

Водка А.А.

К ВОПРОСУ О ПРОЧНОСТИ И НАДЕЖНОСТИ
БОЛТОВЫХ СОЕДИНЕНИЙ ГИДРОТУРБИН

Болтовые соединения являются одним из широко распространенных разъемных соединений, поэтому вопрос оценки прочности и надежности таких соединений в составе гидротурбин имеют большую практическую значимость. Эта работа посвящена обзору математических моделей для оценки надежности болтовых соединений и позволяет учесть особенности эксплуатации и факторы влияния внешней среды. Значительное внимание в работе посвящено современным нелинейным моделям на основе параметра повреждаемости.

Vodka O.

TO THE QUESTION OF STRENGTH AND RELIABILITY OF
BOLTED JOINTS IN WATER TURBINES

Bolted joints are widespread detachable connections, thus the question of the strength and reliability of such compounds being a part of the water turbines has great practical significance. This paper reviews the mathematical models for assessing the reliability of bolted joints taking into account the maintenance features and the influencing environmental factors. Considerable attention is paid to modern nonlinear models based on the damage parameter.

УДК 532

Пивоваров Д.Б., Аврамов К.В., д-р техн. наук

ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАСТИНКИ В НЕСТАЦИОНАРНОМ
ПОТЕНЦИАЛЬНОМ ПРОСТРАНСТВЕННОМ ГАЗОВОМ ПОТОКЕ

1. Введение. Исследование явлений аэроупругости, возникающих в пластине, обтекаемой газовым потоком, может объяснить ряд сложных явлений, возникающих в технике. К этим явлениям относятся интенсивные колебания крыльев самолетов, флаттер лопаток турбомашин, аэроупругие явления в ветряных энергетических установках. Поэтому понятен постоянный интерес инженеров и исследователей к перечисленным проблемам. Подробный обзор исследований, проведенных в этой области, опубликован в работах [1, 2, 3].

В этой статье для описания давлений, действующих на колеблющуюся пластинку применяется метод дискретных вихрей. Колебания пластинки описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Исследуется влияние следа, возникающего за колеблющейся пластинкой, на области динамической неустойчивости. Полученные результаты сравниваются с данными, рассчитанными с помощью программного комплекса ANSYS.

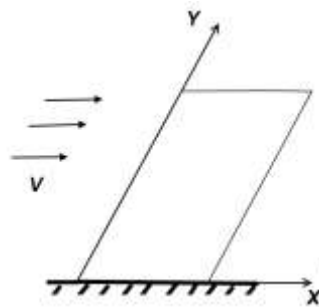


Рис.1. Эскиз механической системы

2. Постановка задачи и метод расчета. Рассматривается тонкая, прямоугольная, консольная пластинка. Поэтому сдвигами и инерцией вращения можно пренебречь. Деформации являются малыми; они удовлетворяют закону Гука. Неустойчивость пластинки и автоколебания развиваются вследствие ее двухстороннего взаимодействия с газовым потоком. Для описания колебаний пластинки воспользуемся уравнением Жермен-Лагранжа:

$$D \nabla^4 W + 2\alpha W_t + \rho_p h W_{tt} = \Delta p, \quad (1)$$

где D – цилиндрическая жёсткость, $W(x, y, t)$ – прогиб пластинки, α – коэффициент линейного демпфирования, ρ_p – плотность материала пластинки, h – толщина пластинки; Δp – разность давлений, действующая на поверхность пластинки.

Газ, обтекающий колеблющуюся пластинку, предполагается идеальным, несжимаемым, трехмерным и нестационарным. На значительном удалении от пластинки газ имеет постоянную скорость V невозмущенного потока параллельную оси x . Возмущение потока, которое является нестационарным и трехмерным наблюдается в окрестности пластинки, совершающей колебания. Эти возмущения описываются вектором скорости \vec{U} , который имеет три компоненты $\tilde{U}(x, y, z, t), \tilde{V}(x, y, z, t), \tilde{W}(x, y, z, t)$ вдоль осей x, y, z , соответственно. Предполагается, что жидкость является безвихревой: $rot \vec{U} = 0$. Тогда существует потенциал скорости $\varphi(x, y, z, t)$, который удовлетворяет следующему условию: $\vec{U} = \vec{V} + grad \varphi$. Потенциал скорости $\varphi(x, y, z, t)$ удовлетворяет уравнению Лапласа.

Предположим, что свободные вихри сходят только с задней кромки пластинки. Свободными вихрями, сходящими с боковых поверхностей пластинки, пренебрежем. Вихри, сходящие с задней кромки пластинки, сносятся, образуя вихревой след. Предполагается, что вихревой след располагается в плоскости срединной поверхности пластинки, находящейся в состоянии равновесия.

Действие пластинки на поток газа заменим системой присоединенных вихрей [1], которая характеризуется плотностью циркуляции $\gamma(x, y, t)$. Разность давлений, действующая на поверхность пластинки, определяется из закона Бернулли так:

$$\Delta p = \rho_w \left(\frac{\partial \gamma}{\partial t} + V \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right), \text{ где } \rho_w \text{ – плотность жидкости.}$$

Отметим, что при колебаниях пластинки выполняется условие непротекания газа через ее поверхность:

$$V \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial W}{\partial t} + V_D = 0, \quad (2)$$

где V_D – проекция относительной скорости вихревой пелены на ось Z , которая определяется на основании правила Био-Савара:

$$V_D(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\gamma(\xi, \zeta) d\xi d\zeta}{[(x-\xi)^2 + (y-\zeta)^2]^{3/2}} + \frac{1}{4\pi} \int_{S_w} \frac{\Gamma(\xi, \zeta) d\xi d\zeta}{[(x-\xi)^2 + (y-\zeta)^2]^{3/2}}, \quad (3)$$

где S – поверхность пластинки; S_w – поверхность вихревого следа. Следуя методу дискретных вихрей [4-6], поверхность пластинки разобьем на малые прямоугольные (граничные) элементы. Прямоугольные элементы пластинки и следа обозначим через

$S_\alpha; \alpha = 1, \dots, N_s$ и $S_\beta^{(W)}; \beta = 1, \dots, N_w$, соответственно. Тогда соотношение (3) можно переписать так:

$$V_D(x, y) = \frac{1}{4\pi} \sum_{\alpha=1}^{N_s} \gamma_\alpha(t) H_\alpha(x, y) + \frac{1}{4\pi} \sum_{\beta=1}^{N_w} \Gamma_\beta(t) \tilde{H}_\beta(x, y); \quad (4)$$

$$H_\alpha(x, y) = \int_{S_\alpha} \frac{d\xi d\zeta}{[(x-\xi)^2 + (y-\zeta)^2]^{3/2}}; \tilde{H}_\beta(x, y) = \int_{S_\beta} \frac{d\xi d\zeta}{[(x-\xi)^2 + (y-\zeta)^2]^{3/2}}.$$

Вихри, сошедшие с задней кромки пластины, имеют ту же циркуляцию, что и присоединённые вихри на задней кромке в предшествующий момент времени. Далее свободные вихри сносятся потоком газа от пластины, выстраиваясь в вытянутый след. В предлагаемом в этой статье подходе, шаги по времени будут выбраны так, что за один шаг Δt поток газа проходит расстояние равное длине одного элемента сетки. Тогда на каждом шаге по времени сетка элементов вихревого следа не перестраивается, циркуляция элементов $i^{го}$ ряда (если отсчитывать расстояние от пластины) присваивается элементам $(i+1)^{го}$ ряда.

Колебания пластинки опишем динамической системой с конечным числом степеней свободы. Для этого поперечные колебания пластинки разложим в ряд по ее формам собственных колебаний $\varphi_i(x, y)$:

$$W(x, y) = \sum_i q_i(t) \varphi_i(x, y). \quad (5)$$

Собственные формы колебаний удовлетворяют условию нормировки:

$$\rho_p h \int_S \varphi_i(x, y) \varphi_j(x, y) dx dy = \delta_{ij},$$

где δ_{ij} – символ Кронекера. Предположим, что условие непротекания (2) выполняется в центрах тяжести прямоугольных элементов пластины и следа, которые обозначим через $(\bar{x}_\nu, \bar{y}_\mu); \nu = 1, 2, \dots; \mu = 1, 2, \dots$. Разложение (5) введем в условие непротекания и придем к системе линейных алгебраических уравнений относительно плотности циркуляции присоединенных вихрей:

$$\sum_i \left[V q_i(t) \frac{\partial \varphi_i(\bar{x}_\nu, \bar{y}_\mu)}{\partial x} - \dot{q}_i(t) \varphi_i(\bar{x}_\nu, \bar{y}_\mu) \right] + \frac{1}{4\pi} \sum_\beta \Gamma_\beta(t) \tilde{H}_\beta(\bar{x}_\nu, \bar{y}_\mu) =$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \sum_\alpha \gamma_\alpha(t) H_\alpha(\bar{x}_\nu, \bar{y}_\mu). \quad (6)$$

К уравнению (1) применим метод Бубнова-Галеркина. Тогда получим следующую линейную динамическую систему:

$$\ddot{q}_i + 2\varepsilon \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = \rho_w \int_S \frac{\partial \gamma}{\partial t} \varphi_i(x, y) dx dy + \rho_w V \int_S \frac{\partial \gamma}{\partial x} \varphi_i(x, y) dx dy; \quad (7)$$

$$i = 1, 2, \dots, m$$

Итак, аэроупругие колебания пластинки описываются моделью, которая состоит из системы дифференциальных уравнений (7) и системой линейных алгебраических уравнений (6).

Если в системе линейных алгебраических уравнений (6) отбросить слагаемые, связанные с вихревым следом, то циркуляция может быть выражена через фазовые координаты $q_1, q_2, \dots, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots$ и введена в дифференциальные уравнения. В таком случае динамика опишется системой $2m$ линейных уравнений первого порядка, для которых численно рассчитываются характеристические показатели.

3. Численный анализ модели с конечным числом степеней свободы. Рассмотрим пластинку со следующими численными значениями параметров:

$$E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}; \mu = 0.3; \rho_p = 7880 \text{ кг/м}^3; \rho_w = 10 \text{ кг/м}^3; h = 0.01 \text{ м};$$

длина пластинки вдоль оси x и y составляет 0.3 и 0.1 м; длина следа, учитываемого в модели, равняется 5 м.

Действительные части характеристических показателей позволяют оценить устойчивость системы. Они показаны на рис. 2. Из этого рисунка следует, что потеря устойчивости пластинки наблюдается при $M = 0.22$. В этих расчетах не учитывался вихревой след за пластинкой, так как с учетом вихревого следа не возможно посчитать характеристические показатели.

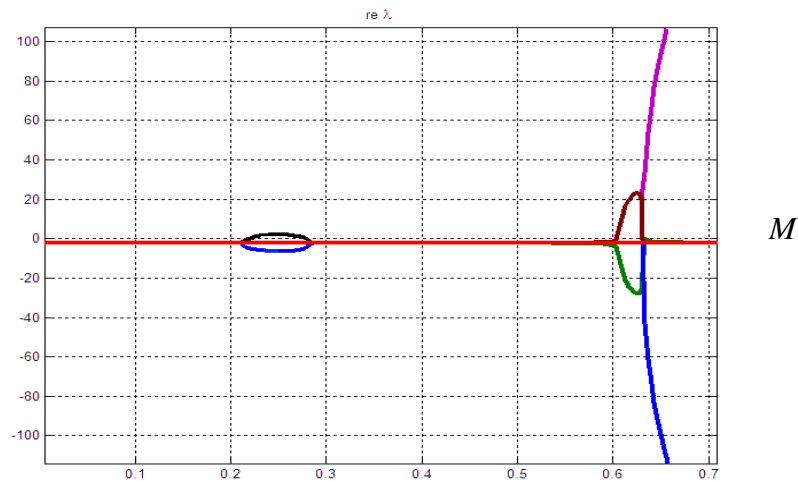


Рис.2. Характеристические показатели системы

При учете схода свободных вихрей производилось интегрирование системы дифференциальных уравнений (7) и решалась система линейных алгебраических уравнений (6). Численное интегрирование производилось методом Рунге-Кутты четвертого порядка в диапазоне чисел Маха $M \in [0.15; 0.2]$. В качестве примера результаты численного интегрирования при $M = 0.134$ и $M = 0.2$ приводятся на рис.3 и рис.4, соответственно. Результаты расчетов, представленные на рис.3, отвечают устойчивым колебаниям пластинки, а данные представленные на рис.4 характеризуют неустойчивые колебания. Потеря устойчивости состояния равновесия пластинки наблюдается при $M = 0.167$. Итак, учет следа уменьшает значение числа Маха, соответствующее потери устойчивости, на 23%.

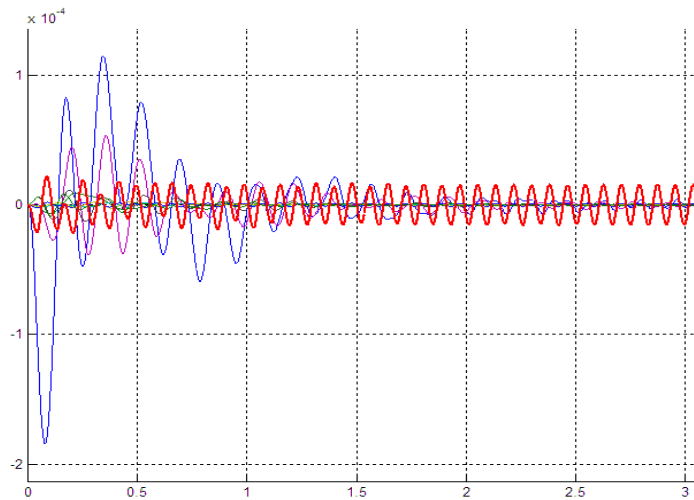


Рис.3. Устойчивые колебания пластинки

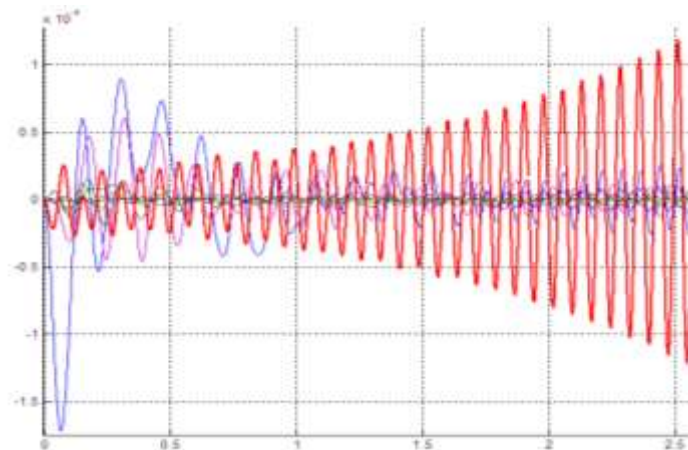


Рис.4. Неустойчивые колебания пластинки

4. Конечно элементный анализ системы. Анализ аэроупругости исследуемой пластинки проводился с помощью сочетания программных комплексов ANSYS и CFX. Пакет программ CFX предназначен для решения задач газодинамики. Программный комплекс ANSYS реализует метод конечных элементов, а комплекс CFX- метод конечных объемов. Пакет CFX хорошо позволяет описать взаимодействие колеблющейся пластинки с газовым потоком.

Расчет колебаний пластинки для одного значения числа Маха на четырёх ядерном компьютере при использовании модели, включающей 100300 элементов, при 500 временных шагах продолжается в течении 28 часов. Для сравнения, вычисление с использованием метода дискретных вихрей в среде Matlab занимает 12 минут. Поэтому колебания пластинки в потоке удалось исследовать только для двух значений чисел Маха $M=0.2$ и $M=0.15$.

На рис.5 показаны перемещения 2-х узлов, расположенных на боковой грани пластины, перпендикулярной потоку газа при скорости $M=0.2$. На этом рисунке показан процесс потери устойчивости пластинки. При малых амплитудах колебаний в потере устойчивости участвует вторая и третья формы колебаний. При увеличении амплитуд колебаний доминирующей становится первая форма колебаний.

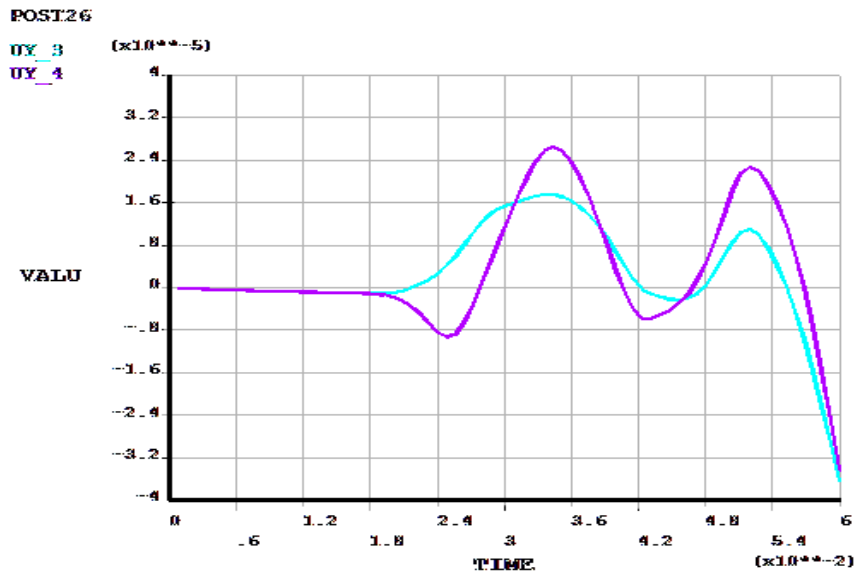


Рис.5. Результати конечно элементного расчета

Выводы. В статье исследована аэроупругость пластинки. Для описания сил давлений, действующих на пластинку, применяется метод дискретных вихрей. Исследовано влияние вихревого следа на потерю устойчивости пластинки. Показано, что с учетом вихревого следа значение скорости, при которой наблюдается потеря динамической устойчивости пластинки уменьшается на 23% по сравнению со скоростью потери устойчивости пластинки без учета вихревого следа.

Предпринята попытка исследования аэроупругости пластинки с помощью программного комплекса ANSYS. Время расчета с помощью этого программного комплекса превышает время расчета с использованием метода дискретных вихрей в 56 раз.

Литература: 1. Friedmann P.P. Renaissance of aeroelasticity and its future// J. of Aircrafts.– 2002.– 36.– p. 105-121. 2. Dowell E.H. Aeroelasticity of plates and shells, Noordhoff International Publishing: Leyden, 1975, 230p. 3. Dowell E.H., Hall K.C. Modeling of fluid-structure interaction// Annual Review of Fluid Mechanics.– 2001.– 33.– p. 445-490. 4. С.М. Белоцерковский. Тонкая несущая поверхность в дозвуковом потоке газа. М.: Наука, 1965, 236 с. 5. Кантор Б.Я., Стрельникова Е.А. Гиперсингулярные интегральные уравнения в задачах механики сплошной среды. Харьков: Новое слово, 2005, 252 с. 6. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. М.: Наука, 1985, 253с.

Bibliography (transliterated): 1. Friedmann P.P. Renaissance of aeroelasticity and its future// J. of Aircrafts.– 2002.– 36.– p. 105-121. 2. Dowell E.H. Aeroelasticity of plates and shells, Noordhoff International Publishing: Leyden, 1975, 230p. 3. Dowell E.H., Hall K.C. Modeling of fluid-structure interaction// Annual Review of Fluid Mechanics.– 2001.– 33.– p. 445-490. 4. S.M. Belocerkovskij. Tonkaja nesuwaja poverhnost' v dozukovom potoke gaza. M: Nauka, 1965, 236 s. 5. Kantor B.Ja., Strel'nikova E.A. Gipersinguljarnye integral'nye uravnenija v zadachah mehaniki sploshnoj sredy. Har'kov: Novoe slovo, 2005, 252 s. 6. Belocerkovskij S.M., Lifanov I.K. Chislennye metody v singuljarnyh integral'nyh uravnenijah. M.: Nauka, 1985, 253s.

Пивоваров Д.Б., Аврамов К.В.

ДИНАМІЧНА СТІЙКІСТЬ ПЛАСТИНИ В НЕСТАЦІОНАРНОМУ ПОТЕНЦІАЛЬНОМУ ПРОСТОРОВОМУ ГАЗОВОМУ ПОТОЦІ

Для описання тиску на пластину, що коливається, використовується метод дискретних вихрів. Коливання пластини описуються системою звичайних диференціальних рівнянь. Досліджується вплив сліду, що виникає за пластиною, на області динамічної

стійкості. Отримані результати порівнюються з даними, що розраховані за допомогою програмного комплексу ANSYS.

Пивоваров Д.Б., Аврамов К.В.

**ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАСТИНКИ В НЕСТАЦИОНАРНОМ
ПОТЕНЦИАЛЬНОМ ПРОСТРАНСТВЕННОМ ГАЗОВОМ ПОТОКЕ**

Для описания давлений, действующих на колеблющуюся пластинку, применяется метод дискретных вихрей. Колебания пластинки описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Исследуется влияние следа, возникающего за колеблющейся пластинкой, на области динамической неустойчивости. Полученные результаты сравниваются с данными, рассчитанными с помощью программного комплекса ANSYS.

D. B. Pivovarov, K. V. Avramov

**DYNAMIC STABILITY OF THE PLATE IN NONSTATIONARY, THREE
DIMENSIONAL, POTENTIAL GAS FLOW**

Discrete vortex method is applied to obtain pressure acting on the vibrating plate. The plate vibrations are described by the system of ordinary differential equations. The effect of the wake on the region of dynamic instability is analyzed. The obtained results are compared with the data, which are calculated using ANSYS.
