ПРИКЛАДНА МЕХАНІКА

УДК 618.514.01:517.977.5

Радиевский А. Е., канд. тех. наук

ВЫНУЖДЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА БЕЗ ДЕМПФИРОВАНИЯ С ДВУМЯ УПРАВЛЯЮЩИМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ

Введение. Маятник и маятниковые системы постоянно привлекали к себе внимание исследователей в различных областях математики, механики, физики и техники. В силу своей простоты маятник служил хорошей моделью для изучения сложных динамических процессов [1], что позволяло проводить экспериментальную проверку различных теоретически обнаруженных колебательных эффектов, значительно расширить область применения маятниковых моделей для математического описания колебательных процессов [2]. Одной из разновидностей многообразия моделей маятниковых систем является гармонический осциллятор. В настоящей работе исследуется линейная модель гармонического осциллятора без демпфирования с двумя управляющими воздействиями [3], как объекта управления (ОУ).

Цель работы. Целью настоящей работы является разработка математического обеспечения процедуры исследования вынужденного движения рассматриваемого ОУ.

Постановка и особенности задачи. Необходимо найти

$$\min J(u), J(u) = \int_{t_0}^{t_1} (xRx^m + mu^2)dt \tag{1}$$

при наличии ограничений

$$\frac{dx}{dt} = \mathrm{A}x + \mathrm{B}u\,;\; u \in U = \left| u : |u| \le u_{\max} \right|;\;\; x(t_0) = x_0, x(t_1) = 0\,,$$

где $x = (x_1, x_2)$-матрица-столбец вектора фазовых координат; u - управление, $u_{\max}$ - заданное число; $R = diag\|r_i\|_1^2$; m -число; t_1-конечный, не фиксированный момент времени; т -транспонирование; $\mathrm{A} = \|\mathrm{a}_{\mathrm{ij}}\|_1^2$, $a_{11} = a_{22} = 0$, $a_{12} = \omega$, $a_{21} = -\omega$, корни характеристического уравнения $\lambda_i = \pm j\omega$, $i \in [1,2]$; $\mathrm{B} = \|b_{j1}\|_1^2$, $b_{11} = b_{21} = k$.

Структурный синтез. Алгоритм управления (АУ) получим в виде [4]

$$u(t) = \begin{cases} u_{\max} & при \quad u(t) \ge u_{\max} \\ u(t) & при \quad -u_{\max} < u(t) < u_{\max} \\ -u_{\max} & при \quad u(t) \le -u_{\max} \end{cases}. \tag{2}$$

Для открытой области получим:

$$\begin{vmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -k\left[u_1^1(t)(r_1/m)x_1(t_0) + u_1^2(t)(r_2/m)x_2(t_0)\right] \\ -k\left[u_2^1(t)(r_1/m)x_1(t_0) + u_2^2(t)(r_2/m)x_2(t_0)\right] \end{vmatrix}, \tag{3}$$

$$u_1^1(t) = u_2^2(t) = (1/\omega)\sin t,\ u_1^2(t) = (1/\omega)(\cos\omega t - 1), u_2^1(t) = (-(1/\omega))(\cos\omega t - 1).$$

Уравнения движения синтезированной системы управления (СУ) для открытой области запишем в виде

$$(dx/dt) = \mathrm{A}x + \mathrm{B}u(t). \tag{4}$$

Анализ выражений (3) показывает, что при постоянстве матриц и B, изменения алгоритма управления (АУ) (2) пропорциональны изменениям элементов $r_i/m, \quad i \in [1,2]$ критерия качества (1), которые могут быть классифицированы как управляющие параметры синтезированного АУ [5]. Применив преобразования Лапласа к выражениям (4), и проведя необходимые структурные преобразования [5], передаточную функцию получим в виде:

$$\mathrm{X}(p) = \mathrm{X}_{OY}(p)\mathrm{X}_{ИМ}(p)\mathrm{X}_{УПЧ}(p),\ \mathrm{X}_{ИМ}(p) = 1/p,\ \mathrm{X}_{OY}(p) = k/(p^2+\omega^2),$$

$$\mathrm{X}_{УПЧ}(p) = \begin{vmatrix} \dfrac{\sum_{j=0}^{3} p^j \gamma_j}{(p^2+\omega^2)} \\ \dfrac{\sum_{j=0}^{3} p^j \rho_j}{(p^2+\omega^2)} \end{vmatrix},$$

$\gamma_j = \gamma_j(\omega, k, r_i, i \in [1,2])$, $\rho_j = \rho_j(\omega, k, r_i, i \in [1,2])$, $\mathrm{X}_{OY}(p)$, $\mathrm{X}_{ИМ}(p)$, $\mathrm{X}_{УПЧ}(p)$- передаточные функции ОУ, исполнительного механизма (ИМ) и усилительно-преобразовательной части (УПЧ) соответственно, p - независимая переменная изображения.

Для открытой области получим:

$$x(t) = e^{At}x(t_0) + F(t)x(t_0) = (e^{\mathrm{A}t} + F(t))x(t_0),$$

$$e^{\mathrm{A}t} = \begin{vmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t \end{vmatrix},$$

$$F(t) = -k^2 \begin{vmatrix} \lambda_{11}(t)(r_1/m) & \lambda_{12}(t)(r_2/m) \\ \lambda_{21}(t)(r_1/m) & \lambda_{22}(t)(r_2/m) \end{vmatrix},$$

$$\lambda_{11}(t) = \lambda_{22}(t) = (-(1/\omega^2))\cos 2\omega t(\cos\omega t - 1),$$

$$\lambda_{12}(t) = (1/2\omega^2)\sin\omega t(\cos 2\omega t - 1), \lambda_{21}(t) = (-(1/2\omega^2))\sin\omega t(\cos 2\omega t - 1).$$

Заключение. На основе положений формализма Дубовицкого-Милютина исследована задача динамического синтеза для гармонического осциллятора без демпфирования с двумя управляющими воздействиями как ОУ. Проведенное исследование позволило получить следующие новые результаты, имеющие научное и прикладное значение. Научная значимость результатов исследования определяется тем, то в рамках заданной постановки задачи приведено аналитическое решение задачи структурного синтеза, что позволяет разработать математическое, алгоритмическое и техническое обеспечения процедуры проектирования.

Практическая значимость результатов исследования определяется возможностью их использования в качестве основы при реализации математического, алгоритмического, программного и технического обеспечения процедуры проектирования СУ.

Литература: *1. Лойцянский Л.Г. Курс теоретической механики, т.2. / Л.Г. Лойцянский, А.И. Лурье.- М.: Гостехиздат, 1954. 595 с. 2. Стрижак Т.Г. Методы исследования динамических систем типа "маятник"/ Т.Г. Стрижак. - Алма-Ата: Наука, 1981. 251 с. 3. Атанс М. Оптимальное управление. / М. Атанс, П Фалб - М.: Машиностроение, 1968. 764 с. 4. Радиевский А.Е. Формализм Дубовицкого-Милютина и задача динамического синтеза. / А.Е Радиевский // Мех. та машинобудування.- 2009.- №2. С.152-157. 5. Радиевский А.Е. Функционально-аналитический метод синтеза детерминированного регулятора / Е.Е.Александров, Б.И.Кузнецов, А.Е. Радиевский, Н.Э. Тернюк // Оптимизация электромеханических систем с упругими элементами.- Харьков: ИМиС, 1995.- С.137-148.*

Bibliography (transliterated): 1. *Lojcjanskij L.G. Kurs teoreticheskoj mehaniki, t.2. / L.G Lojcjanskij, A.I. Lur'e.- M.: Gostehizdat, 1954. 595 s. 2. Strizhak T.G. Metody issledovanija dinamicheskih sistem tipa "majatnik"/ T.G. Strizhak. - Alma-Ata: Nauka, 1981. 251 s. 3. Atans M. Optimal'noe upravlenie. / M. Atans, P Falb - M.: Mashinostroenie, 1968. 764 s. 4. Radievskij A.E. Formalizm Dubovickogo-Miljutina i zadacha dinamicheskogo sinteza. / A.E Radievskij // Meh. ta mashinobuduvannja.- 2009.- №2. S.152-157. 5. Radievskij A.E. Funkcional'no-analiticheskij metod sinteza determinirovannogo reguljatora / E.E.Aleksandrov, B.I.Kuznecov, A.E. Radievskij, N.Je. Ternjuk // Optimizacija jelektromehanicheskih sistem s uprugimi jelementami.- Har'kov: IMiS, 1995.- S.137-148.*

Радієвський А.Є.

ВИМУШЕНИЙ РУХ ГАРМОНІЙНОГО ОСЦІЛЯТОРА БЕЗ ДЕМПФІРУВАННЯ
ІЗ ДВОМА КЕРУБЧИМИ ВПЛИВАМИ

На основі положень формалізму Дубовіцького-Мілютіна досліджується особливості вимушеного руху гармонійного осцилятора без та із демпфіруванням як об'єкта керування.

Радиевский А.Е..

ВЫНУЖДЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА
БЕЗ ДЕМПФИРОВАНИЯ С ДВУМЯ УПРАВЛЯЮЩИМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ

На основе положений формализма Дубовицкого-Милютина исследуются особенности вынужденного движения гармонического осциллятора без демпфирования с двумя управляющими воздейситвиями как объекта управления.

Radievski A. E

FORCED MOTION OF THE HARMONIC OSCILLATOR WITHOUT
DAMPING WITH TWO CONTROL VECTOR

Investigation the task of the forced motion harmonic oscillator without damping with two control vector as the object of control by use Dubovitski - Milutin formalism.