

опору його пропорційна швидкості частинки. Викладено застосування залежності до визначення дальності польоту матеріальної точки.

Ольшанский В.П., Ольшанский С.В.

**ФУНКЦИЯ ЛАМБЕРТА И ТРАЕКТОРИЯ ПОЛЁТА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ  
В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ**

В аналитическом виде построена двузначная зависимость абсциссы от ординаты на траектории полета материальной точки в газообразной среде, при условии, что сила сопротивления среды пропорциональна скорости частицы. Изложено применение зависимости к определению дальности полета материальной точки.

Olshanskii V.P., Olshanskii S.V.

**LAMBERT FUNCTION AND TRAJECTORY MATERIAL POINT  
IN RESISTING MEDIUM**

The analytical form based on ambiguous relationship abscissa ordinate on the trajectory of a point in a gaseous medium, provided that the resistance force is proportional to the speed of its particles. Application dependence to determine the flight range of the point was expounded.

УДК 519.3

*Радиевский А. Е., канд. тех. наук*

**РАЗВИТИЕ ОБЩЕЙ СХЕМЫ ФОРМАЛИЗМА ДУБОВИЦКОГО-МИЛЮТИНА  
В ТЕОРЕТИЧЕСКОМ АСПЕКТЕ. II**

**Введение.** В настоящей статье приводится продолжение исследования по анализу работ отечественных и зарубежных ученых по теоретической направленности развития формализма Дубовицкого-Милютина, начатые в работе [1].

**Цель исследования.** Целью настоящего исследования является анализ вклада отечественных и зарубежных ученых в развитие "неклассических" методов вариационного исчисления в рамках общей схемы формализма Дубовицкого-Милютина. В методологическом аспекте исследуемые работы базируются на методологии формализма Дубовицкого-Милютина, а их основные результаты аналогичны основным положениям общей схемы формализма Дубовицкого-Милютина.

**Особенности развития формализма Дубовицкого-Милютина в трудах отечественных и зарубежных ученых.** Задачи управления с распределенными параметрами. Системы, описываемые уравнениями гиперболического и параболического типов рассмотрены в [2]. В [3] на множестве  $D$  требуется найти элемент  $Y^0 = (x^0(t, \tau), x_0^0(\tau), u^0(t), w^0(t, \tau), v^0(\tau))$ , доставляющий  $\min J(Y)$ ,

$$J(Y) = \int_0^{t_1} \int_0^{\tau_1} F(t, \tau, x(t, \tau), u(t), w(t, \tau), x_0(\tau), v(\tau)) d\tau dt + \int_0^{\tau_1} F_1(\tau, x(t_1, \tau), x_0(\tau), v(\tau)) d\tau$$

при наличии ограничений

$$\partial x(t, \tau) / \partial t = f(t, \tau, x(t, \tau), u(t), w(t, \tau)), (t, \tau) \in C,$$

$$x(0, \tau) = x_0(\tau), dx_0(\tau) / d\tau = \varphi(\tau, x_0(\tau), v(\tau)), x_0(\tau) = x_0,$$

где функции  $u(t), v(\tau)$ -кусочно-непрерывные одной переменной, а  $w(t, \tau)$  – кусочно-непрерывная двух переменных. Основной результат связан с исследованием достаточных условий абсолютного минимума. Отмечено, что если множество  $D$  не содержит элемента, доставляющего  $\min J(Y)$ , то ставится задача определения минимизирующей последовательности  $(Y_s^0) \subset D$  такой, что на ней оптимизируемый функционал при  $s \rightarrow \infty$  стремился к своему наименьшему значению.

В [4] исследуется задача определения

$$\min J_0, J_0 = \int_{t_0}^{t_1} F(x(\tau), u(\tau)) d\tau$$

при наличии ограничений

$$x(t) = \int_{t_0}^{t_1} K(t, x(\tau), u(\tau)) d\tau, g(x(t)) \leq g_0(t), x(t_1) = x_1, u \in U.$$

Здесь  $x(t)$  – фазовая координата;  $u(t)$  – управление,  $U$  – замкнутая область;  $g(t)$ ,  $K(t, x, u)$  – дифференцируемые по  $x$  функции. В [3,4] основные результаты сформулированы в форме принципа максимума. В [5] рассматривается задача оптимального управления, в которой обыкновенные дифференциальные уравнения заменены на интегральные уравнения второго рода в следующей постановке.

Найти

$$\min J(p), J(p) = \aleph^0(p)$$

при наличии ограничений

$$\begin{aligned} \aleph^j(p) \leq 0, K(p) = 0, p - \int q(s, x(s)) u(ds) = 0, \\ x(t) = \sum_i \int k^i(t, s) f^i(t, s, x(s), u(s)) m_i(ds), \\ g^i(t, x(t), u^i(t)) = 0, \varphi^i(t, x(t), u^i(t)) \leq 0, u_2^i(t) \in D^i(t), \end{aligned}$$

где  $p$  - вектор параметров,  $x$  - фазовые переменные,  $u^i = (u_1^i, u_2^i)$ - управления.

Исследуемая задача рассматривается в аспекте понтрягинского минимума. В качестве необходимого условия минимума рассматривается стационарность присоединенных задач, переход к которым осуществляется посредством вариаций скольжения. Показано, что необходимое условие минимума эквивалентно стационарности, что, в свою очередь, эквивалентно выполнению некоторого набора принципов максимума. Задачи оптимального управления для эллиптических уравнений исследуются в [6-8]. В [6] предполагается, что  $X, Y$  и  $U$  - банаховы пространства,  $X$  - пространство состояний,  $U$  – пространство управлений. На произведении пространств  $X \times Y$  заданы функционалы  $J_k : X \times U \rightarrow R, k \in [0, q]$  и отображение  $F : X \times U \rightarrow Y$ . Рассмат-

ривається об'яга теорія векторної оптимізації являючася, с одної сторони, одним из варіантов правила множителей Лагранжа, а, с другою – принципа максимума Пон-трягина в следуючій постановке.

Найти

$$\inf J_0(x, u)$$

при наличии ограничений

$$J_k(x, u) \leq 0, k \in [1, m], J_k(x, u) = 0, k \in [m + 1, q], F(x, u) = 0.$$

Основной результат сформулирован в форме необходимых и достаточных условий глобального минимума. Результаты, полученные в [6], используются в [7] при рассмотрении задачи векторной оптимизации для эллиптического уравнения. В [8] показано, что для класса динамических систем, описывающих химические процессы, присутствуют три управления: распределенное, граничное и стартовое. В [7,8] основной результат сформулирован в форме условий оптимальности по Слейтеру.

*Условия оптимальности второго порядка.* Необходимые условия оптимальности второго порядка для объекта управления

$$dx/dt = f(t, x(t), u(t))$$

при наличии ограничений

$$\varphi_i(x(t_1)) \leq 0, \varphi_j(x(t_1)) = 0, x(t_0) = x_0, u(t) \in U, x: [t_0, t_1]$$

получены в [9]. Результаты базируются на положениях работы [10] и техники варьирования, содержащейся в [11].

В [12] рассматривается задача определения

$$\min J(x_0, x_1), x_0 = x(t_0), x_1 = x(t_1)$$

при наличии ограничений

$$dx/dt = f(t, x, u); \chi_i(x_0, x_1) \leq 0, i \in [1, k]; K(x_0, x_1) = 0; \\ g(x, u, t) = 0; \varphi(x, u, t) \leq 0,$$

где функции  $x(t)$ -абсолютно непрерывная, а  $u(t)$ -ограниченная измеримая.

Минимум ищется в пространстве пар  $(x(t), u(t))$ , заданных на отрезке  $[t_0, t_1]$ . Основной результат сформулирован и доказан в форме строгого локального минимума. В [13] рассматривается задача определения, в смысле полуупорядоченности с помощью заданного конуса  $C \subset U, \text{int } C \neq \emptyset$ , для двух вариантов задания отображений ( дифференцируемые и недифференцируемые) нахождения

$$\min J(x)$$

при наличии ограничений

$$g(x) \in K, h(x) = 0, x \in X,$$

где  $J(x): X \rightarrow X, g: X \rightarrow Y, h: X \rightarrow W$  – непрерывны;  $X, U, K, W$  - линейные топологические пространства,  $K \subset U$  - выпуклый конус,  $\text{int } K \neq \emptyset$ . Основной результат основан на факте существования не равных одновременно нулю множителей Лагранжа.

Задача нахождения

$$\min J(x) \text{ для } \forall x \in Z = \bigcap_{i=1}^{n+1} Z_i,$$

где  $x \in Z_i$ ,  $i \in [1, n]$  – ограничения типа неравенство;  $x \in Z_{n+1} = (x \in X : F(x) = 0)$  – ограничение типа равенство исследуется в [14].

На основе понятий возможных и тангенциальных направлений второго порядка основной результат сформулирован и доказан в виде необходимых условий локального минимума. Необходимые условия оптимальности второго порядка для бесконечномерной задачи минимизации локально липшицевой по  $Z$  и полунепрерывной сверху по  $t$  функции  $f(z, t)$  при ограничениях типа равенство и неравенство, а также при мгновенном геометрическом ограничении, определенном заданным выпуклым подмножеством соответствующего пространства, получены в [15]. В [16] исследуется вопрос о вкладе понтрягинских вариаций в условия второго порядка. Характерной особенностью полученных результатов состоит в том, что достаточное условие отличается от необходимого лишь усилением неравенства.

*Оптимальное управление с вырождением терминальных и фазовых ограничений.* В [17-23] исследуются задачи с фазовыми ограничениями. В [17] рассматривается каноническая задача оптимального управления с незакрепленным временем. Отмечается, что существуют ситуации, когда принцип максимума для задач с фазовыми ограничениями является безсодержательным. Для терминальных и фазовых ограничений вводятся понятия их вырожденности на концах траектории, согласованности вблизи концов траектории и управляемости относительно фазовых ограничений. Приведены условия существования необходимых условий сильного минимума и его особенности. В [18,19] рассматривается регулярный вариант канонической задачи оптимального управления. Введено понятие общего положения исследуемой траектории. Выделен класс задач, для которых оптимальная траектория, находящаяся в общем положении обладает необходимым условием сильного минимума. Отмечается, что последнее возникает как эквивалент локальной экстремальности исследуемой траектории в некотором классе присоединенных задач относительно  $V$ -вариаций и вариаций скольжения. Отличие состоит в форме записи фазового ограничения. Исследуемая задача становится корректной лишь применительно к траекториям, на которых фазовые и терминальные функции согласованы. Условия локальной экстремальности присоединенной траектории эквивалентны существованию строки Эйлера. Приведены три основные формы необходимого условия сильного минимума (Понтрягина, Гамильтона и Лагранжа). Работа [20] является развитием положений, изложенных в [17] (гладкий регулярный вариант канонической задачи). При выводе основных результатов в [20] использована техника  $V$ -вариаций, а принципиально новым моментом вариационного исследования является специальная форма записи ограничения на состояние. Показано, что приведенное в [20] обобщение позволяет исследовать на оптимальность любые, в том числе и вырожденные траектории. Условия, гарантирующие существование необходимого условия сильного минимума с поточечным условием нетривиальности в задаче оптимального управления с чисто фазовыми ограничениями, приведены в [21]. Показано, что имеет место импликация: регулярность  $\rightarrow \Gamma$  регулярность (регулярность по Р.В. Гамкрелидзе)  $\rightarrow$  управляемость. В [22] предполагается, что управляемая система в начальный (конечный) момент времени находится на фазовой границе. Приводится уравнение Эйлера для исследуемой задачи и его исследование.

*Метод шатров.* Являясь развитием формализма Дубовицкого-Милютина, метод шатров базируется на идеях выпуклых множеств и алгебраической топологии [22]. В основе метода шатров лежит теория отделимости выпуклых множеств, применение которой позволило избавиться от специфического для формализма Дубовицкого-Милютина требования телесности конусов.

**Литература:** 1. Радиевский А.Е. Развитие общей схемы формализма Дубовицкого-Милюткина в теоретическом аспекте. I / А.Е. Радиевский // Мех. та машинобудування - 2011.- №2.- С. 9-17. 2. Радиевский А.Е. Развитие "неклассических" методов вариационного исчисления. / А.Е. Радиевский // Мех. та машинобудування - 2010.- №1.- С. 19-24. 3. Москаленко А.И. Об одном классе задач оптимального регулирования / А.И. Москаленко // Ж. вычисл. мат. и мат. физ. - 1969. - 9, N1.- С.68 - 95. 4. Москаленко А.И. К теории оптимальных процессов в системах, описываемых интегральными уравнениями / А.И. Москаленко // Тр. Сибирского физ. – техн. ин-та .-Томск: Изд-во ТГУ, 1970. - Вып. 49. - С. 163 - 183. 5. Чуканов С.В. Принципа максимума для задач оптимального управления интегральными уравнениями / С.В. Чуканов // Необходимое условие в оптимальном управлении. - М: Наука, 1990. - С. 158 – 202. 6. Стрекаловский А.С. Об условиях оптимальности в гладкой задаче оптимального управления в банаховом пространстве/ А.С. Стрекаловский // Численные методы оптимизации. Прикл. мат. - Иркутск, 1978.- С.76 - 88. 7. Стрекаловский А.С. К оптимальности по векторному критерию систем, описываемых эллиптическим уравнением/ А.С. Стрекаловский // Прик мат. - Иркутск.: Изд-во СЭИ СО АН СССР, 1978. - Вып.2. - С.71 - 79. 8. Стрекаловский А.С. К оптимальности по векторному критерию одного класса динамических систем, описываемых химические процессы/ А.С. Стрекаловский // Дифференциальные и интегральные уравнения. - Иркутск, 1980.- С. 186 - 203. 9. Virsan C. Necessary conditions of optimality of second order for the optimal control problem with functional constraints/ C. Virsan // Revue roumaine math. pures et appl. - 1973. - 18, N5.- P.767 - 791. 10. Virsan C. Necessary conditions of extremality of high order/ C.Virsan // Revue roumaine math. pures et appl. - 1973. - 18, N4. - P.591 - 611. 11. Дубовицкий А.Я. Трансляция уравнений Эйлера/ А.Я. Дубовицкий, А.А. Милютин // Ж. вычис. мат. и мат. физ. - 1969. - 9, №6. - С.1263-1284. 12. Осмоловский Н.П. Условия второго порядка слабого локального минимума в задаче оптимального управления / Н.П. Осмоловский // ДАН АН СССР. - 1975. - 225,N2. - С.259 - 262. 13. Ben-Tal A. A unified theory of first and second order conditions for extremum problems in topological vector spaces/ A. Ben-Tal, J. Zowa // Math. Progr. Study. - 1982. - 19. - P. 38 - 75. 14. Ledzewicz U. Second-order conditions for extremum problems with nonregular equality constraints/ U.Ledzewicz, H Schacttler // J. Optimiz. Theory and Appl. - 1995. - 86, N1. - P. 113 - 144. 15. Pales Zsolt. Nonsmooth optimal problems with constraints/ Pales Zsolt, V. M. Zeidan // SIAM J. Control and Optim. – 1994. – 32, №5.- P.1476 – 1502. 16. Дмитрук А.В. Квадратичные условия понтрягинского минимума в задаче оптимального управления, линейной по управлению. I. Теорема о расшифровке / А.В. Дмитрук // Изв. АН СССР. Сер. мат. - 1986. - 50, N2. - С. 284 - 312. 17. Дубовицкий А.Я. Необходимые условия сильного минимума в задачах оптимального управления с вырождением конечных и фазовых ограничений / А.Я. Дубовицкий, В.А. Дубовицкий // Успехи мат. наук. - 1985.- 40, вып.2 ( 242 ).- С.175 - 176. 18. Дубовицкий А.Я. Принцип максимума для задач оптимального управления, у которых концы фазовых траекторий лежат на границе фазовых ограничений / А.Я. Дубовицкий, В.А. Дубовицкий. – Черноголовка : Изд-во ин-та хим. физ. АН СССР, 1986. - 116 с. 19. Дубовицкий А.Я.. Принцип максимума траекторий, концы которых лежат на фазовых границах / А.Я. Дубовицкий, В.А. Дубовицкий – Черноголовка.: Отд. Ин-та хим. физ. АН СССР, 1988. - 77с. - ( Препринт/-Отд. Ин-та хим. физ. АН СССР, 1988). 20. Дубовицкий А.Я. Принцип максимума в регулярных задачах оптимального управления, у которых концы фазовых траекторий лежат на границе фазового ограничения / А.Я. Дубовицкий, В.А. Дубовицкий // Автом. и телем. - 1987. - N12. - С.25 - 33. 21. Дубовицкий А.Я. Условия поточечной нетривиальности принципа максимума в задаче оптимального управления А.Я. Дубовицкий, В.А. Дубовицкий. - Черноголовка, :1989. - 24 с. ( Препринт/ АН СССР, Ин-та хим. физ.1989 ). 22. Мохов В.Н. Особый случай принципа максимума / В.Н. Мохов // Автом. и телем. - 1976. – N 2. - С. 193 – 199. 23 Болтянский В.Г. Метод шатров в теории экстремальных задач / В.Г. Болтянский // Успехи мат. наук .- 1975. -30, N3. - С.3 - 55.

**Bibliography (transliterated):** 1. Radievskij A.E. Razvitie obshhej shemy formaltizma Dubovickogo-Miljutkina v teoreticheskom aspekteju. I / A.E. Radievskij // Meh. ta mashinobuduvannja - 2011.- №2. - S. 9 - 17. 2. Radievskij A.E. Razviti "neklassicheskikh" metodov variacionnogo ischislenija. / A.E. Radievskij // Meh. ta mashinobuduvannja - 2010.- №1. - S. 19 - 24. 3. Moskalenko A.I. Ob odnom klasse zadach optimal'nogo regulirovanija / A.I. Moskalenko // Zh. vychisl. mat. i mat. fiz. - 1969. - 9, N1.- S. 68 - 95. 4. Moskalenko A.I. K teorii optimal'nyh processov v sistemah, opisuyemykh integral'nymi uravnenijami / A.I. Moskalenko // Tr. Sibirskogo fiz. – tehn. in-ta .-Tomsk: Izd-vo TGU, 1970. - Vyp. 49. - S. 163 - 183. 5. Chukanov S.V. Principa maksimuma dlja zadach optimal'nogo upravlenija integral'nymi uravnenijami / S.V. Chukanov // Neobhodimoe uslovie v optimal'nom upravlenii. - M: Nauka, 1990. - S. 158 – 202. 6. Strekalovskij A.S. Ob uslovijah optimal'nosti v gladkoj zad-

ache optimal'nogo upravlenija v banahovom prostranstve/ A.S. Strekalovskij // Chislennye metody optimizacii. Prikl. mat. - Irkutsk, 1978. - S.76 - 88. 7. Strekalovskij A.S. K optimal'nosti po vektornomu kriteriju sistem, opisyvaemyh jellipticheskim uravneniem/ A.S. Strekalovskij // Prikl. mat. - Irkutsk.: Izd-vo SJeI SO AN SSSR, 1978. - Vyp.2. - S.71 - 79. 8. Strekalovskij A.S. K optimal'nosti po vektornomu kriteriju odnogo klacsa dinamicheskikh sistem, opisyvaemyh himicheskie processy/ A.S. Strekalovskij // Differencial'nye i integral'nye uravnenija. - Irkutsk, 1980. - S. 186 - 203. 9. Virsan C. Necessary conditions of optimality of second order for the optimal control problem with functional constraints/ C. Virsan // Revue roumaine math. pures et appl. - 1973. - 18, N5. - P.767 - 791. 10. Virsan C. Necessary conditions of extremality of high order/ C. Virsan // Revue roumaine math. pures et appl. - 1973. - 18, N4. - P. 591 - 611. 11. Dubovickij A. Ja. Transljacija uravnenij Jejlera/ A. Ja. Dubovickij, A. A. Miljutin // Zh. vychis. mat. i mat. fiz. - 1969. - 9, №6. - S.1263-1284. 12. Osmolovskij N.P. Uslovija vtorogo porjadka slabogo lokal'nogo minimuma v zadache optimal'nogo upravlenija / N.P. Osmolovskij // DAN AN SSSR. - 1975. - 225, N2. - S. 259 - 262. 13. Ben-Tal A. A unifild theory of first and second order conditions for extremum problems in topological vector spaces/ A. Ben-Tal, J. Zowa // Math. Progr. Study. - 1982. - 19. - P. 38 - 75. 14. Ledzewicz U. Second-order conditions for extremum problems with nonregular equality constraints/ U. Ledzewicz, H Schachtler // J. Optimiz. Theory and Appl. - 1995. - 86, N1. - P. 113 - 144. 15. Pales Zsolt. Nonsmooth optimal problems with constraints/ Pales Zsolt, V. M. Zeidan // SIAM J. Control and Optim. - 1994. - 32, №5. - P. 1476 - 1502. 16. Dmitruk A.V. Kvadratichnye uslovija pontrjagin-skogo minimuma v zadache optimal'nogo upravlenija, linejnoy po upravleniju. 1. Teorema o ras-shifrovke / A.V. Dmitruk // Izv. AN SSSR. Ser. mat. - 1986. - 50, N2. - S. 284 - 312. 17. Dubovickij A. Ja. Neobhodimye uslovija sil'nogo minimuma v zadachah optimal'nogo upravlenija s vyrozhdeniem koncevnyh i fazovyh ogranicenij / A. Ja. Dubovickij, V. A. Dubovickij // Uspehi mat. nauk. - 1985. - 40, vyp.2 ( 242 ). - S.175 - 176. 18. Dubovickij A. Ja. Princip maksimuma dlja zadach optimal'nogo upravlenija, u kotoryh koncy fazovyh traektorij lezhat na granice fazovyh ogranicenij / A. Ja. Dubovickij, V. A. Dubovickij. - Chernogolovka : Izd-vo in-ta him. fiz. AN SSSR, 1986. - 116 s. 19. Dubovickij A. Ja.. Princip maksimuma traektorij, koncy kotoryh lezhat na fazovyh granicah / A. Ja. Dubovickij, V. A. Dubovickij - Chernogolovka.: Otd. In-ta him. fiz. AN SSSR, 1988. - 77s. - ( Preprint/Otd. In-ta him. fiz. AN SSSR, 1988). 20. Dubovickij A. Ja. Princip maksimuma v reguljarnyh zadachah optimal'nogo upravlenija, u kotoryh koncy fazovyh traektorij lezhat na granice fazovogo ogranicenija / A. Ja. Dubovickij, V. A. Dubovickij // Avtom. i telem. - 1987. - N12. - S.25 - 33. 21. Dubovickij A. Ja. Uslovija potochechnoj netrivial'nosti principa maksimuma v zadache optimal'nogo upravlenija A. Ja. Dubovickij, V. A. Dubovickij. - Chernogolovka, :1989. - 24 s. ( Preprint / AN SSSR, In-ta him. fiz. 1989 ). 22. Mohov V.N. Osobyj sluchaj principa maksimuma / V.N. Mohov // Avtom. i telem. - 1976. - N 2. - S. 193 - 199. 23. Boltjanskij V.G. Metod shatrov v teorii jekstremal'nyh zadach / V.G. Boltjanskij // Uspehi mat. nauk. - 1975. - 30, N3. - S.3 - 55.

Радієвський А.Є.

#### РОЗВИТОК ЗАГАЛЬНОЇ СХЕМИ ФОРМАЛІЗМУ ДУБОВИЦЬКОГО-МІЛЮТИНА У ТЕОРЕТИЧНОМУ АСПЕКТІ. II

Досліджуються роботи вітчизняних та закордонних вчених стосовно розвитку "некласичних" методів варіаційного числення у рамках загальної схеми формалізму Дубовицького-Мілютіна.

Радиевский А.Е.

#### РАЗВИТИЕ ОБЩЕЙ СХЕМЫ ФОРМАЛИЗМА ДУБОВИЦКОГО-МИЛЮТИНА В ТЕОРЕТИЧЕСКОМ АСПЕКТЕ. II

Исследуются работы отечественных и зарубежных ученых по развитию "неклассических" методов вариационного исчисления в рамках общей схемы формализма Дубовицкого-Милютин.

Radievski A. E

#### DEVELOPMENT THE DENERAL SCHEM OF DUBOVITSKI-MILUTIN FORMALISM IN THEORY ASPECT. II

Analysis the works of native and foreign scientist respect the development "nonclassical" method of the calculus variations in the limits of the general scheme Dubovitski-Milutin formalism.