УДК 519.3

Радиевский А.Е., канд. техн. наук

РАЗВИТИЕ ОБЩЕЙ СХЕМЫ ФОРМАЛИЗМА ДУБОВИЦКОГО-МИЛЮТИНА В ТЕОРЕТИЧЕСКОМ АСПЕКТЕ. III

Введение. В настоящей статье приводится продолжение исследования по анализу работ отечественных и зарубежных ученых по теоретической направленности развития формализма Дубовицкого-Малютина, начатые в работе [1].

Цель исследования. Целью настоящего исследования является анализ вклада отечественных и зарубежных ученых в развитие "неклассических" методов вариационного исчисления в рамках общей схемы формализма Дубовицкого-Милютина. В методологическом аспекте исследуемые работы базируются на методологии формализма Дубовицкого-Милютина, а их основные результаты аналогичны основным положениям общей схемы формализма Дубовицкого-Милютина.

Особенности развития формализма Дубовицкого-Милютина в трудах отечественных и зарубежных ученых. *Условия оптимальности высших порядков.* Создание теории высших порядков для широкого класса задач на экстремум с ограничениями было разработано под руководством Малютина А.А. [2]. Для системы S, состоящей из набора функционалов $(f_i, i \in I)$ и оператора $g: X \to Y$, исследуются необходимые и достаточные условия произвольного порядка γ. Под порядком γ понимается любой неотрицательный липшицев функционал, равный нулю в нуле. Как необходимые, так и достаточные условия формулируются независимо от каких бы то ни было предположений на функционалы и оператор, фигурирующие в задаче. Условия порядка γ можно переписать, используя дополнительную информацию (выпуклые аппроксимации) о функционалах и операторе, задающих задачу, а затем переписать в терминах функционалов, двойственных к аппроксимациям. Отмечается, что приближение произвольных функционалов выпуклыми, а операторов - линейными позволяет свести вопрос об экстремуме в данной точке к вопросу о несовместимости системы строгих выпуклых неравенств и равенств, а также, что в процессе такого сведения важную роль играет оценка расстояния от произвольной точки до множества нулей оператора типа равенство. В исследуемой задаче рассматривается семейство порождающих функций, связь их с функциями Лагранжа, основные условия локального минимума (необходимые и достаточные), а также теорема об оценке расстояния до множества решений системы строгих нелинейных неравенств и операторного равенства. Общая теория связала для абстрактного порядка γ условия γ - необходимости и γ - достаточности с вычислением знака константы C_γ. Дальнейшие исследования связаны с "расшифровкой" знака константы C_γ, определяемой данным порядком ("метод расшифровки"). Дальнейшее развитие теории условий оптимальности высших порядков связано с работами Осмоловского Н.П. Им была сформулирована [3] проблематика, связанная с возможностью использования положений классического вариационного исчисления в теории оптимальности высших порядков. Отмечается, что введенное в [4] понятие критической вариации является недостаточным для получения оптимальных условий высшего порядка для общей абстрактной задачи, которая должна:

1. содержать способ получения условий различных порядков для локального минимума в модели, охватывающей достаточно широкий класс задач, в том числе задачи оптимального управления;

2. содержать основные понятия, пригодные для описания различных ситуаций, возникающих при исследовании минимума;

3. быть применима к задачам в их естественной постановке (не требовать чересчур жестких предположений);

4. быть теорией пар условий (включать в себя как необходимые, так и достаточные условия, а также выявлять их связь).

Отмечается, что в задачах оптимального управления к необходимым условиям первого порядка относятся условия слабого минимума (локальный принцип максимума, обобщающий уравнение Эйлера в вариационном исчислении и "понтрягинского минимума" интегральный принцип максимума (принцип максимума Понтрягина Л.С.), обобщающий условие Вейерштрасса). Условия первого порядка не всегда позволяют ответить на вопрос о наличии или отсутствии экстремали в данной точке. Дальнейшие исследования связаны с привлечением условий высших порядков. Рассматривая оптимальное управление как естественное продолжение и развитие вариационного исчисления, то достаточные условия второго порядка в вариационном исчислении предполагают выполнение усиленного условия Лежандра, а необходимые - связаны с достаточными лишь усилением знака квадратичной формы. Формулируется задача: для широкого класса задач оптимального управления при естественных предположениях получить необходимые, а также достаточные условия высших порядков, являющихся обобщением классических квадратичных условий анализа и вариационного исчисления и при этом сохранить важнейшую черту классических квадратичных условий:

- тесная связь между необходимыми и достаточными условиями, которые связаны друг с другом усилением знака неравенства (примыкающие условия);

- найти такую пару примыкающих условий, в которой достаточное условие допускало бы разрывы оптимального управления, а необходимое условие их учитывало бы;

- наличие γ - смысла (знание γ - смысла для достаточного условия позволяет в окрестности точки, удовлетворяющей этому условию, оценить минимизируемый функционал снизу на всех допустимых вариациях, т.е. получить информацию об "остроте" минимума и найти порядок γ, типичный для задач оптимального управления).

Основные результаты в [3] получены при исследовании канонической задачи Дубовицкого-Милютина [5]. Найти

$$\min J(x),\, J(x) = J(x(t_0), (x(t_1))$$

при наличии ограничений

$$\chi(x(t_0), x(t_1)) \le 0; \quad K(x(t_0), x(t_1)) = 0;\, (x(t_0), x(t_1)) \in P;$$

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u,t);\; g(x,u,t) = 0;\, G(x,u,t) \le 0;\, (x,u,t) \in Q,$$

где P, Q - открытые множества, функции x, u, χ, K, f, g, G - векторные, отрезок $[t_0, t_1]$ фиксирован.

Предполагается, что:

- минимум ищется в пространстве $W = W_1 \times L_\infty$ среди пар $w(\cdot) = (x(\cdot), u(\cdot))$ таких, что на отрезке $\left[t_0, t_1\right]$ $x(\cdot) \in W_1$, W_1 - пространство абсолютно непрерывных функций, $u(\cdot) \in L_\infty$, L_∞ - пространству ограниченных измеримых функций;
- $w^0(\cdot) = (x^0(\cdot), u^0(\cdot)) \in W$ -пара, исследуемая на минимум;
- $\mathrm{x}_0 = \mathrm{x}(\mathrm{x}(\mathrm{t}_0), \mathrm{x}_1 = \mathrm{x}(\mathrm{t}_1)$, $(x, u) = w$, $(x_0, x_1) = p$;
- функции $J(p), \chi(p), K(p)$ определены и дважды непрерывно дифференцируемы на открытом множестве P;
- функции $f(w,t), g(w,t), G(w,t)$ определены и дважды непрерывно дифференцируемы на открытом множестве Q;
- в любой точке $(w,t) \in Q$, такой, что $g(w,t) = 0$ градиенты по u, $g_{iu}(w,t)$, $G_{ju}(w,t)$, линейно независимы в точке (w,t).

Показано, что один и тот же минимум можно задать при помощи различных множеств последовательностей. Последнее позволяет подобрать для каждого типа минимума множество последовательностей, наиболее удобных для исследования. Для исследования минимума на множестве последовательностей в рассмотрение вводятся определение критического конуса и квадратичной формы на нем. Показано, что введенный в [4] критический конус является частью критического конуса, введенного в [3]. Исследуются различные типы минимумов (понтрягинский, сильный, ограниченно-сильный) и их особенности (γ - необходимость и γ - достаточность высших порядков, а также высший порядок γ). В [3] исследуется теория условий высших порядков в линейных задачах быстродействия. Впервые эта теория была сформулирована Милютиным А.А. [6] при помощи перехода к вспомогательной конечномерной задаче и применения к ней условий второго порядка. В [3] строится аналогичная теория при менее жестких предположениях, основываясь на общих условиях высших порядков. В линейных задачах быстродействия, когда управление не содержит особого режима, необходимые условия высшего порядка оказываются конечномерными и переписываются к весьма простому виду, а усиление знака неравенства превращает их в достаточные условия. В линейных задачах не выполнено условие Лежандра. Достаточность условий удается доказать, используя переход к вспомогательной нелинейной по управлению задаче при помощи одного из приемов "разовыпукления" [6]. Тот факт, что достаточные условия высших порядков можно использовать и в задачах, линейных по управлению, оказалось весьма неожиданным. Не нелинейность задачи по управлению, а отсутствие участков особого режима – решающий фактор для того, чтобы условия можно использовать. В [3] исследован ряд конкретных задач быстродействия, в которых условия высших порядков эффективно работают на отбор экстремалей. Работы [7,8] посвящены теории необходимых и достаточных условий высших порядков в задачах оптимального управления. Эта теория обобщает классическую теорию второй вариации вариационного исчисления и квадратичные условия экстремума в анализе. Как известно, классические условия второго порядка обладают тем свойством, что необходимые условия связаны с достаточным лишь усилением знака квадратичной формы. Такие условия называются примыкающими. В [7,8] приводятся пары примыкающих условий для различных типов минимума и для различных классов задач оптимального управления.

В [7] рассматривается каноническая задача оптимального управления Дубовицкого-Милютина на фиксированном отрезке времени [5]. Для этой задачи приводятся формулировки необходимых и достаточных условий высших порядков для слабого, сильного и других типов минимума. Эти условия получены на основе общей теории условий высших порядков [2]. Полученные условия имеют классический характер. Все определяется поведением квадратичных форм, отвечающих определенным наборам множителей Лагранжа. Полученные квадратичные условия допускают разрывы оптимального управления. Показано, что все особенности условий, приведенные в [7] реализуются уже в таком классе, как линейные задачи быстродействия. Этому важному и широкому изучавшему ранее классу задач посвящена работа [8]. Впервые теория необходимых и достаточных квадратичных условий для этого класса была построена А.А. Милютиным [6] при помощи специального приема, состоящего в переходе к вспомогательной конечномерной задаче и выписывания для нее известных условий второго порядка [9]. В [8] при более общих предположениях строится аналогичная теория, но основой для ее построения служит не вспомогательный прием, а общие условия высших порядков из [7]. В предположении, что исследуемая на оптимальность траектория не содержит участков особого режима. Для линейных задач быстродействия условия оптимальности оказываются конечномерными, которые после ряда преобразований приводятся к весьма простому и изящному виду. На первый взгляд достаточные условия из [7] не реализуются в линейных задачах, поскольку усиленное условие Лежандра, имеющееся в этих задачах, для линейных задач не выполняются. Однако оказывается, что эту трудность удается преодолеть и выписать соответствующие достаточные условия. В [8] φ рассмотрен ряд примеров, среди которых есть и известные задачи быстродействия для "цепочек" $x^n = u, |u| \le 1$ с закрепленными концами. Однако в отличие от известных примеров обязательное попадание в начало координат фазового пространства не требуется. Уже при $n = 3$ возникают весьма нетривиальные ответы, позволяющие в каждом случае среди множества экстремалей отобрать одну. При $n = 4$ рассмотрен случай, когда имеется целый отрезок сопряженных переменных ψ, удовлетворяющих принципу максимума и вопрос о минимуме в задаче решается при помощи максимума из двух квадратичных функций, отвечающих крайним точкам указанного отрезка.

Литература: *1. Радиевский А.Е. Развитие общей схемы формализма Дубовицкого-Милютнна в теоретическом аспекте.I. / А.Е Радиевский // Мех. та машинобудування - 2011.- №2.- С.9-17. 2. Милютин А.А. Условия высших порядков локального минимума в задачах с ограничениями/ Е.С. Левитин, А.А. Милютин, Н.П. Осмоловский // Успехи мат. наук. - 1978.- 33, N6. - С.85 - 148. 3. Осмоловский Н.П. Теория условий высших порядков в оптимальном управлении / Н.П. Осмоловский // Автореферат на соискание ученой степени доктора физико-технических наук.- Л., 1988.- 41с. 4. Дубовицкий А.Я. Задачи на экстремум при наличии ограничений / А.Я. Дубовицкий, А.А. Милютин // Ж. вычисл. мат. и мат. физ. - 1965. -5, N3. - С. 395 - 453. 5. Дубовицкий А.Я. Теория принципа максимума / А.Я. Дубовицкий, А.А. Милютин // Методы теории экстремальных задач в экономике. - М.: Наука,1981.- С.6 - 47. 6. Милютин А.А. Теория условий высших порядков для задачи быстродействия в линейной системе с постоянными коэффициентами/ А.А. Милютин // Тезисы докладов на 5 Всесоюзной конференции по управлению в механических системах. - Казань, 1985. - С.47. 7. Осмоловский Н.П. Формулировка квадратичных условий экстремума в канонической задаче оптимального управления / Н.П. Осмоловский //*

Оптимальное управление в линейных системах.- М.: Наука, 1993.- Глава 1. (С.13 – 23). 8. Осмоловский Н.П. Теория условий высших порядков в линейных задачах быстродействия / Н.П. Осмоловский // Оптимальное управление в линейных системах - М.: Наука,1993.- Глава 2. (С.23 - 59). 9. Дикусар В.В. Качественные и численные методы в принципе максимума / В.В. Дикусар, А.А. Милютин - М.: Наука, 1989. -144с.

***Bibliography (transliterated)**: 1. Radievskiy A.E. Razvitie obschey shemyi formalizma Dubovitskogo-Milyutnna v teoreticheskom aspekte.I / A.E Radievskiy // Meh. ta mashinobuduvannya - 2011.- #2.- S.9-17. 2. Milyutin A.A. Usloviya vyisshih poryadkov lokalnogo minimuma v zadachah s ogranicheniyami/ E.S. Levitin, A.A. Milyutin, N.P. Osmolovskiy // Uspehi mat.nauk. - 1978.- 33,N6. - S.85 - 148. 3. Osmolovskiy N.P. Teoriya usloviy vyisshih poryadkov v optimalnom upravlenii / N.P. Osmolovskiy // Avtoreferat na soiskanie uchenoy stepeni doktora fiziko-tehnicheskih nauk. L., 1988. 41s. 4. Dubovitskiy A.Ya. Zadachi na ekstremum pri nalichii ogranicheniy / A.Ya. Dubovitskiy, A.A. Milyutin // Zh. vyichisl. mat. i mat. fiz. 1965. 5, N3. S. 395 - 453. 5. Dubo-vitskiy A.Ya. Teoriya printsipa maksimuma / A.Ya. Dubovitskiy, A.A. Milyutin // Metodyi teorii ekstremalnyih zadach v ekonomike. M.: Nauka,1981. S.6 - 47. 6. Milyutin A.A. Teoriya usloviy vyisshih poryadkov dlya zadachi byistrodeystviya v lineynoy sisteme s postoyannyimi koeffitsi-entami/ A.A. Milyutin // Tezisyi dokladov na 5 Vsesoyuznoy konferentsii po upravleniyu v meha-nicheskih sistema. Kazan, 1985. S.47. 7. Osmolovskiy N.P. Formulirovka kvadratichnyih usloviy ekstremuma v kanonicheskoy zadache optimalnogo upravleniya / N.P. Osmolovskiy // Optimalnoe upravlenie v lineynyih sistemah. M.: Nauka, 1993.- Glava 1. (S.13 – 23). 8. Osmo-lovskiy N.P. Teoriya usloviy vyisshih poryadkov v lineynyih zadachah byistrodeystviya/ N.P. Os-molovskiy // Optimalnoe upravlenie v lineynyih sistemah M.: Nauka,1993. Glava 2. (S.23 - 59). 9. Dikusar V.V. Kachestvennyie i chislennyie metodyi v printsipe maksimuma / V.V. Dikusar, A.A. Milyutin M.: Nauka, 1989. 144s.*

Радієвський А.Є.

РОЗВИТОК ЗАГАЛЬНОЇ СХЕМИ ФОРМАЛІЗМУ ДУБОВІЦЬКОГО–МІЛЮТИНА У ТЕОРЕТИЧНОМУ АСПЕКТІ.ІІІ

Досліджуються роботи вітчизняних та закордонних вчених стосовно розвитку "некласичних" методів варіаційного числення у рамках загальної схеми формалізму Дубовіцького-Мілютіна.

Радиевский А.Е.

РАЗВИТИЕ ОБЩЕЙ СХЕМЫ ФОРМАЛИЗМА ДУБОВИЦКОГО-МИЛЮТИНА В ТЕОРЕТИЧЕСКОМ АСПЕКТЕ. III

Исследуются работы отечественных и зарубежных ученых по развитию "неклассических" методов вариационного исчисления в рамках общей схемы формализма Дубовицкого-Милютина.

Radievski A.E.

DEVELOPMENT THE DENERAL SCHEM OF DUBOVITSKI-MILUTIN FORMALISM IN THEORY ASPECT.III

Analysis the works of native and foreign scientist respect the development "nonclassical" method of the calculus variations in the limits of the general scheme Dubovitski - Milutin formalism.