y_1(x, t)$ – прогиб; K' – коефіцієнт, залежачий від форми поперечного сечення; $\delta(x - x_1)$ – дельта функція; E – модуль еластичності; G – модуль сдвига матеріала стержня.

Решив систему (7) для случая свободно-опертых краев балки, Анатолий Петрович получил:

$$y_1(x, t) = \frac{2K'G}{\rho^2 J l} \sum_{n=1,2,\dots} \frac{1}{\omega_{2n}^2 - \omega_{1n}^2} \left[\sum_{j=1}^2 (-1)^{1+j} \left(\frac{1}{\omega_{jn}} - \frac{\rho J \omega_{jn}}{F G K'} + \frac{\rho \delta^2 n^2 \pi^2}{\omega_{jn} K' G l^2} \right) \times \int_0^t P(t_1) \sin \omega_{jn} (t - t_1) dt_1 \right] \sin \frac{n\pi x_1}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (8)$$

Здесь $\omega_{jn} = \frac{\delta}{r^2} r_{jn}$, $\delta^2 = \frac{EJ}{\rho F}$, $r^2 = \frac{J}{F}$, r_{jn} – положительные корни уравнения:

$$r_n^4 + \frac{K'G}{E} \left[1 + \frac{n^2 \pi^2}{l^2} r^2 \left(1 + \frac{E}{K'G} \right) \right] r_n^2 + \frac{K'G}{E} \frac{(rn\pi)^4}{l^4} = 0; \quad l - \text{длина балки.}$$

Аналогичные решения он построил для изгибающего момента и напряжений [5].

Используя, вместо (5), выражение (8), он численно решил функциональное уравнение удара на ЭВМ.

Рассмотрим полученные результаты при центральном ударе стального шара радиуса $R_u = 7,141$ см, после падения его на рельс $P-4a$ с высоты $H = 25$ см. Рельс имел следующие параметры: $l = 80$ см; $F = 39,45$ см²; $\rho F = 0,3083$ кг/см·сек⁻²; $J = 751$ см⁴.

Графики $P(t)$ и $y_1(t)$ представлены на рис. 5. Сплошными линиями нанесены результаты расчета с применением волнового уравнения, а пунктирными – на основе классического уравнения Эйлера-Бернулли.

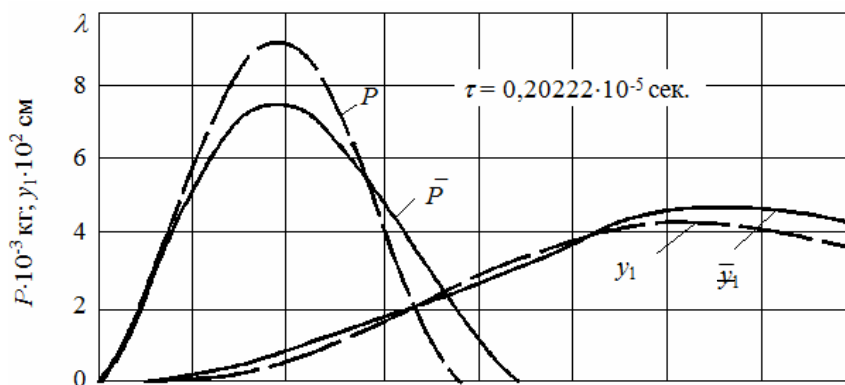


Рис. 5. Усилие удара и прогибы рельса $P-4a$

В результате учета сдвига и инерции поворота уменьшились значения силы удара, но несколько увеличились прогибы балки в сечении $x = 0,5l$, где приложена сила $P(t)$.

Расчитанные для этого сечения изгибные напряжения σ при двух высотах сброса шара: $H = 25$ см и $H = 10$ см представлены на рис. 6. Максимальные значения изгибных напряжений, к которым приводит волновая и классическая теории изгиба балки (соответственно сплошные и пунктирные линии) близки между собой.

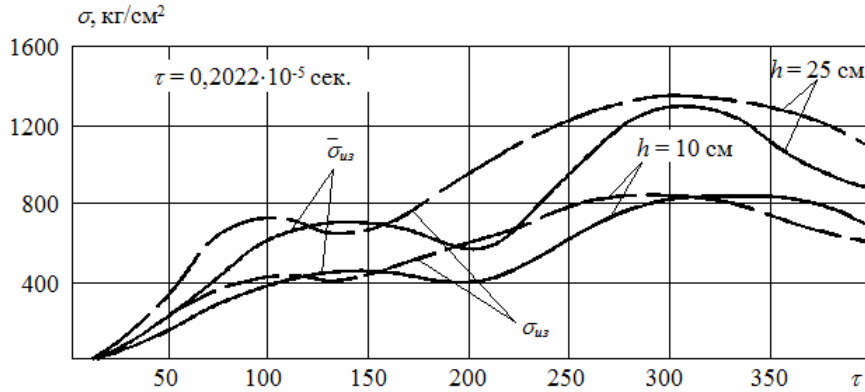


Рис.6. Напряжения в рельсе $P - 4a$

На рис. 7 и рис. 8 показаны изменения прогибов и напряжений в сечении $x = 0,75l$, полученные при учете волновых процессов. Прогибы и напряжения в этом сечении возникают лишь после прихода волны деформаций, которая движется со скоростью $c_1 = 65 \cdot 10^5$ см/сек.

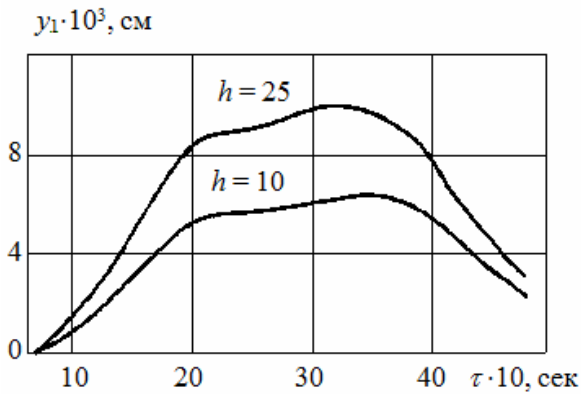


Рис.7. Прогибы рельса в сечении $\xi = 0,75$

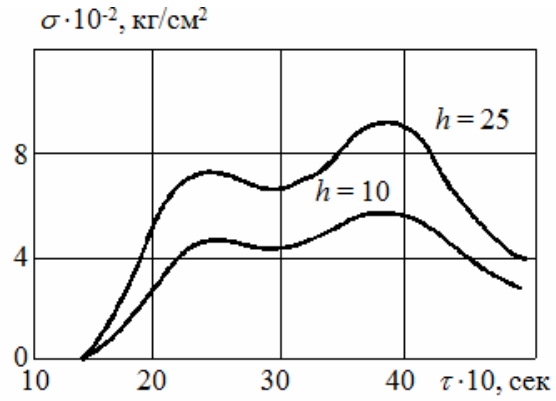


Рис. 8. Напряжения в сечении $\xi = 0,75$

Анализируя роль волновых процессов, Анатолий Петрович приходит к выводу, что для сравнительно коротких балок учет сдвига и инерции поворота уменьшает не только усилие удара, а и снижает интенсивность напряжений

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau_{xy}^2}$$

в сечении удара, поскольку касательное напряжение τ_{xy} пропорционально силе удара.

При рассмотрении упругого удара тела по прямоугольной пластине длиной a и шириной b , кроме классического уравнения изгиба:

$$\frac{\partial^4 y_1}{\partial \xi^4} + 2\mu_1^2 \frac{\partial^4 y_1}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \mu_1^4 \frac{\partial^4 y_1}{\partial \eta^4} + \frac{\rho h a^4}{D} \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} = \frac{a^4}{D} q(\xi, \eta, t),$$

А.П. Филиппов использовал и волновые уравнения [6]:

$$K'G \left(\frac{\partial^2 y_1}{\partial \xi^2} + \mu_1^2 \frac{\partial^2 y_1}{\partial \eta^2} - a^2 \psi \right) = \rho a^2 \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} - \frac{a^2}{h} q(\xi, \eta, t);$$

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial \xi^2} + \mu_1^2 \frac{\partial^2 y_1}{\partial \eta^2} - a^2 \psi = -\frac{D}{K'G h} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \mu_1^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} \right) + \frac{\rho h^2 a^2}{12K'G} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}.$$

В них $\mu_1 = a/b$; h – толщина пластины; D – ее цилиндрическая изгибная жесткость; y_1, ψ – прогиб и функция сдвига; $q(\xi, \eta, t)$ – интенсивность ударной нагрузки; ξ, η – текущие безразмерные координаты; ξ_1, η_1 – безразмерные координаты центра области локализации ударной нагрузки.

Полагая интенсивность ударной нагрузки независимой от ξ и η в круговой области контакта, а края пластины: $\xi = \eta = 0$ и $\xi = \eta = 1$ свободно опертыми, Анатолий Петрович получил выражения прогибов тонкостенного тела в виде:

$$y_1(\xi, \eta, \xi_1, \eta_1, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t P(t_1) f_{mn}(t-t_1) dt_1 \right] \sin(m\pi \xi_1) \times$$

$$\times \sin(n\pi \eta_1) \cdot \sin(m\pi \xi) \cdot \sin(n\pi \eta), \quad (9)$$

где функция $f_{mn}(t-t_1)$ зависит от уравнений динамического изгиба пластины, а также от индексов суммирования m и n .

При численном решении уравнения (4) с учетом (9), усилие $P(t)$, на каждом участке разбиения временного интервала, как прежде, аппроксимировалось линейной зависимостью (6).

Радиус области приложения силы $P(t)$ менялся в ходе удара. Его значение определяли по формуле

$$r_0(t) = \left(\frac{PR_u}{K_u} \right)^{1/3}, \quad (10)$$

вытекающей из решения контактной задачи о вдавлении шара в упругое полупространство.

В формуле (10): $K_u^{-1} = \frac{3}{4} \left(\frac{1-\nu_u^2}{E_u} + \frac{1-\nu^2}{E} \right)$, R_u – радиус падающего шара;

E_u, ν_u – его модуль упругости и коэффициент Пуассона; E, ν – механические характеристики материала пластины.

Поскольку сила $P(t)$ прикладывалась по площадке конечных размеров (не в точке), то, в отличие от теории неупругого удара, появилась возможность, кроме прогибов, вычислять изгибающие моменты и напряжения в тонкостенном теле.

Чтобы избежать неоправданных затрат времени на численное суммирование двойных рядов медленной сходимости, Анатолий Петрович выделил их из решения, а затем, следуя С.П. Тимошенко [7], представил суммы этих рядов в замкнутом виде. В результате такого преобразования при вычислении изгибающих моментов были использованы выражения:

$$M_{1,2} = \frac{P(t)}{8\pi} \left\{ (1+\nu) \left[2 \ln \frac{2a \sin(\pi \xi_1)}{\pi r_0(t)} + (\lambda - 2) \right] \pm \mu(1-\nu) \right\},$$

в которых λ и μ зависят от значения ξ_1 .

Согласно таблицам в [7] при $\xi_1 = 0,5$; $a = b$: $\lambda = 2,669$, $\mu = 0$.

Так, при учете местных деформаций, удалось рассчитать и напряженное состояние пластины.

Приводим некоторые из численных результатов работы [6].

На рис. 9 и рис. 10 нанесены графики силы удара, прогибов и изгибных напряжений в центре стальной квадратной пластины, полученные при $a = b = 60$ см; $h = 1,2$ см; $\xi_1 = \eta_1 = 0,5$. Стальной шар массой $M = 14,7$ кг падал на пластину с высоты $H = 26$ см.

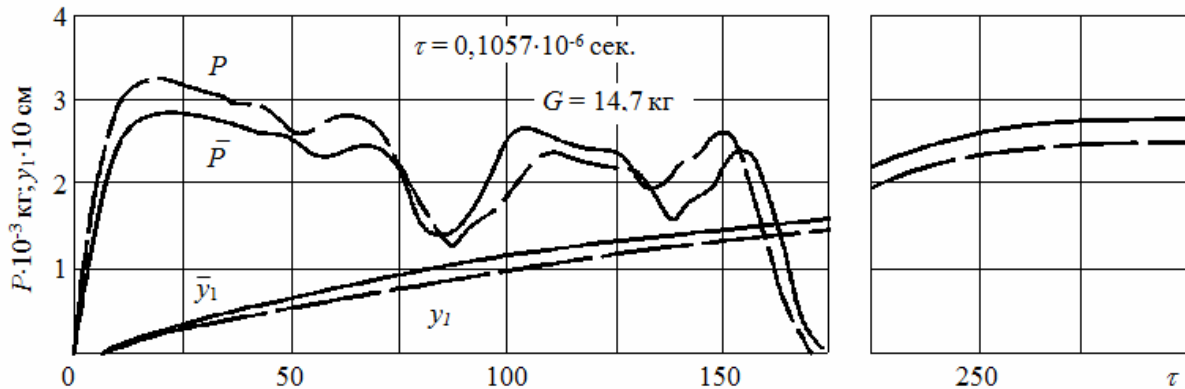


Рис. 9. Усилие удара и прогибы пластины

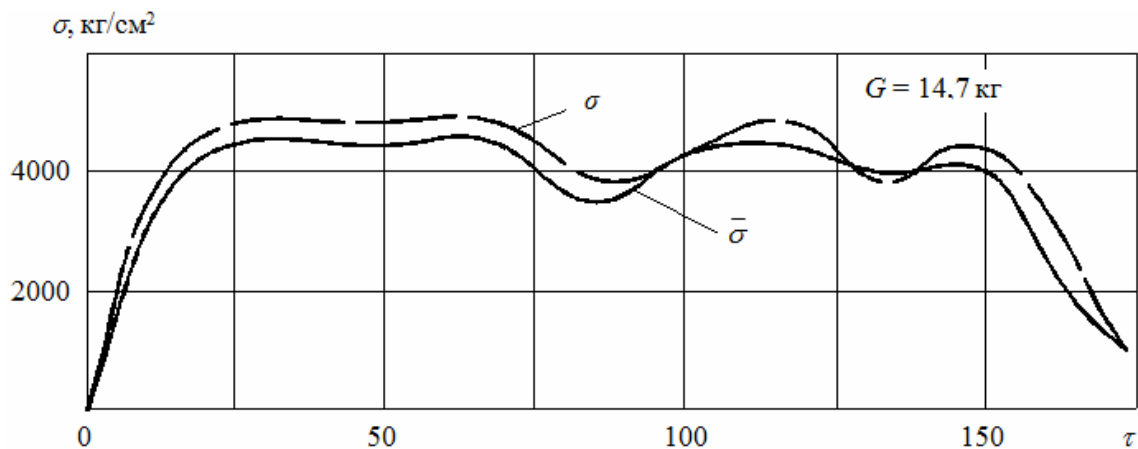


Рис.10. Изгибные напряжения в пластине

Сплошной линией представлены результаты, которым приводит волновая теория изгиба пластины, а пунктирной – неволновая.

Как видно из рисунков, максимальное значение силы удара приблизительно на 20% меньше, тогда как прогибы пластины больше, чем полученные по классической теории Кирхгофа. Интенсивность напряжений σ_i при учете волновых процессов снижается, что объясняется уменьшением силы удара.

При рассмотрении упругого удара шара по круглой пластине Анатолий Петрович решает осесимметричные задачи колебаний, с учетом и без учета волновых процессов, и сравнивает результаты. При уточненной постановке задачи прогиба пластины определяет, решая систему уравнений [8]:

$$\begin{aligned} (y_1' r)' - (\psi r)' &= \frac{r}{K' G h} (h \rho \ddot{y}_1 - q); \\ (r \psi')' - \psi \left(\frac{1}{r} + \frac{K' G h}{D} \right) &= \frac{J}{D} \ddot{\psi} r - \frac{K' G h}{D} r y_1'. \end{aligned} \quad (11)$$

В ней $\psi = \psi(r, t)$ – функция сдвига; $q = q(r, t)$ – поперечная локально распределенная нагрузка, интеграл от которой по области локализации равен $P(t)$; $K' = 2/3$; $J = \rho h^3 / 12$; r – радиальная координата; штрихом обозначены производные по r , а точкой – по t ; остальные обозначения имеют прежний смысл.

Решение системы (11) разлагает в ряды:

$$y_1(\xi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n [P(t), M_*(t)] J_0(s_n \xi); \quad \psi(\xi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n [P(t), M_*(t)] J_1(s_n \xi), \quad (12)$$

где $\xi = r a^{-1}$; a – радиус пластины; $J_0(z)$, $J_1(z)$ – функции Бесселя индексов нуль и единица; s_n – корни уравнения; $J_0(s) = 0$, поэтому $y(1, t) = 0$.

Множители A_n, B_n в (12) зависят от компенсирующего изгибающего момента $M_*(t)$, приложенного по краю пластины $\xi = 1$. Если край защемлен, то $M_*(t)$ должен быть таким, чтобы $\left. \frac{\partial y_1}{\partial r} \right|_{r=a} = 0$. В случае свободно-опертой пластины $M_*(t)$ должен

приводить к равенству нулю изгибающего момента M_r на контуре $\xi = 1$. И так, реализуется метод компенсирующих нагрузок.

Подстановка (12) в (4) приводит к интегральному уравнению, которое решают численно, разбивая период основного тона колебаний пластины на 900 частей.

По сравнению с балкой, расчет усложняется, поскольку на каждом шаге разбиения, кроме $P(t)$, приходится вычислять и $M_*(t)$.

Затраты компьютерного времени на вычисление сумм рядов по n сокращаются, вследствие использования выражений [8]:

$$\sum_n \frac{J_0(s_n x)}{s_n J_1(s_n)} = \frac{1}{2}, \quad (0 \leq x \leq 1), \quad \sum_n \frac{J_1(s_n x)}{s_n^2 J_1(s_n)} = \frac{x}{4}, \quad \sum_n \frac{J_1(s_n x)}{s_n^3 J_1^2(s_n)} = \frac{1}{8} (x - 2x \ln x),$$

$$\sum_n \frac{J_0(s_n x)}{s_n^3 J_1(s_n)} = \frac{1}{8}(1-x^2), \quad \sum_n \frac{J_0(s_n x)}{s_n^4 J_1^2(s_n)} = \frac{1}{8}(1-x^2 + x^2 \ln x), \quad (13)$$

$$\sum_n \frac{J_1(s_n x)}{s_n^4 J_1(s_n)} = \frac{x}{16} \left(1 - \frac{x^2}{2}\right), \quad \sum_n \frac{J_1(s_n x)}{s_n^5 J_1^2(s_n)} = \frac{x}{16} \left(x - \frac{5}{8}x^2 + \frac{x^2}{2} \ln x\right).$$

Отметим, что большинство из сумм рядов Фурье-Бесселя в (13) получено Анатолием Петровичем впервые. Лишь часть из них есть в известной литературе по специальным функциям [9,10].

При решении задачи удара в упрощенной постановке коэффициенты разложения (12) он находил из уравнения [8]

$$\Delta \Delta y_1 + \frac{\rho h}{D} \ddot{y}_1 = \frac{1}{D} q(r, t),$$

в котором $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$.

На рис. 11-14 представлены графики силы $P(t)$, прогиба $y_1(t)$ и напряжения $\sigma(t)$, вычисленные в центре пластины радиуса $a = 28,7$ см, подверженной удару стального шара, который падает с высоты $H = 26$ см.

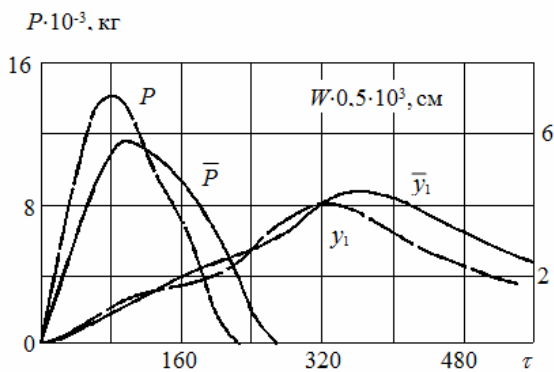


Рис. 11. Усилия удара и прогибы при $M=17,8$ кг

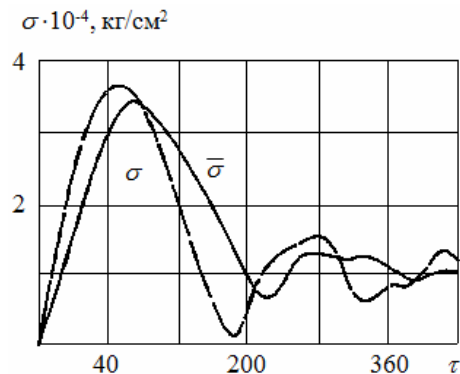


Рис. 12. Напряжения при $M=17,8$ кг

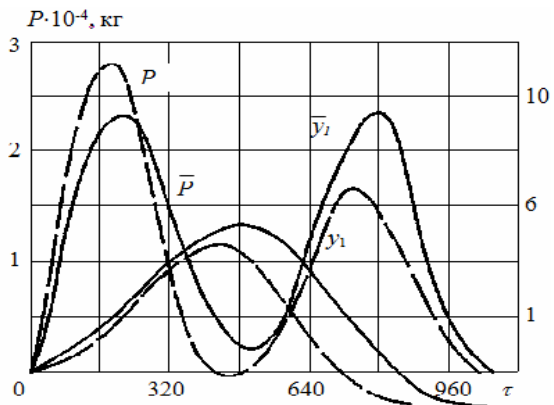


Рис.13. Усилия удара и прогибы при $M=33$ кг

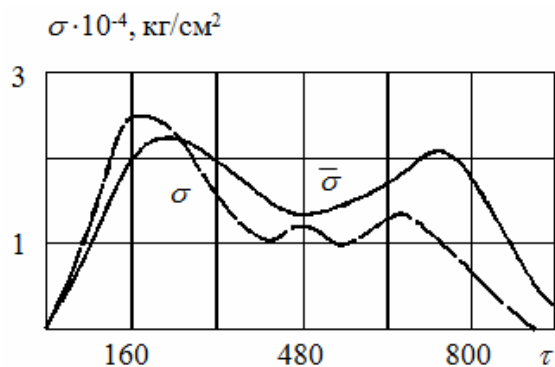


Рис. 14. Напряжения при $M=33$ кг

Результаты на рис. 11,12 соответствуют массе шара $M = 17,8$ кг и толщине $h = 3$ см. Результаты на рис. 13,14 получены при $M = 33$ кг и $h = 5$ см.

Сплошные линии относятся к случаю удара с учетом волновых процессов, а пунктирные – без учета этих процессов.

Расчеты показали, что учет сдвига и инерции поворота в пластине приводит к снижению максимума силы удара и напряжений, по сравнению с расчетными величинами, полученными из неволнового уравнения. Величина прогиба, как и следовало ожидать, несколько выше для волнового уравнения.

В послевоенные годы в СССР, как и за рубежом, с целью уменьшения веса изгибаемых тонкостенных элементов конструкций, начали применять трехслойные пакеты, в которых внешние слои (обшивки) выполняли из металла, а средний слой (заполнитель) изготавливали из искусственных легких низко модульных материалов. Такие тонкостенные конструкции имели высокую изгибную жесткость при действии равномерно распределенных нагрузок, но их поведение при локальном механическом ударе было неизвестно. Поэтому по инициативе и под руководством Анатолия Петровича были проведены соответствующие исследования в кандидатской диссертации [11]. Они позволили установить следующие особенности. Вследствие наличия низко модульного заполнителя, прогиб обшивки под локальной нагрузкой больше прогиба ненагруженной обшивки. Поэтому при ударе нужно учитывать поперечную сжимаемость тонкостенного тела, которая без учета сил инерции пропорциональна силе удара. В результате функциональное уравнение удара свелось к следующему [12]:

$$v_0 t - \frac{1}{M_0} \int_0^t dt \int_0^t P(t) dt = y_1(t) + K_1 P^n + K_2 P. \quad (14)$$

В нем $y_1(t)$ – прогиб срединной поверхности тонкостенного тела в центре области удара; $K_1 P^n$ – величина совместных контактных деформаций ударяющегося тела и обшивки; $K_2 P$ – поперечное обжатие трехслойной балки или пластины.

Учет поперечного обжатия снижает максимум силы удара при прочих равных условиях.

Уравнение изгиба трехслойной балки – полосы более громоздкие, чем волновые уравнения изгиба однородной балки. В них приходится учитывать сдвиг и инерцию поворота в заполнителе. Например, определение $y_1(t)$ при ударе по балке симметричного строения сводится к решению системы [13]

$$\begin{aligned} b_1 \frac{\partial^3 y_1}{\partial x^3} + b_2 \frac{\partial^3 y_1}{\partial x \partial t^2} + b_3 \frac{\partial y_1}{\partial x} + b_4 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + b_5 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - b_3 \psi = 0; \\ c_1 \frac{\partial^4 y_1}{\partial x^4} + c_2 \frac{\partial^4 y_1}{\partial x^2 \partial t^2} - b_3 \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} + c_3 \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} + b_1 \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + \\ + b_2 \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial t^2} + b_3 \frac{\partial \psi}{\partial x} = -P(t) \delta(x - x_1). \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь $b_1 = -E_1 h \delta^2$; $b_2 = \rho_1 h \delta^2$; $b_3 = -2K'G h$; $b_4 = -\frac{2}{3} E h^3 - 2E_1 h^2 \delta$; $b_5 = \frac{2}{3} \rho h^3 + 2\rho_1 h^2 \delta$; $c_1 = -\frac{2}{3} E_1 \delta^3$; $c_2 = \frac{2}{3} \rho_1 \delta^3$; $c_3 = -2(\rho h + \rho_1 \delta)$; E, ρ – модуль упругости и плотность материала заполнителя; ρ_1 – плотность материала не-

сущих слоев; K' – коэффициент неравномерности сдвига в заполнителе; $\psi(x, t)$ – функция поворота плоских сечений заполнителя; δ – толщины обшивок; $2h$ – толщина заполнителя.

При свободном опирании торцов балки система (15) позволила определить $A_n(t)$ и $B_n(t)$ в рядах [13]:

$$y_1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}; \quad \psi = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) \cos \frac{n\pi x}{l}. \quad (16)$$

Интегральное уравнение (14), после подстановки в него (16), решали численно, используя аппроксимацию (6).

Сходимость рядов (16) достаточная, чтобы вычислить и напряжения в несущих слоях и заполнителе.

Используя (14), (16) проводили расчеты центрального поперечного удара стального шара радиуса $R_{ш} = 1$ см с начальной скоростью $v_0 = 1,4$ м/сек по трехслойной полосе с размерами $l = 30$ см; $2hl^{-1} = 0,053$; $\delta h^{-1} = 0,2$. Материалом несущих слоев полосы служил алюминий. В качестве заполнителя рассматривались материалы ПХВ ($E = 5 \cdot 10^8$ Па; $\nu = 0,4$; $\rho = 0,5 \cdot 10^3$ кг/м³) и ЭК ($E = 25 \cdot 10^8$ Па; $\nu = 0,4$; $\rho = 1,5 \cdot 10^3$ кг/м³).

Коэффициент $K_2 = 5,27 \cdot 10^{-8}$ м/н для заполнителя ПХВ и $K_2 = 1,19 \cdot 10^{-8}$ м/н – для заполнителя ЭК. Коэффициенты K_1 и n определяли по теории Г. Герца.

В табл. 1, заимствованной из [13], приведены максимальные величины: усилия $P(t)$, Н и время его достижения сек., прогиб y_1 , см и напряжения $\sigma_3, \tau_3, \sigma_i$, Па – в заполнителе и σ_n , Па – в обшивках.

Таблица 1

Результаты расчета удара по трехслойной и однородной балке-полосе

Материал заполни- теля	P	$t \cdot 10^6$	$y_1 \cdot 10^2$	$\sigma_3 \cdot 10^{-5}$	$\tau_3 \cdot 10^{-5}$	$\sigma_i \cdot 10^{-5}$	$\sigma_n \cdot 10^{-5}$
ПХВ	260	128	5,13	1,61	5,13	8,96	366,2
ЭК	541	36	3,46	10,84	14,20	25,00	351,9
Алюминий	1172	36	2,20	309,80	27,30	310,50	309,8

Для сравнения в последней строке табл. 1 записаны результаты расчета удара по однородной алюминиевой балке с учетом сдвига и инерции поворота.

Низкомодульный заполнитель уменьшает максимум усилия удара, но при этом увеличиваются максимальные прогибы балки.

В случае трехслойной балки с разными материалами обшивок, ее изгиб описывается системой трех дифференциальных уравнений.

Для трехслойной пластины такая система имеет вид [14]

$$\begin{aligned} a_1 \nabla^2 \nabla^2 \omega + a_2 \nabla^2 \ddot{\omega} + a_3 \nabla^2 R + a_4 \ddot{R} + a_5 \nabla^2 \Omega + a_6 \ddot{\Omega} &= 0; \\ b_1 \nabla^2 \nabla^2 \omega + b_2 \nabla^2 \ddot{\omega} + b_3 \nabla^2 \omega + b_4 \nabla^2 R - b_3 R + b_5 \ddot{R} - a_3 \nabla^2 \Omega - a_4 \ddot{\Omega} &= 0; \end{aligned} \quad (17)$$

$$c_1 \nabla^2 \nabla^2 \omega + c_2 \nabla^2 \ddot{\omega} - b_3 \nabla^2 R + a_6 \ddot{\omega} + b_2 \nabla^2 R + b_2 \ddot{R} + b_3 R - a_1 \nabla^2 \Omega - a_2 \ddot{\Omega} = -P(x, y, t).$$

$$\text{Здесь } \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad R = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad \Omega = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \phi, \psi - \text{ функции по-}$$

ворота плоских сечений заполнителя; u, v, ω – горизонтальные и вертикальные перемещения точек срединной плоскости заполнителя, являющейся координатной плоскостью xoy ; P – внешняя нагрузка, направление действия которой совпадает с направлением оси oz .

Коэффициенты уравнения (17) выражаются через параметры пластины по формулам:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2}(E_2 \delta_2^2 - E_1 \delta_1^2); \quad a_2 = \frac{1}{2}(\rho_1 \delta_1^2 - \rho_2 \delta_2^2); \quad a_3 = h(E_2 \delta_2 - E_1 \delta_1); \\ a_4 &= h(\rho_1 \delta_1 - \rho_2 \delta_2); \quad a_5 = 2Eh + E_1 \delta_1 + E_2 \delta_2; \quad b_2 = \frac{1}{2}h(\rho_1 \delta_1^2 + \rho_2 \delta_2^2); \\ a_6 &= -(2\rho h + \rho_1 \delta_1 + \rho_2 \delta_2); \quad b_1 = -\frac{1}{2}h(E_1 \delta_1^2 + E_2 \delta_2^2); \quad b_3 = -2Gh; \\ b_4 &= -h^2 \left(\frac{2}{3}Eh + E_1 \delta_1 + E_2 \delta_2 \right); \quad b_5 = h^2 \left(\frac{2}{3}\rho h + \rho_1 \delta_1 + \rho_2 \delta_2 \right); \\ c_1 &= -\frac{1}{3}(E_1 \delta_1^3 + E_2 \delta_2^3); \quad c_2 = \frac{1}{3}(\rho_1 \delta_1^3 + \rho_2 \delta_2^3); \quad E_i = \frac{E'_i}{1 - \nu_i^2} \quad (i=1,2), \end{aligned}$$

где E'_i, ν_i и ρ_i – модули упругости, коэффициенты Пуассона и плотности материалов верхней ($i=1$) и нижней ($i=2$) обшивок толщины δ_i ; E', ν и ρ – модуль упругости, коэффициент Пуассона и плотность материала заполнителя толщиной $2h$.

Для прямоугольной пластины, опертой по краям: $x=0; l_1$ и $y=0; l_2$, решение системы (17) разлагали в двойные ряды:

$$\begin{aligned} y_1 = \omega &= \sum_{m,m=1}^{\infty} \sum A_{mn}(t) \sin \alpha_1 x \sin \alpha_2 y; \quad R = \sum_{m,m=1}^{\infty} \sum B_{mn}(t) \sin \alpha_1 x \sin \alpha_2 y; \\ \Omega &= \sum_{m,m=1}^{\infty} \sum C_{mn}(t) \sin \alpha_1 x \sin \alpha_2 y; \quad \alpha_1 = \frac{m\pi}{l_1}; \quad \alpha_2 = \frac{n\pi}{l_2}. \end{aligned}$$

Усилие удара, как прежде, определяли, численно решая уравнение (14). При этом исследовалось влияние геометрической несимметрии ($E_1 = E_2, \delta_1 \neq \delta_2$), а также физической ($E_1 \neq E_2, \delta_1 = \delta_2$) на протекание процесса удара.

Выполнен расчет двух вариантов центрального удара стального шара радиуса 2 см по геометрически несимметричной пластине с начальной скоростью удара $v_0 = 2$ м/сек. Геометрические размеры пластины принимались следующими: $\delta_1 = 2\delta_2 = 0,2$ см; $2h = 2$ см; $l_1 = l_2 = 40$ см. Материалом заполнителя выбирался полиматериал типа ПХВ ($E = 5 \cdot 10^8$ Па; $\nu = 0,4$; $\rho = 0,5$ кг/м³), материалом обшивок – алюминий.

Удар в первом варианте осуществлялся по обшивке толщиной δ_1 , во втором — по обшивке толщиной δ_2 .

Так как значения коэффициента k_2 , были разными (в первом варианте $k_2 = 1,61 \cdot 10^{-8}$ м/н, во втором $k_2 = 2,63 \cdot 10^{-8}$ м/н), существовало различие и в полученных процессах удара. Максимальные расчетные значения усилия P , усредненного прогиба y_1 , локального сжатия $k_2 P$, контактного сближения $k_1 P^{2/3}$ и время достижения максимального усилия t_m приведены в табл. 2.

Таблица 2

Результаты расчета удара по трехслойной и монолитной пластинам

Материал заполнителя		P , н	$y_1 \cdot 10$, см	$k_2 P \cdot 10^2$, см	$k_1 P^{2/3} \cdot 10^2$, см	$t_m \cdot 10^6$, сек
ПХВ	1	2393	0,280	0,385	0,360	140
	2	2189	0,280	0,576	0,339	150
	3	3047	0,231	0,350	0,274	145
	4	2637	0,229	0,459	0,384	165
Сталь		13913	0,050	–	0,755	60
Алюминий		9061	0,110	–	0,848	80

Влияние механических свойств слоя, вступающего в контакт с ударяющим телом, исследовалось на примере удара по физически несимметричной пластине. Материалом одной из обшивок одинаковой толщины, равной 0,2 см, вместо алюминия выбиралась сталь. Остальные параметры сохранялись прежними. При этом $k_1 = 1,30 \cdot 10^{-7}$ м/н^{2/3}; $k_2 = 1,15 \cdot 10^{-8}$ м/н в случае удара по стальной обшивке (третий вариант); $k_1 = 2,01 \cdot 10^{-7}$ м/н^{2/3}; $k_2 = 1,74 \cdot 10^{-8}$ м/н при ударе по алюминиевой обшивке (четвертый вариант).

Как видно, удар по монолитной стальной и алюминиевой пластинам (2,3 x 40 x 40 см), полученный с учетом сдвига и инерции поворота, существенно отличается от удара по пластинам с заполнителем таких же внешних размеров.

Учитывая возможность использования в заполнителе низкоимпульсных материалов с повышенными вибропоглощающими свойствами, в [15] исследовано влияние рассеяния энергии в заполнителе на протекание процесса удара. По гипотезе Е.С. Сорокина оно учитывалось введением комплексного модуля сдвига.

Удар шара по трехслойной пластине симметричного строения с учетом местных деформаций рассматривался также в [14], где отмечено уменьшение максимума силы удара, но увеличение ее прогибов по сравнению с однородной пластиной, изготовленной из материала обшивки.

А.П. Филиппову удалось решить одну из сложнейших динамических задач, когда деформирование тела, подвергнутого удару происходит за пределами упругости. Используя численные методы, он определил не только силу удара и прогиб, как функции времени, а также установил как меняется во времени зона пластичности [17].

При решении задачи он использовал теорию малых упруго-пластических деформаций А.А. Ильюшина и закон линейного упрочнения. В частности, для стержня зависимость напряжений σ от деформаций ϵ в поперечном сечении представлялась выражением:

$$\sigma = Ee \left(1 - \lambda \frac{e - e_s}{e} \right),$$

в котором, $e \geq e_s$, $\lambda = (E - E_1) / E_1$, E – модуль упругости материала балки или пластины; E_1 – модуль упрочнения; e_s – граничное значение упругой деформации, которой соответствует граничное напряжение $\sigma_s = E e_s$; $e = z \cdot \chi$; z – расстояние от волокна до нейтральной линии, имеющей кривизну χ .

В области упругих деформаций: $e \leq e_s$, $\lambda = 0$.

Уравнение изгиба стержня при наличии зоны пластичности имело вид

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = q(x, t) - \frac{\partial^2 M_s}{\partial x^2}, \quad (18)$$

где EJ – изгибная, жесткость; ρF – погонная масса; $q(x, t)$ – поперечная нагрузка; $M_s = M_s(x, t)$ – дополнительный момент, вызванный появлением зоны пластичности.

В случае стержня прямоугольного поперечного сечения шириной b и высотой h этот момент выражается соотношением [17]

$$M_s = \lambda \frac{bh^2}{6} \sigma_s \left(-\frac{3}{2} + \frac{h}{2\eta} + \frac{2\eta^2}{h^2} \right),$$

в котором $e_s = \eta \chi$; $\eta = z_s(x, t)$ – расстояние от нейтральной линии до границы области пластичности.

При шарнирном опирании краев стержня $x = 0$ и $x = l$ решение уравнения (18) разлагали в ряд

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} R_i(t) \sin \frac{i\pi x}{l},$$

где

$$R_i(t) = \frac{2}{\rho F l \omega_i} \int_0^t [H_{1i}(t_1) + H_{2i}(t_1)] \sin \omega_i (t - t_1) dt_1, \quad H_{1i}(t) = \int_0^l q(x, t) \sin \frac{i\pi x}{l} dx;$$

$$H_{2i}(t) = -\lambda \frac{bh^2}{\sigma} \sigma_s \int_0^l \frac{\partial^2 \Omega(\eta)}{\partial x^2} \sin \frac{i\pi x}{l} dx; \quad \Omega(\eta) = -\frac{3}{2} + \frac{h}{2\eta} + \frac{2\eta^2}{h^2}; \quad \omega_i^2 = i^4 \pi^4 \frac{EJ}{\rho F}.$$

Таким образом, $H_{2i}(t)$ (или M_s) были фиктивной дополнительной нагрузкой на стержень. Ее определяли численно на каждом шаге τ , который получали делением периода колебаний $T = 2\pi \omega_1^{-1}$ на $2n$ частей.

В ходе расчетов учитывалась и возможность разгрузки материала.

Эта теория была обобщена на случай прямоугольной пластины, изгиб которой описывали уравнением:

$$D\Delta\Delta w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x, y, t) - \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} (\lambda \Omega_1 M_x) + 2(1-\nu) \times \right. \\ \left. \times \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\lambda \Omega_1 M_{xy}) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\lambda \Omega_1 M_y) \right].$$

Здесь

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \quad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \\ M_{xy} = -D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \quad \Omega_1 = (2\zeta - 1)^2 (\zeta + 1); \quad E = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)};$$

ζ – безразмерное (поделенное на $h/2$) расстояние от зоны пластичности до срединной поверхности; ν – коэффициент Пуассона.

Результаты компьютерных расчетов, при $\lambda = 0,97$ для балок и $\lambda = 0,95$ для пластин, представлены в табл. 3.

Таблица 3

№	Размеры, см	G = Mg, кг	H, см	P _{max} , кг	Максимальное перемещение, см	σ , кг/см ²	σ_{i1} , кг/см ²	η_{min} , см	t для η_{min} , сек.	l _s , см
1	Брус h = 5,08; l = 80; b = 2,54	1,78	180	12300	0,268	4508	2463	1,07	0,0015	17,6
2	Брус h = 5,08; l = 80; b = 2,54	6,32	180	16124	0,642	9605	2616	0,5	0,0015	20,2
3	Брус h = 4; l = 80; b = 2,54	1,78	180	11655	0,381	7800	2552	0,61	0,0021	14,4
4	Пластин h = 5; a = 60; b = 60	33,05	245	90534	0,1707	11246	2848	0,5034	0,002799	28
5	Пластин h = 3; a = 60; b = 60	18	50	1854,2	0,1291	5677	2560	0,63	0,002194	12

Анализ численных результатов показывают, что учет пластичности значительно уменьшает напряжение в ударяемом теле ($\sigma_{i1} < \sigma$). Зона пластичности простирается

на несколько толщин h , а при большой массе ударяющегося тела (вариант 4) $2I_s$ даже соизмеримо с длиной пластины a . Зона пластичности проникает на значительную глубину по высоте балки или пластины ($\eta_{\min} < h/4$), причем размеры зоны меняются в ходе удара. Эти изменения показаны графически в [17].

Выводы. Итак, проводя исследования в области упругого удара Анатолий Петрович развивал теорию С.П. Тимошенко. Он изучил влияние сдвига и инерции поворота сечений на протекание процесса удара, а также впервые вычислил напряжения в ударяемом теле, что вызвало интерес к его работам в промышленности. В связи с этим он выполнял расчеты прочности тонкостенных тел на удар по заказам КБ и НИИ. Под его руководством было также создано специальное оборудование для экспериментальной проверки результатов в теории удара. Он, раньше других, увидел актуальность динамических расчетов слоистых элементов конструкций на удар и первым в СССР провел такие расчеты. Наконец, используя ЭВМ сравнительно небольшого быстродействия, он численно решил сложнейшие задачи поперечного удара шара по балке и пластине, с учетом пластических деформаций в ударяемом теле.

Вычисляя коэффициент динамичности в балках по напряжениям, Анатолий Петрович установил, что он значительно отличается от коэффициента динамичности по прогибам. Поэтому был сделан вывод, что коэффициент динамичности по прогибам нельзя использовать для вычисления максимальных динамических напряжений. Его использование приводит к существенным погрешностям расчета. Но этот радикальный вывод академика А.П. Филиппова пока остается без должного внимания, по крайней мере в учебной литературе.

Литература: 1. Тимошенко С.П. *Колебания в инженерном деле* / С.П. Тимошенко. – М.: Физматгиз, 1959. – 439 с. 2. Филиппов А.П. *Численные методы в прикладной теории упругости* / А.П. Филиппов и др. – К.: Наукова думка, 1968. 3. Потележко В.П. *Контактная задача для плиты, лежащей на упругом основании* / В.П. Потележко, А.П. Филиппов // *Прикладная механика*. – 1967. – Т. 5. – Вып. 1. 4. Филиппов А.П. *Колебания механических систем* / А.П. Филиппов. – К.: Наукова думка, 1965. – 716 с. 5. Филиппов А.П. *Поперечный удар по стержню при учете инерции вращения и сил перерезывания* / А.П. Филиппов, В.А. Скляр // *Прикладная механика*. – 1968. – Т. 6. – Вып. 7. 6. Филиппов А.П. *Колебания деформируемых систем* / А.П. Филиппов. – 2-е изд. – М.: Машиностроение, 1970. – 734 с. 7. Тимошенко С.П. *Пластинки и оболочки* / С.П. Тимошенко, С. Кригер-Войновский. – М.: Наука, 1966. – 636 с. 8. Филиппов А.П. *Поперечный упругий удар тяжелым телом по круглой плите* / А.П. Филиппов // *Известия АН СССР. – МТТ*. – 1971. – № 6. – С. 102-109. 9. Беймен Г. *Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя. Функции параболического цилиндра. Ортогональные многочлены* / Г. Беймен, А. Эрдейи. – М.: Наука, 1966. – 295 с. 10. Прудников А.П. *Интегралы и ряды* / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев // *Специальные функции: в 3-х томах*. – М.: Физматгиз, 2003. – Т. 2. – 663 с. 11. Ольшанский В.П. *Колебания трехслойных балок и пластин при упругом ударе: автореф. дисс. на соискание ученой степени канд. техн. наук; 01.025* / В.П. Ольшанский. – Х., 1971. – 19 с. 12. Филиппов А.П. *О численном решении функционального уравнения упругого удара для трехслойных пластин* / А.П. Филиппов, В.П. Ольшанский // *Строительная механика корабля*. – Ленинград: Судостроение, 1970. – Вып. 149. 13. Ольшанский В.П. *Колебания трехслойной балки-полосы при ударе* / В.П. Ольшанский, А.П. Филиппов // *Прикладная механика*. – 1970. – Т. 6. – Вып. 12. – С. 92-96. 14. Ольшанский В.П. *Деформации несимметричной трехслойной пластины с заполнителем при ударе* / В.П. Ольшанский, А.П. Филиппов // *Прикладная механика*. – 1971. – Т. 7. – Вып. 3. – С. 54-57. 15. Ольшанский В.П. *О расчете на удар трехслойных пластин и балок с вязко-упругим заполнителем* / В.П. Ольшанский, А.П. Филиппов // *Строительная механика и расчет сооружений*. – 1970. – № 6. 16. Ольшанский В.П. *Про стіудар кулі з тришаровою пластиною* / В.П. Ольшанський, А.П. Філіпов // *Розрахунок металевих та залізобетонних оболонок: кн.* – Харків: ХДУ, 1972. – С. 128-134. 17. Филиппов А.П. *Действие ударных и импульсивных нагрузок на стержни и пластины с учетом упруго-*

пластической области деформирования // А.П. Филиппов // Избранные проблемы прикладной механики (к 60-летию акад. В.Н. Челомея): кн. – М.: Наука, 1974. – С. 691-699.

Bibliography (transliterated): 1. Timoshenko S.P. *Kolebanija v inzhenernom dele* / S.P. Timoshenko. – М.: Fizmatgiz, 1959. – 439 s. 2. Filippov A.P. *Chislennye metody v prikladnoj teorii uprugosti* / A.P. Filippov i dr. – К.: Naukova dumka, 1968. 3. Potelezhko V.P. *Kontaktная задача длia плиты, lezhawej na uprugom osnovanii* / V.P. Potelezhko, A.P. Filippov // *Prikladnaja mehanika*. – 1967. – Т. 5. – Вып. 1. 4. Filippov A.P. *Kolebanija mehanicheskikh sistem* / A.P. Filippov. – К.: Naukova dumka, 1965. – 716 s. 5. Filippov A.P. *Poperechnyj udar po sterzhnju pri uchete inercii vrawenija i sil pererezyvanija* / A.P. Filippov, V.A. Skljар // *Prikladnaja mehanika*. – 1968. – Т. 6. – Вып. 7. 6. Filippov A.P. *Kolebanija deformiruemykh sistem* / A.P. Filippov. – 2-e izd. – М.: Mashinostroenie, 1970. – 734 s. 7. Timoshenko S.P. *Plastinki i obolochki* / S.P. Timoshenko, S. Kriger-Vojnovskij. – М.: Nauka, 1966. – 636 s. 8. Filippov A.P. *Poperechnyj uprugij udar tjazhelym telom po krugloj plite* / A.P. Filippov // *Izvestija AN SSSR. – MTT*. – 1971. – № 6. – S. 102-109. 9. Bejmen G. *Vysshie transcendetnye funkcii. Funkcii Besselja. Funkcii parabolicheskogo cilindra. Ortogonal'nye mnogochleny* / G. Bejmen, A. Jerdeji. – М.: Nauka, 1966. – 295 s. 10. Prudnikov A.P. *Integraly i rjady* / A.P. Prudnikov, Ju.A. Brychkov, O.I. Marichev // *Special'nye funkcii: v 3-h tomah*. – М.: Fizmatgiz, 2003. – Т. 2. – 663 s. 11. Ol'shanskij V.P. *Kolebanija trehslojnykh balok i plastin pri uprugom udare: avtoref. diss. na soiskanie uchenoj stepeni kand. tehn. nauk; 01.025* / V.P. Ol'shanskij. – H., 1971. – 19 s. 12. Filippov A.P. *O chislennom reshenii funkcional'nogo uravnenija uprugogo udara dlja trehslojnykh plastin* / A.P. Filippov, V.P. Ol'shanskij // *Stroitel'naja mehanika korablja*. – Leningrad: Sudostroenie, 1970. – Вып. 149. 13. Ol'shanskij V.P. *Kolebanija trehslojnoj balki-polosy pri udare* / V.P. Ol'shanskij, A.P. Filippov // *Prikladnaja mehanika*. – 1970. – Т. 6. – Вып. 12. – S. 92-96. 14. Ol'shanskij V.P. *Deformacii nesimmetrichnoj trehslojnoj plastiny s zapolnitelem pri udare* / V.P. Ol'shanskij, A.P. Filippov // *Prikladnaja mehanika*. – 1971. – Т. 7. – Вып. 3. – S. 54-57. 15. Ol'shanskij V.P. *O raschete na udar trehslojnykh plastin i balok s vjazko-uprugim zapolnitelem* / V.P. Ol'shanskij, A.P. Filippov // *Stroitel'naja mehanika i raschet sooruzhenij*. – 1970. – № 6. 16. Ol'shanskij V.P. *Pro spivudar kuli z trisharovoju plastinoju* / V.P. Ol'shanskij, A.P. Filippov // *Rozrahnok metalevix ta zalizobetonnih obolonok: kn. – Harkiv: HDU, 1972. – S. 128-134*. 17. Filippov A.P. *Dejstvie udarnykh i impul'sivnykh nagruzok na sterzhni i plastiny s uchedom uprugoplasticheskoj oblasti deformirovanija* // A.P. Filippov // *Избранные проблемы прикладной механики (к 60-летию акад. В.Н. Челомея): кн. – М.: Наука, 1974. – С. 691-699.*

Ольшанський В.П.

ПРО ДОСЛІДЖЕННЯ А.П. ФІЛІПОВА В ТЕОРІЇ ПРУЖНОГО УДАРУ

Проведено аналітичний огляд публікацій академіка АН УРСР А.П. Філіпова з коливань балок і пластин при пружному ударі рухомим тілом. Відзначена новизна поставлених ним задач удару, особливості розроблених методів їх розв'язання, наукова та практична значимість отриманих результатів.

Ольшанский В.П.

ОБ ИССЛЕДОВАНИЯХ А.П. ФИЛИППОВА В ТЕОРИИ УПРУГОГО УДАРА

Проведен аналітичний огляд публікацій академіка АН УРСР А.П. Філіпова в області коливань балок і пластин при пружному ударі рухомим тілом. Відзначена новизна поставлених ним задач удару, в особливості розроблених методів їх рішення, наукова та практична значимість отриманих результатів.

Olshanskii V.P.

ABOUT RESEARCH A.P. PHILIPPOV IN ELASTIC HIT THEORY

An analytical review of publications of Academician USSR A.P. Philipov on vibrations of beams and plates in elastic hit the moving body. Noted the novelty of the problems assigned to them impact, especially the developed methods to solve them, the scientific and practical significance of the results.