

А.В. Добровольский, канд. техн. наук,  
Ю.С. Краснощек, канд. техн. наук, Харьков, Украина

## **КИНЕМАТИКА СВОБОДНООБКАТНОГО РЕЗАНИЯ ВНУТРЕННЕЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ СО СМЕЩЕННЫМ ЦЕНТРОМ ИНСТРУМЕНТА**

*Аналіз кінематики вільнообкатувального різання показав, що на окремих ділянках дуги контакту різця і заготовки швидкість різання може приймати додатне і від'ємне значення. При додатньому значенні швидкості різання відбувається знімання матеріалу, при від'ємному – вигладжування.*

*Анализ кинематики свободнообкатного резания показал, что на отдельных участках дуги контакта резца и заготовки скорость резания может принимать положительное и отрицательное значение. При положительном значении скорости резания происходит снятие материала, при отрицательном – выглаживание.*

*A.V. DOBROVOL'SKIJ, JU.S. KRASNOCHEK  
KINEMATICS OF FREE-REELING CUTTING OF THE INTERNAL SPHERICAL SURFACE  
WITH THE DISPLACED CENTER OF THE TOOL*

*The analysis of kinematics of freely rolled cutting displayed that at certain sections of the contact arc both of cutter and material treated, the cutting speed can gain positive and negative values. Treated material is removed under the conditions of cutting speed, but in the case of negative value of cutting speed-smoothing is occurred.*

Одним из высокоэффективных методов финишной обработки является свободнообкатное резание [1, 2, 3]. Данный метод относится к лезвийной обработке и позволяет качественно (с высокой точностью и низкой шероховатостью) получать некоторые сложнопрофильные поверхности. К ним можно отнести внутренние и наружные сферические поверхности, многогранные и зубчатые поверхности в упор и напроход, внутренние цилиндрические поверхности эллиптического, овального профилей и другие. Ранее нами был проведен анализ кинематики различных схем свободнообкатного резания [4, 5], а также предложена универсальная методика анализа кинематических параметров ротационного резания [6].

В данной работе исследуется кинематика свободнообкатного резания при обработке внутренней сферической поверхности (рис), когда центр симметрии режущей кромки 5 – точка  $O_1$  не лежит на оси вращения заготовки, а смещена в сторону инструмента на величину  $B$ . Для рассматриваемого случая диаметр режущей кромки  $D_u$  всегда меньше диаметра обрабатываемой сферы  $D_o$  ( $D_u < D_o$ ).

Инструмент 2 выполнен в виде чашечного резца с круговой режущей кромкой 5 и имеет возможность свободного вращения в своих опорах. Режущая кромка резца сопряжена с обработанной поверхностью 3 и профилем

поверхности резания 4. При этом обработанная поверхность охватывает режущую кромку реза.

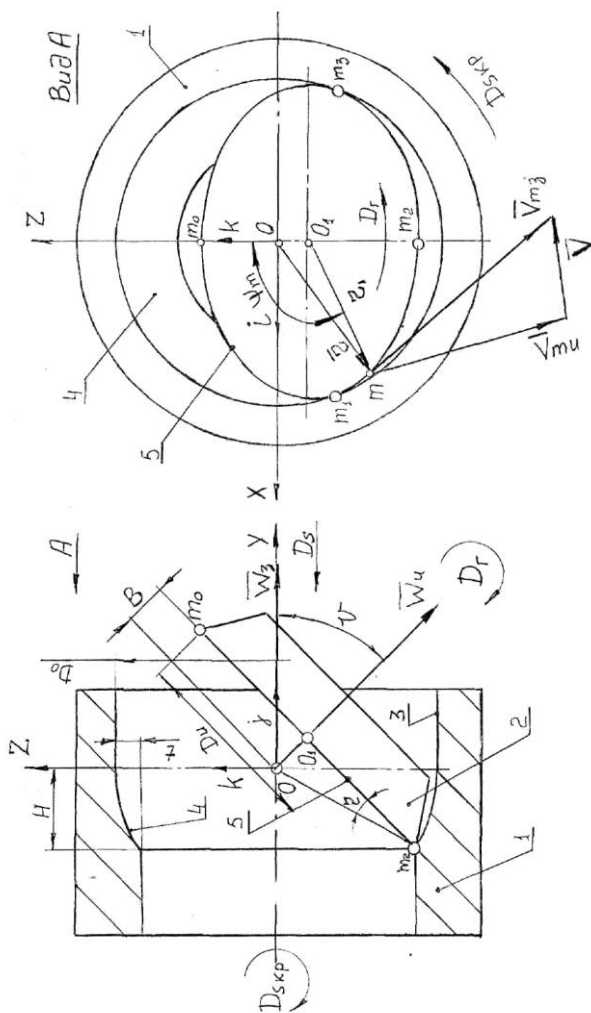


Рисунок – Схема свободнообкатного резания внутренней сферической поверхности

Ось вращения инструмента устанавливают под углом  $\nu$  к оси вращения заготовки  $I$  в одной с ней плоскости. Заготовке сообщают принудительное вращательное движение круговой подачи –  $D_{скр}$ , обычно, против часовой стрелки. Инструмент подводят на глубину врезания  $t$  к обрабатываемой поверхности и сообщают ему движение продольной подачи  $D_s$  в направлении

оси вращения заготовки в сторону обрабатываемой поверхности. После контакта режущей кромки с поверхностью резания заготовка ведет инструмент, вращая его, за счет сил сцепления между ними. Взаимные вращения заготовки и инструмента являются обкатными формообразующими движениями. При этом физическая модель не предусматривает влияние динамики процесса и кроме того сцепление режущей кромки с поверхностью резания считаем идеальным. Таким образом, равномерное вращательное движение резца считаем главным движением  $D_z$ , а скорость резания определяем как скорость проскальзывания режущей кромки относительно поверхности резания [3].

Для аналитического исследования кинематических параметров схемы резания рассмотрим вектор окружной скорости произвольной точки контакта  $m$ , принадлежащий режущей кромке 5, и вектор окружной скорости той же точки контакта, принадлежащий поверхности резания 4. Решаем известную в теоретической механике задачу о вращении системы двух твердых тел [7], какими являются резец и заготовка, вокруг неподвижных пересекающихся осей их вращения. Для отсчета вводим декартову систему координат  $XYZ$ , начало отсчета совмещаем с точкой  $O$ , расположенной в месте пересечения осей вращения заготовки и инструмента. Ось  $OY$  направляем по оси вращения заготовки в сторону, противоположную поверхности резания, ось  $OZ$  – вертикально вверх, а ось  $OX$  – перпендикулярно первым двум так, чтобы орты  $i, j, k$  координатных осей  $OX, OY, OZ$  образовали правую тройку.

Сначала рассмотрим кинематические параметры перемещения произвольной точки контакта  $m$  по поверхности резания 4, принадлежащей твердому телу-заготовке, равномерно вращающемуся вокруг своей неподвижной оси с угловой скоростью  $|\overline{W}_z|$ . Окружное положение точки  $m$  определяется угловой координатой  $\psi_m$ , отсчитанной от её крайнего верхнего положения  $m_0$  на режущей кромке в сторону вращения инструмента до текущего положения его радиуса  $O_1m$ , равного половине диаметра инструмента  $D_u$ . Радиус-вектор  $\overline{r}$  проведем из начала отсчета точки  $O$  в рассматриваемую точку  $m$ . В результате вращения заготовки вокруг своей оси, точка  $m$  имеет окружную скорость, вектор которой  $\overline{V}_{mz}$  направлен по касательной к траектории этой точки. Желая соединить с понятием угловой скорости представление о направлении оси, вокруг которой происходит вращение заготовки, введем вектор угловой скорости  $\overline{W}_z$  (его модуль можно определить как производную от угловой координаты  $\psi_m$  по времени  $\tau$ ). Направление вышеупомянутого вектора связываем с осью вращения заготовки – единственным неизменным направлением во вращающемся теле. При этом также необходимо указать в какую сторону по оси вращения направлен вектор  $\overline{W}_z$ . Общепринято [7] направлять этот вектор так, чтобы наблюдатель, смотрящий с его конца, видел вращение

заготовки в положительном направлении, т.е. против часовой стрелки при правой системе координат  $XYZ$ .

Рассматривая угловую скорость как вектор, откладываемый по оси вращения заготовки, можно определить по формуле Эйлера вектор окружной скорости  $\vec{V}_{m3}$  произвольной точки контакта  $m$ , принадлежащей вращающейся поверхности резания. Его значение будет равно векторному произведению вектора угловой скорости на радиус-вектор этой точки относительно любой точки на оси вращения, в том числе и точки  $O$  – начала отсчета

$$\vec{V}_{m3} = \vec{W}_3 \times \vec{r}. \quad (1)$$

Векторное произведение [1] можно записать через определитель вида

$$\vec{V}_{m3} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ W_{3x} & W_{3y} & W_{3z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = i(W_{3y} \cdot Z - W_{3z} \cdot Y) + j(W_{3z} \cdot X - W_{3x} \cdot Z) - k(W_{3x} \cdot Y - W_{3y} \cdot X), \quad (2)$$

где  $W_{3x}$ ;  $W_{3y}$ ;  $W_{3z}$  – проекции вектора угловой скорости соответственно на оси координат  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$ ;  $X, Y, Z$  – координаты конца радиус-вектора  $\vec{r}$  на те же оси (на рис. не показаны).

Таким образом, в (2) сомножители при ортах  $ijk$  являются проекциями вектора окружной скорости  $\vec{V}_{m3}$  на координатные оси  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$

$$V_{3mx} = W_{3y} \cdot Z - W_{3z} \cdot Y, \quad (3)$$

$$V_{3my} = W_{3z} \cdot X - W_{3x} \cdot Z, \quad (4)$$

$$V_{3mz} = W_{3x} \cdot Y - W_{3y} \cdot X. \quad (5)$$

Проекции вектора угловой скорости  $\vec{W}_3$  на координатные оси можно записать в виде

$$W_{3x} = 0, W_{3y} = \left| \vec{W}_3 \right|, W_{3z} = 0, \quad (6)$$

а координаты конца радиуса-вектора  $\vec{r}$  на те же оси выразим через текущее значение радиуса инструмента  $O_{1m}$  в виде:

$$X = 0,5 \cdot D_u \cdot \sin \psi_m \cdot \frac{1}{\cos \eta} = 0,5 \cdot D_o \cdot \sin \psi_m, \quad (7)$$

$$Y = 0,5 \cdot D_u \cdot \cos \psi_m \cdot \sin \nu \cdot \frac{1}{\cos \eta} = 0,5 \cdot D_o \cdot \cos \psi_m \cdot \sin \nu, \quad (8)$$

$$Z = 0,5 \cdot D_u \cdot \cos \psi_m \cdot \cos \nu \cdot \frac{1}{\cos \eta} = 0,5 \cdot D_o \cdot \cos \psi_m \cdot \cos \nu, \quad (9)$$

где  $\eta$  – угол при основании конуса, образованного круговым перемещением радиуса-вектора  $\vec{r}$ , опирающегося на режущую кромку, а  $\cos \eta = \frac{D_u}{D_o}$ .

Подставляя значения (6) и (7) ... (9) в (3) ... (5) получим выражения для проекции окружной скорости точки контакта  $m$  на координатные оси в виде:

$$V_{mzx} = \left| \overline{W}_3 \right| \cdot 0,5 \cdot D_o \cdot \cos \psi_m \cdot \cos \nu, \quad (10)$$

$$V_{mzy} = 0, \quad (11)$$

$$V_{mzz} = - \left| \overline{W}_3 \right| \cdot 0,5 \cdot D_o \cdot \sin \psi_m. \quad (12)$$

Теперь рассмотрим скорость той же точки контакта, но принадлежащей режущей кромке 5. В результате вращения инструмента точка  $m$  имеет окружную скорость, вектор которой  $\overline{V}_{mu}$  направлен по касательной к траектории этой точки в процессе ее кругового перемещения вокруг оси инструмента с угловой скоростью  $\left| \overline{W}_u \right|$ . Вектор этой скорости аналогично совмещаем с осью вращения инструмента, ориентируя его в положительном направлении.

Окружное положение точки контакта  $m$  определяется той же угловой координатой  $\psi_m$ , а радиус-вектор  $\overline{r}_1$  проведем из точки  $O_I$  в рассматриваемую точку, при этом  $\left| \overline{r}_1 \right| = O_I m = 0,5 \cdot D_u$ .

Вектор окружной скорости  $\overline{V}_{mu}$  произвольной точки контакта  $m$  вращающейся режущей кромки можно определить аналогично по векторной формуле Эйлера:

$$\overline{V}_{mu} = \overline{W}_u \times \overline{r}_1. \quad (13)$$

Проекции вектора угловой скорости  $\overline{W}_u$  на координатные оси можно записать в виде:

$$W_{ux} = 0; W_{uy} = \left| \overline{W}_u \right| \cdot \cos \nu; W_{uz} = \left| \overline{W}_u \right| \cdot \sin \nu, \quad (14)$$

а координаты конца радиуса-вектора  $\overline{r}_1$  на те же оси будут равны:

$$X_1 = 0,5 D_u \cdot \sin \psi_m, \quad (15)$$

$$Y_1 = 0,5 D_u \cdot \cos \psi_m \cdot \sin \nu + B \cdot \cos \nu, \quad (16)$$

$$Z_1 = 0,5 D_u \cdot \cos \psi_m \cdot \cos \nu + B \cdot \sin \nu. \quad (17)$$

Проекции вектора окружной скорости  $\overline{V}_{mu}$  точки контакта  $m$  на координатные оси запишем аналогично (3) ... (5):

$$V_{mux} = W_{uy} \cdot Z_1 - W_{uz} \cdot Y_1, \quad (18)$$

$$V_{muy} = W_{uz} \cdot X_1 - W_{ux} \cdot Z_1, \quad (19)$$

$$V_{muz} = W_{ux} \cdot Y_1 - W_{uy} \cdot X_1. \quad (20)$$

Подставляя в (18) ... (20) значения (14) и (15) ... (17), получим выражения для проекции вектора  $\overline{V}_{mu}$  в точке  $m$ :

$$V_{mux} = \left| \overline{W}_u \right| \cdot 0,5 \cdot D_u \cdot \cos \psi_m, \quad (21)$$

$$V_{muy} = -\left| \overline{W}_u \right| \cdot 0,5 \cdot D_u \cdot \sin \psi_m \cdot \sin \nu, \quad (22)$$

$$V_{muz} = \left| \overline{W}_u \right| \cdot 0,5 \cdot D_u \cdot \sin \psi_m \cdot \cos \nu. \quad (23)$$

К произвольной точке контакта  $m$  приложены одновременно два вектора скоростей  $\overline{V}_{mz}$  и  $\overline{V}_{mu}$ , следовательно, здесь имеет место проскальзывание режущей кромки 5 относительно поверхности резания 4 (рис. вид А), вектор скорости которого  $\overline{V}$  можно определить, как геометрическую разность исходных векторов

$$\overline{V} = \overline{V}_{mz} - \overline{V}_{mu}. \quad (24)$$

Зная проекции векторов  $\overline{V}_{mz}$  (10) ... (12) на координатные оси и  $\overline{V}_{mu}$  (21) ... (23) на те же оси, а также учитывая тот факт, что они приложены в одной и той же точке  $m$ , запишем геометрическую разность (24) в виде проекции вектора скорости проскальзывания:

$$V_x = 0,5 \cdot \cos \psi_m \cdot \left| \overline{W}_z \right| \cdot D_o \cdot \cos \nu - \left| \overline{W}_u \right| \cdot D_u, \quad (25)$$

$$V_y = \left| \overline{W}_u \right| \cdot 0,5 \cdot D_u \cdot \sin \psi_m \cdot \sin \nu, \quad (26)$$

$$V_z = 0,5 \cdot \sin \psi_m \cdot \left| \overline{W}_u \right| \cdot D_u \cdot \cos \nu - \left| \overline{W}_z \right| \cdot D_o. \quad (27)$$

Проанализируем составляющую скорость проскальзывания  $V_x$  (25), которая расположена в плоскости режущей кромки 5 и является «стационарным проскальзыванием» [4]. Она является сложной функцией  $V_x = f\left(\left| \overline{W}_z \right|; \left| \overline{W}_u \right|; D_o; D_u; \nu\right)$ , где величина  $\left| \overline{W}_z \right|$  задана частотой вращения шпинделя станка, параметры  $D_o, D_u, \nu$  заданы геометрическими условиями схемы резания, а угловую скорость  $\left| \overline{W}_u \right| = f\left(\left| \overline{W}_z \right|; D_o; D_u; \nu\right)$  необходимо определить аналитически. Для этого рассмотрим интегральное значение составляющей скорости проскальзывания  $V_x$  за один полный оборот инструмента, считая, что виртуально контакт осуществляется по полной окружности  $0 < \psi_m < 2\pi$ . При этом помним начальные условия моделирования схемы резания – динамику процесса не учитываем, а сцепление режущей кромки с поверхностью резания считаем идеальным. Кроме того учитываем, что векторно сохраняется баланс «стационарного проскальзывания» резца, т.к. его считаем абсолютно твердым телом. Тогда:

$$\sum V_x = 0,5 \cdot \left( \left| \overline{W}_z \right| \cdot D_o \cdot \cos \nu - \left| \overline{W}_u \right| \cdot D_u \right) \int_0^{2\pi} \cos \psi_m \cdot d\psi = 0. \quad (28)$$

Из уравнения (28) получим искомое в виде:

$$|\overline{W}_u| = |\overline{W}_z| \frac{D_o}{D_u} \cdot \cos \nu . \quad (29)$$

Скорость «стационарного проскальзывания»  $V_x$  (25) не может являться составной частью скорости свободнообкатного резания, ввиду ее расположения в плоскости режущей кромки 5, а также в силу того, что любой процесс резания металлов с отходом стружки может осуществляться только при условии направленности вектора скорости резания на режущую кромку или переднюю поверхность резца. Более подробный анализ скорости проскальзывания при свободнообкатном резании приведен в работах [4,5].

Скорость свободнообкатного резания трактуется как скорость проскальзывания режущей кромки относительно поверхности резания в любой точке контакта  $m$  [3]. Зная составляющие  $V_y$  и  $V_z$  (26, 27) и учитывая (29), определим значение скорости резания:

$$V = \sqrt{V_y^2 + V_z^2} = |\overline{W}_z| \cdot 0,5 \cdot D_o \cdot \sin \psi_m \cdot \sin \nu . \quad (30)$$

Выразим модуль угловой скорости заготовки  $|\overline{W}_z|$  через её частоту вращения  $n_z$ :

$$|\overline{W}_z| = 2\pi n_z . \quad (31)$$

Тогда искомая скорость свободнообкатного резания в окончательном традиционном виде с учетом (31), а также коэффициента перевода значений диаметра из миллиметров в метры, принимает вид:

$$V = \frac{\pi D_o \cdot n_z}{1000} \cdot \sin \psi_m \cdot \sin \nu . \quad (32)$$

Следует также отметить, что приведенные выше аналитические зависимости полностью сохраняют свой качественный и количественный вид при рассмотрении аналогичной схемы резания для обработки внутренней сферической поверхности со смещением центра резца  $O_1$  в сторону поверхности резания на величину  $B$  (на рис. не показано). Идентичность зависимостей связана с осесимметричностью (центросимметричностью) рассматриваемых схем.

Технологическая область применения, кинематические параметры и их особенности приведенной схемы резания не отличаются от ранее рассматриваемых схем [1 ... 5], что свидетельствует об универсальности предлагаемой методики. Кроме того анализ типовой схемы ротационного резания (со скрещающимися осями инструмента и заготовки) [6] показал качественно аналогичные результаты. Это позволяет надеяться на широкое использование данной методики для определения кинематических параметров всего разнообразия схем ротационного резания.

Результаты аналитических исследований достаточно полно отражают не только все кинематические, но и некоторые физические особенности приведенных схем резания, а также совпадают с экспериментальными данными. Для получения более полных сведений о процессе свободнообкатного резания весьма перспективным является исследование отдельных физических явлений в зоне резания – струкообразования и выглаживания, стойкости и износа, динамики и т.д.

**Список использованных источников:** 1. Патент RU 2311991С2, Российская федерация. *Добровольский А.В., Дмитриев С.И.* Способ высокоточной обработки сферической поверхности. – № 2004137691/02; Заявл. 23.12.2004; Опубл. 10.12.2007, Бюл. № 34. 2. *Добровольский А.В. и др.* Скорость резания при профилировании поверхностей свободнообкатным резцом. – Известия ВУЗОВ № 12. – М.: Манинстроение. – 1988. – С.111 ... 117. 3. *Добровольский А.В., Краснощек Ю.С.* Обоснование кинематической модели свободнообкатного резания // Резание и инструмент в технологических системах. Международный научно-техн. сборник. – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2008. Вып. 74. – С. 126 ... 132. 4. *Добровольский А.В., Краснощек Ю.С.* Кинематика свободнообкатного резания с пересекающимися осями для обработки внутренних поверхностей // Резание и инструмент в технологических системах. Международный научно - техн. сборник. – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2008. Вып. 74. – С. 116 ... 125. 5. *Добровольский А.В., Краснощек Ю.С.* Кинематика свободнообкатного резания при обработке наружной сферической поверхности // Высокие технологии в машиностроении: Збірник наукових праць НТУ «ХПІ», - Харків, 2009. – Вип. 1(18)-С. 38...46. 6. *Добровольский А.В., Краснощек Ю.С.* К вопросу об анализе кинематики ротационного точения // Резание и инструмент в технологических системах: Междунар. научн.-техн. сб. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2009. – Вып. 76. – С. 26...33. 7. *Лойцянский Л.Г., Лурье А.И.* Курс теоретической механики. Т. 1. Статика и кинематика. – М.: Наука, 1982. – 352 с.

*Поступила в редколлегию 16.05.2011*

**Bibliography (transliterated):** 1. Patent RU 2311991C2, Rossijskaja federacija. *Dobrovol'skij A.V., Dmitriev S.I.* Sposob vysokotochnoj obrabotki sfericheskoj poverhnosti. – № 2004137691/02; Zajavl. 23.12.2004; Opubl. 10.12.2007, Bjul. № 34. 2. *Dobrovol'skij A.V. i dr.* Skorost' rezanija pri profilirovanii poverhnostej svobodnoobkatnym rezcom. – Izvestija VUZOV № 12. – M.: Maninostroenie. – 1988. – S.111 ... 117. 3. *Dobrovol'skij A.V., Krasnowek Ju.S.* Obosnovanie kinematičeskoj modeli svobodnoobkatnogo rezanija // Rezanie i instrument v tehnologičeskikh sistemah. Mezhdunarodnyj nauchno-tehn. sbornik. – Har'kov: NTU «HPI». – 2008. Vyp. 74. – S. 126 ... 132. 4. *Dobrovol'skij A.V., Krasnowek Ju.S.* Kinematika svobodnoobkatnogo rezanija s peresekajuwimisja osjami dlja obrabotki vnutrennih poverhnostej // Rezanie i instrument v tehnologičeskikh sistemah. Mezhdunarodnyj nauchno-tehn. sbornik. – Har'kov: NTU «HPI». – 2008. Vyp. 74. – S. 116 ... 125. 5. *Dobrovol'skij A.V., Krasnowek Ju.S.* Kinematika svobodnoobkatnogo rezanija pri obrabotke naruzhnoj sfericheskoj poverhnosti // Visoki tehnologii v mashinobuduvanni: Zbirnik naukovih prac' NTU «HPI», - Harkiv, 2009. – Vip. 1(18)-S. 38...46. 6. *Dobrovol'skij A.V., Krasnowek Ju.S.* K voprosu ob analize kinematiki rotacionnogo tochenija // Rezanie i instrument v tehnologičeskikh sistemah: Mezhdunar. nauchn.-tehn. sb. – Har'kov: NTU «HPI», 2009. – Vyp. 76. – S. 26...33. 7. *Lojčjanskij L.G., Lur'e A.I.* Kurs teoretičeskoj mehaniki. T. 1. Statika i kinematika. – M.: Nauka, 1982. – 352 s.