

За критерій ефективності прийнято площу поперечного перерізу сферичної сміттєзбиральної конструкції, що входить до складу сміттєзбирача.

Дронь Н.М., Хорольский П.Г., Хитько А.В., Дубовик Л.Г.

**К ВЫБОРУ ДВИГАТЕЛЯ ДЛЯ МАНЕВРИРОВАНИЯ
КОСМИЧЕСКОГО МУСОРОСБОРЩИКА НА ЭТАПЕ ОЧИСТКИ
ОКОЛОЗЕМНОГО ПРОСТРАНСТВА**

Рассмотрена эффективность работы космического мусоросборщика при использовании для маневрирования его на этапе очистки различных типов стационарных плазменных двигателей. В качестве критерия эффективности принята площадь поперечного сечения сферической мусоросборочной конструкции, входящей в состав мусоросборщика.

Dron N., Horolsky P., Khitko V., Dubovik L.

**TO SELECTION OF THE THRUSTER FOR MANEUVERING
SPACE DEBRIS-GATHERER AT THE CLEARING STAGE NEAR SPACE**

The efficiency of space debris-gatherer at use for its maneuvering at a stage of clearing of different types of stationary plasma thrusters is considered. As criterion of efficiency the cross-sectional area spherical debris-gathering construction which is a part of debris-gatherer is adopted.

УДК 539.3:534.1

Ольшанский В.П., д-р ф.-м. наук, Ольшанский С.В., канд. ф.-м. наук

**ФУНКЦИЯ ЛАМБЕРТА И ТРАЕКТОРИЯ ПОЛЁТА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ
В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ**

Введение. В курсах теоретической механики [1, 2, 3], при расчёте траектории полёта материальной точки в газообразной среде с линейным сопротивлением движению, традиционно используют параметрические уравнения: $x = x(t)$, $y = y(t)$, в которых t – время; x , y – соответственно абсцисса и ордината движущейся точки или рассматривают явную зависимость $y = y(x)$, которую получают исключением t в параметрических уравнениях. При этом не рассматривают обратную зависимость $x = x(y)$, которая является неоднозначной и не выражается в элементарных функциях. Однако наличие выражения $x = x(y)$ существенно упрощает вычисление дальности полёта материальной точки, что важно с позиции технических приложений. Поэтому в данной работе поставлена цель получить аналитическое выражение $x = x(y)$ и разработать удобный способ расчёта горизонтальной протяжённости траектории полёта точки с применением этого выражения.

Основная часть работы. Исходим из известных параметрических уравнений траектории [4]:

$$x = \frac{v_1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}); \quad y = \frac{1}{\alpha} \left(v_2 + \frac{g}{\alpha} \right) (1 - e^{-\alpha t}) - \frac{gt}{\alpha}, \quad (1)$$

в которых α – коэффициент вязкого сопротивления движению; g – ускорение свободного падения; v_1, v_2 – проекции вектора начальной скорости точки \vec{v}_0 на оси ox и oy соответственно (см. рис. 1).

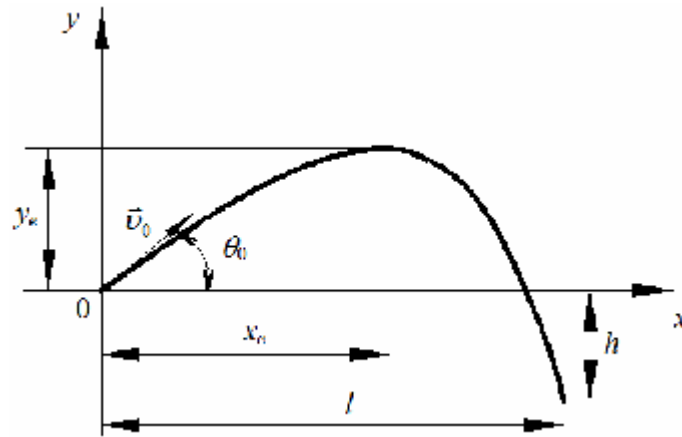


Рис. 1. Расчётная схема

Выразим текущее время полёта материальной точки соотношением

$$t = -\frac{1}{\alpha} \ln \xi, \quad (2)$$

в котором $0 < \xi \leq 1$ и подставим (2) во второе уравнение в (1). Такое преобразование даёт:

$$\ln(A\xi) - A\xi = -\eta, \quad (3)$$

где $A = 1 + \frac{\alpha v_2}{g}$; $\eta = -\frac{\alpha^2 y}{g} + A - \ln A$.

Решения уравнения (3) выражаются через специальную функцию Ламберта $W(-\zeta)$ отрицательного аргумента [5]. Поэтому

$$\xi_j = -\frac{1}{A} W_j(-\exp(-\eta)), \quad j = \overline{1; 2}. \quad (4)$$

В (4) $W_1(\zeta)$ и $W_2(\zeta)$ – соответственно первая и вторая вещественные ветви указанной функции на промежутке $\left[-\frac{1}{e}; 0\right]$.

Используя (2) и (4), для каждого значения y получаем два значения t :

$$t_j = -\frac{1}{\alpha} \ln \left[-\frac{1}{A} W_j(-\exp(-\eta)) \right], \quad j = \overline{1; 2}. \quad (5)$$

Здесь t_2 – время достижения заданного y на восходящем, а t_1 – время достижения этого y на нисходящем участках траектории. Очевидно, что $t_2 \leq t_1$. Равенство $t_1 = t_2$ имеет место, когда $\eta = 1$. В этом случае:

$$W_1(-\mathbf{exp}(-1)) = W_2(-\mathbf{exp}(-1)) = -1;$$

$$y = \frac{g}{\alpha^2}(A - 1 - \ln A) = \frac{v_2}{\alpha} - \frac{g}{\alpha^2} \ln \left(1 + \frac{\alpha v_2}{g} \right) = y_e.$$

Точка с ординатой y_e является наивысшей точкой траектории [4]. Там:

$$x = x_e = \frac{v_1 \cdot v_2}{g + \alpha v_2}.$$

Подставив (5) в первое уравнение в (1), получаем два выражения искомой зависимости $x = x(y)$:

$$x = \frac{v_1}{\alpha} \left[1 + \frac{1}{A} W_2(-\mathbf{exp}(-\eta)) \right];$$

$$x = \frac{v_1}{\alpha} \left[1 + \frac{1}{A} W_1(-\mathbf{exp}(-\eta)) \right]. \quad (6)$$

Первая приводит к значениям $x \in [0; x_e]$, а вторая к $x \geq x_e$.

Обычно в технических расчётах приходится вычислять дальность полёта частицы в условиях, когда $y = y_*$, $l > x_e$. Тогда, согласно второму решению в (6):

$$l = \frac{v_1}{\alpha} \left[1 + \frac{1}{A} W_1(-\mathbf{exp}(-\eta_*)) \right], \quad (7)$$

причём $\eta_* = -\frac{\alpha^2 y_*}{g} + A - \ln A$.

Время полёта t_* на расстояние l равно

$$t_* = -\frac{1}{\alpha} \ln \left[-\frac{1}{A} W_1(-\mathbf{exp}(-\eta_*)) \right] = -\frac{1}{\alpha} \ln \left(1 - \frac{\alpha l}{v_1} \right). \quad (8)$$

Как видим, вычисления l и t_* связаны с вычислением значения функции Ламберта. Это несложно проводить по формулам, опубликованным в [5, 6] или на компьютере в среде “Maple” [7].

В инженерных расчётах значение $W_1(-\zeta)$ удобно определять интерполированием данных в табл. 1.

Остановимся на результатах расчётов.

Используя (7) и (8), проанализируем влияние начальной скорости v_0 на значения l и t_* , когда вектор начальной скорости составляет угол $\theta_0 = 30^\circ$ с горизонтом, а $\alpha = 0,3 \text{ с}^{-1}$; $-y_* = h = 1 \text{ м}$. Проекции начальной скорости на оси координат вычисляем по формулам:

$$v_1 = v_0 \cos \theta_0; \quad v_2 = v_0 \sin \theta_0.$$

Значения $F(-\zeta) = -10^4 W_1(-\zeta)$ (первая ветвь)

$10^3 \zeta$	$F(\zeta)$	$10^3 \zeta$	$F(\zeta)$	$10^3 \zeta$	$F(\zeta)$	$10^3 \zeta$	$F(\zeta)$
$10^3 / e$	10000	345	6831	225	3053	105	1182
367,5	9553	340	6537	220	2957	100	1118
367	9324	335	6273	215	2863	95	1056
366	9022	330	6033	210	2770	90	994
365	8798	325	5811	205	2680	85	933
364	8664	320	5605	200	2592	80	873
363	8454	315	5412	195	2505	75	814
362	8311	310	5230	190	2420	70	755
361	8181	305	5058	185	2337	65	697
360	8061	300	4894	180	2255	60	640
359	7949	295	4738	175	2175	55	583
358	7845	290	4589	170	2097	50	527
357	7746	285	4445	165	2019	45	472
356	7652	280	4308	160	1943	40	417
355	7562	275	4175	155	1868	35	363
354	7477	270	4047	150	1795	30	309
353	7395	265	3923	145	1723	25	256
352	7316	260	3803	140	1651	20	204
351	7240	255	3687	135	1581	15	152
350	7166	250	3574	130	1512	10	101
349	7095	245	3464	125	1444	5	50
348	7026	240	3358	120	1377	0	0
347	6959	235	3254	115	1311		
346	6894	230	3152	110	1246		

Результаты расчётов для $v_0 = 5; 10; 15; 20$ м/с представлены в табл. 2.

Таблиця 2

Значения l и t_* для разных v_0

$v_0, \text{ м/с}$	A	B	$-W(-e^{-B})$	$l, \text{ м}$	$t_*, \text{ с}$
5	1,076	1,012	0,856	2,95	0,76
10	1,153	1,020	0,812	8,54	1,17
15	1,229	1,032	0,768	16,24	1,57
20	1,306	1,048	0,721	25,86	1,98

Заметим, что вычисленные l меньше, чем

$$\sup l = v_1 \left(\frac{v_2}{g} + \sqrt{\left(\frac{v_2}{g} \right)^2 + \frac{2h}{g}} \right).$$

Такой получается дальность полёта частицы в вакууме, без учёта сопротивления воздуха, причём для малых v_0 разности l и $\sup l$ небольшие. Например, когда

$v_0 = 5$ м/с, то $\text{sup}l = 3,34$ м, т.е. незначительно больше соответствующего $l = 2,95$ м в табл. 2. Но с увеличением v_0 разности между $\text{sup}l$ и l возрастают. Так при $v_0 = 20$ м/с $\text{sup}l = 36,97$ м, что существенно больше соответствующего $l = 25,86$ м в табл. 2.

Влияние параметра $y_* = -h$ на дальность l отражено в табл. 3.

Таблиця 3

Значения l и t_* для разных h

h , м	B	$-W(-e^{-B})$	l , м	$\text{sup}l$, м	t_* , с
0	1,0079	0,880	8,50	10,04	1,25
1	1,0120	0,854	9,39	11,12	1,41
2	1,0161	0,831	10,16	12,03	1,54
3	1,0201	0,812	10,80	12,84	1,66

Вычисления проведены при $v_0 = 10$ м/с; $\theta = 40^0$; $\alpha = 0,2$; c^{-1} ; $A = 1,131$. Для принятых исходных данных значение h существенно влияет на расстояние l , которое меньше её верхней границы $\text{sup}l$.

Выводы. Используя изложенный метод, по таблице функции Ламберта, несложно рассчитать дальность полёта частицы в газообразной среде с линейным сопротивлением движению.

Литература: 1. Жуковский Н.Е. Теоретическая механика / Н.Е. Жуковский. – М.-Л.: Гостехиздат, 1950. – 811 с. 2. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики / Н.Н. Никитин. – М.: Высшая школа, 1990. – 607 с. 3. Кучеренко С.И. Теоретична механіка. Навчальний посібник / С.И. Кучеренко, В.В. Бурлка, Л.М. Тищенко та ін. – Х.: ХНТУСГ, 2012. – 568 с. 4. Ольшанский В.П. Вопросы внешней баллистики огнетушащих веществ / В.П. Ольшанский, О.А. Дубовик. – Х.: “Митець”, 2005. – 236 с. 5. Corless R.M. On the Lambert W Function / R.M. Corless, G.H. Gonnet, D.E.G. Hare and ather // *Advances in Computational Math.* v.5., 1996, p. 329-359. 6. Fariel Shafee. Lambert function and new-extensive form of entropy / Shafee Fariel // *IMA Journal of Applied Mathematics.* v.72, 2007, p. 785-800. 7. Дьяконов В.П. Maple 8 в математике, физике и образовании / В.П. Дьяконов. – М.: Солон-Пресс, 2003. – 656 с.

Bibliography (transliterated): 1. Zhukovskij N.E. Teoreticheskaja mehanika / N.E. Zhukovskij. – M.-L.: Gostehizdat, 1950. – 811 s. 2. Nikitin N.N. Kurs teoreticheskoy mehaniki / N.N. Nikitin. – M.: Vysshaja shkola, 1990. – 607 s. 3. Kucherenko S.I. Teoretichna mehanika. Navchal'nij posibnik / S.I. Kucherenko, V.V. Burlka, L.M. Tishhenko ta in. – H.: HNTUSG, 2012. – 568 s. 4. Ol'shanskij V.P. Voprosy vneshnej ballistiki ognetushashhih veshhestv / V.P. Ol'shanskij, O.A. Dubovik. – H.: “Mitec”, 2005. – 236 s. 5. Corless R.M. On the Lambert W Function / R.M. Corless, G.H. Gonnet, D.E.G. Hare and ather // *Advances in Computational Math.* v.5., 1996, p. 329-359. 6. Fariel Shafee. Lambert function and new-extensive form of entropy / Shafee Fariel // *IMA Journal of Applied Mathematics.* v.72, 2007, p. 785-800. 7. D'jatonov V.P. Maple 8 v matematike, fizike i obrazovanii / V.P. D'jatonov. – M.: Solon-Press, 2003. – 656 s.

Ольшанський В.П., Ольшанський С.В.

ФУНКЦІЯ ЛАМБЕРТА І ТРАЄКТОРІЯ ПОЛЬОТУ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ В СЕРЕДОВИЩІ З ОПОРОМ

В аналітичному вигляді побудована двозначна залежність абсциси від ординати на траєкторії польоту матеріальної точки в газовому середовищі, за умови, що сила

опору його пропорційна швидкості частинки. Викладено застосування залежності до визначення дальності польоту матеріальної точки.

Ольшанский В.П., Ольшанский С.В.

**ФУНКЦИЯ ЛАМБЕРТА И ТРАЕКТОРИЯ ПОЛЁТА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ
В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ**

В аналитическом виде построена двузначная зависимость абсциссы от ординаты на траектории полета материальной точки в газообразной среде, при условии, что сила сопротивления среды пропорциональна скорости частицы. Изложено применение зависимости к определению дальности полета материальной точки.

Olshanskii V.P., Olshanskii S.V.

**LAMBERT FUNCTION AND TRAJECTORY MATERIAL POINT
IN RESISTING MEDIUM**

The analytical form based on ambiguous relationship abscissa ordinate on the trajectory of a point in a gaseous medium, provided that the resistance force is proportional to the speed of its particles. Application dependence to determine the flight range of the point was expounded.

УДК 519.3

Радиевский А. Е., канд. тех. наук

**РАЗВИТИЕ ОБЩЕЙ СХЕМЫ ФОРМАЛИЗМА ДУБОВИЦКОГО-МИЛЮТИНА
В ТЕОРЕТИЧЕСКОМ АСПЕКТЕ. II**

Введение. В настоящей статье приводится продолжение исследования по анализу работ отечественных и зарубежных ученых по теоретической направленности развития формализма Дубовицкого-Милютина, начатые в работе [1].

Цель исследования. Целью настоящего исследования является анализ вклада отечественных и зарубежных ученых в развитие "неклассических" методов вариационного исчисления в рамках общей схемы формализма Дубовицкого-Милютина. В методологическом аспекте исследуемые работы базируются на методологии формализма Дубовицкого-Милютина, а их основные результаты аналогичны основным положениям общей схемы формализма Дубовицкого-Милютина.

Особенности развития формализма Дубовицкого-Милютина в трудах отечественных и зарубежных ученых. *Задачи управления с распределенными параметрами.* Системы, описываемые уравнениями гиперболического и параболического типов рассмотрены в [2]. В [3] на множестве D требуется найти элемент $Y^0 = (x^0(t, \tau), x_0^0(\tau), u^0(t), w^0(t, \tau), v^0(\tau))$, доставляющий $\min J(Y)$,

$$J(Y) = \int_0^{t_1} \int_0^{\tau_1} F(t, \tau, x(t, \tau), u(t), w(t, \tau), x_0(\tau), v(\tau)) d\tau dt + \int_0^{\tau_1} F_1(\tau, x(t_1, \tau), x_0(\tau), v(\tau)) d\tau$$