

УДК 621.941

**А.А. ОРГИЯН**, д-р техн. наук,  
**И.М. ТВОРИЩУК**, Одесса, Украина

## **ИНТЕНСИВНОСТЬ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ РЕЗОНАНСОВ ПРИ ПРЕРЫВИСТОМ РЕЗАНИИ**

В статті вивчені умови збудження параметричних резонансів, а також їх інтенсивність при розточуванні переривчастих поверхонь. Переривчастість поверхні що обробляються, описується кусково-постійною функцією  $\Phi(t)$ . Розрахунки за запропонованою моделлю добре узгоджуються з експериментальними даними при варіюванні режимів різання.

В статье изучены условия возбуждения параметрических резонансов, а также их интенсивность при растачивании прерывистых поверхностей. Прерывистость растачиваемой поверхности описывается кусочно-постоянной функцией  $\Phi(t)$ . Расчёты по предложенной модели хорошо согласуются с экспериментальными данными при варьировании режимов резания.

In this paper we study the excitation conditions of parametric resonance, as well as their intensities when boring discontinuous surfaces. Calculated discontinuity surface is described by a piecewise constant function  $\Phi(t)$ . Calculations on the proposed model agree to a degree meant with the experimental data by varying the cutting conditions.

Прерывистость обрабатываемой поверхности приводит к периодическому повторению процессов врезания и выхода инструмента, нарушая тем самым стационарность замкнутой динамической системы станка и вызывая появление интенсивных внешних воздействий на процесс резания. Период этих воздействий задаётся частотой входа и выхода режущих лезвий. Они возбуждают колебания станка, уровень которых значительно выше, чем при обработке сплошных поверхностей в аналогичных условиях.

Растачивание отверстий с прерывистой поверхностью является достаточно распространённой в машиностроении операцией, выполняемой от отделочно-расточных, координатно-расточных и токарных станках. Детали с прерывистой поверхностью обработки составляют до 12% от общего числа деталей, на которые налажены отделочно-расточные станки [1]. К числу таких деталей относятся шатуны, кронштейны, крышки, блоки

цилиндров, стаканы подшипников, шлицевые шестерни, гильзы цилиндров и другие, входящие в состав продукции машиностроительных заводов массового производства. Для рассмотренных деталей количество прерываний обрабатываемой поверхности на один оборот изменяется от 1 до 20.

Расчёты и эксперименты показывают, что колебания привода вращения токарных станков в условиях прерывистого резания зависят от частоты следования и формы импульсов. При наличии зазора в соединении элементов привода динамическая система станка становится нелинейной. Режимы работы, при которых зазоры раскрываются, сопровождаются повышенным шумом, износом соединений и режущего инструмента, вследствие чего такие режимы не допустимы.

Экспериментальное исследование колебаний при тонком растачивании отверстий с прерывистой поверхностью, выполнено на стенде, собранном в двух вариантах: с вращающейся и невращающейся борштангой. Невращающаяся борштанга устанавливалась так, что составляющие  $P_y$  и  $P_z$  силы резания были ориентированы по направлениям главных осей жёсткости упругой системы станка. Основная серия опытов проводилась при растачивании отверстий в образцах, выполненных из стали 45 с числом одинаково расположенных пазов  $j=1,6$  и 20. Отдельные эксперименты проводились на образцах из серого чугуна СЧ-18, из титанового сплава ВТ-5 и из бронзы ОЦС 6-6-3, на образцах с  $j=3,4$  и 5, а также на образцах с пазами неодинаковой ширины. Соотношение между шириной паза  $a_n$  и шириной выступа  $a_b$ , характеризующее величиной  $g = a_n / (a_n + a_b)$ , изменялось в пределах от  $g = 0,1$  до  $g = 0,5$ . Среднее значение диаметра обрабатываемого отверстия составляло 0,04 м. Растачивание стальных образцов выполнялось борштангами диаметром 0,03 м с  $l_1/d_1 = 3$  и 4, оснащёнными резцами из сплава ТЗОК4 со следующей геометрией  $\varphi = 60^\circ$ ,  $\varphi_1 = 10^\circ$ ,  $\alpha = 8^\circ$ ,  $\alpha_1 = 12^\circ$ ,  $\gamma = -3^\circ$ ,  $\lambda = 15^\circ$ ,  $\eta = 0,1$  мм. Скорость резания изменялась от 1,67 до 3,34 м/с с шагом 0,083 м/с при постоянной подаче 0,025 мм/об и двух значениях глубины резания: 0,05 и 0,1 мм.

Основные закономерности развития колебаний не изменяются при переходе от растачивания невращающейся борштангой, к растачиванию вращающейся борштангой и при изменении материала образца. Характер

колебаний сохраняется и при переходе к растачиванию образцов с пазами неодинаковой ширины. Рассмотрим поэтому результаты основной серии опытов, выполненных с применением невращающихся борштанг.

Найдены значения параметров при  $l_1/d_1=3$  и 4: радиальная жёсткость у резца  $C$ ,  $H/мкм$  – 6 и 4; первая собственная частота  $f_0$ , Гц – 1100 и 750; логарифмический декремент колебаний  $\delta$ -0,10 и 0,09.

По осциллограммам, полученным при растачивании образцов с одним пазом, установлен характер колебаний: периодические изменения состояний равновесия и высокочастотные колебания. Декремент колебаний во время резания отличается от измеренного при прохождении паза и может быть выражен через параметры замкнутой динамической системы.

Считая УС одномерной, запишем уравнения замкнутой динамической системы станка

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + cy = P,$$

$$T_p \frac{dp}{dt} + P = -K_p y, \quad (1)$$

где  $y$  – относительные перемещения резца и детали;

$P$  – главная составляющая силы резания;

$K_p=K_{0d}$  – коэффициент резания;

$K_0$  – удельная сила резания;

$d$  – ширина стружки;

$T_p=a/v$  – инерционная постоянная стружкообразования;

$a$  – толщина стружки;

$v$  – скорость резания;

$m$  – приведённая масса системы шпиндель-борштанга;

$b$  – коэффициент демпфирования;

$c$  – жёсткость УС.

При переходе к безразмерному времени  $\tau = \omega_0 t$ , уравнения (1) примут вид:

$$m\omega_0^2 \frac{d^2 y}{d\tau^2} + b\omega_0 \frac{dy}{d\tau} + cy = P,$$

$$T_p \omega_0 \frac{dp}{d\tau} + P = -K_p \cdot y, \quad (2)$$

Разделив первое уравнение из (2)  $m\omega_0^2$  и введя обозначения  $\chi = \frac{b}{m\omega_0}$ , а обозначив безразмерную постоянную стружкообразования  $\theta = \omega_0 T_p$ , получим из уравнения из (2):

$$\ddot{y} + \chi \cdot \dot{y} + y = \frac{P}{C}, \quad (3)$$

$$\theta \dot{P} + P = -K_p \cdot y.$$

В уравнении (3) через « $\dot{\phantom{y}}$ », « $\ddot{\phantom{y}}$ » обозначены производные по времени.

Из уравнения (3) после приведения к одному уравнению, получим:

$$\theta \cdot \ddot{y} + (1 + \theta \cdot \chi) \dot{y} + \pi^2 (\theta + \chi) y + (1 + \gamma) y = 0, \quad (4)$$

где  $\gamma = \frac{C}{K_p}$  – коэффициент связанности.

Подставляя в уравнение (4) искомое решение в виде  $y = \exp(-\frac{\Delta\tau}{2\pi}) \cdot \sin v\tau$  и исключая из уравнения гармонического баланса  $v$ , получим уравнение для определения логарифмического декремента колебаний при резании:

$$\theta\delta^3 - 2\pi(1 + \theta \cdot \chi)\delta^2 + \pi^2(\theta + \theta^{-1} + 3 \cdot \chi^2 + \theta \cdot \chi^2)\delta - \pi^3 \Delta\gamma = 0. \quad (5)$$

Из - за малости  $\delta$  можно ограничиться линейными членами и, как показала численная оценка, получить с погрешностью, не превышающей 3%, значение логарифмического декремента колебаний по формуле

$$\delta = \frac{\pi \cdot \Delta\gamma}{\theta + \theta^{-1} + 3\chi + \theta\chi^2}. \quad (6)$$

Для борштанги с  $l_1/d_1$  при  $t=0.05$  мм расчёт даёт  $\delta=0,072$ , а эксперимент –  $\delta=0,07$ . Для борштанги с  $l_1/d_1=4$  получены соответственно значения 0,047 и 0,04. Поскольку всегда  $\theta+\theta^{-1} \geq 2$  можно для оценок пренебречь в (6) членами знаменателя, содержащими  $\chi$ , и получить:

$$\delta = \frac{\pi \cdot \Delta\gamma}{\theta + \theta^{-1}}. \quad (7)$$

Отметим, что непосредственно после врезания колебания носят декрементный характер даже при таких условиях обработки, которые при растачивании сплошных поверхностей приводят к возбуждению автоколебаний. Это объясняется синхронизирующим действием ударных импульсов при врезании, благодаря которому колебания на двух последовательных оборотах оказываются почти синфазными, и механизмы резания по следу стабилизируют замкнутую динамическую систему.

С ростом глубины резания увеличивается смещение положения равновесия (отжим резца), а также возрастает начальное значение амплитуд высокочастотных колебаний. Эта закономерность сохраняется и при обработке образцов с большим числом пазов, когда колебания мало изменяют свой уровень за время прохождения выступа и паза. Для таких образцов на уровень колебаний существенно влияет значение их фазы в момент врезания и выхода резца, а потому значительны изменения уровня колебаний при варьировании частоты вращения шпинделя.

Результаты эксперимента представлены в виде зависимостей амплитуд изгибных колебаний борштанг от скорости резания. На рисунке нанесены также шкалы значений отношения собственной частоты колебаний борштанги  $f_0$  к частоте возмущения  $f_{в}$ , вызываемой прерываниями процесса резания. Малые значения  $f_0/f_{в}$  соответствует обработке образцов с  $j=20$ , а большие –  $j=6$ . При малых значениях отношения  $f_0/f_{в}$  максимумы амплитуды колебаний достигаются, когда  $f_0/f_{в}$  кратно 0,5. При больших значениях этого отношения максимумы амплитуды достигаются только при целых его значениях. Максимальные значения амплитуд колебаний при растачивании прерывистой поверхности в 2-4 раза больше, чем при растачивании сплошной поверхности. В зоне больших значений отношения  $f_0/f_{в}$  наблюдается чередование

интенсивностей максимумов: при нечётных значениях  $f_0 / f_B$  амплитуды колебаний больше, чем при чётных.

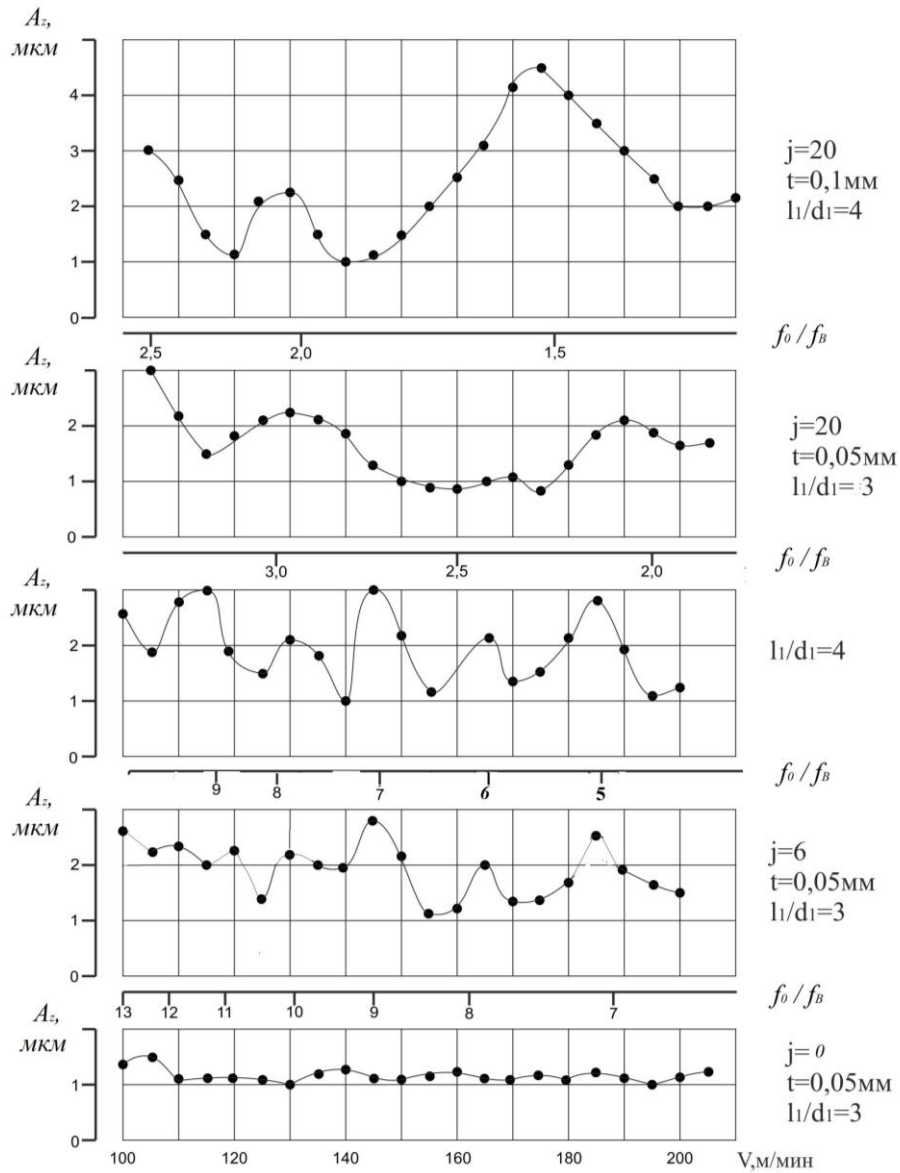


Рисунок – Зависимость амплитуды колебаний от скорости резания при растачивании прерывистых и сплошных поверхностей

Экспериментальные данные сопоставлены с результатом исследований решений системы уравнений движений, при составлении которых УС рассматривается как система с двумя степенями свободы,

соответствующими направлениям главных осей изгибной податливости борштанги:

$$\begin{aligned} m_1 \cdot \ddot{z} + \eta_1 \cdot \dot{z} + c_1 z &= P_z \Phi(t) + P_1(t), \\ m_1 \ddot{y} + \eta_1 \dot{y} + c_1 y &= \mu \cdot P_z \Phi(t) + P_2(t), \\ T_p \dot{P}_z + P_z &= (-K_p y - \beta \cdot \dot{z} + K_p W) \Phi(t). \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь  $P_1$  и  $P_2$  – заданные внешние силовые воздействия на УС,  $W$  – приведённое значение заданной толщины срезаемого слоя,  $\beta$  – определён экспериментально как  $dP_z/d\dot{z}$  в зависимости от скорости резания, а  $\Phi(t)$  – функция периода  $T_B = (a_n + a_B)/V$ , описывающая чередования замкнутых ( $\Phi=1$ ) и незамкнутых ( $\Phi=0$ ) состояний динамической системы. Последняя функция определяется соотношениями

$$\Phi(t) = \begin{cases} 0 & iT_B < t < (i+g)T_B \\ \text{при} & \\ 1 & (i+g)T_B < t < (i+1)T_B \end{cases} \quad (9)$$

$i = 0, 1, 2, \dots$

При записи уравнений движения принято, что составляющие силы резания связаны соотношением  $P_y = \mu \cdot P_z$  и что тангенциальные смещения вершины резца, вызванные упругими деформациями, не изменяют продолжительности резания и его прерывания.

Моделирование уравнений на АВМ приводит к результатам, вполне удовлетворительно согласующимся с экспериментальными данными по положению и интенсивности максимумов колебаний. Расхождение с экспериментом возрастает в зоне малых значений  $f_0/f_B$ , где очевидно должна проявляться ограниченность допущения о независимости моментов изменения состояний системы от тангенциальных колебаний.

Моделирование показывает, что принятый вид функции  $\Phi(t)$  вовсе не равносителен допущению о воздействии на УС прямоугольных импульсов. Запись переменной  $P_z$  позволяет установить наклон участков нарастания и убывания силы резания, зависящий от значений параметров динамической системы.

Исследования решений на модели приводят к выводу о слабом влиянии скоростной зависимости силы резания на положения и интенсивность максимумов амплитуды колебаний. Этот вывод согласуется с результатами У.Найта и С.Тобайса [2], полученными при обработке

сплошних поверхностей, и является одним из необходимых условий для рассмотрения моделей замкнутой динамической системы станка, включающей УС с одной степенью свободы. Изменения параметра  $g$ , характеризующего временную форму возмущений при прерываниях процесса резания, приводит к небольшим изменениям положения и интенсивности максимумов амплитуды колебаний. Сравнение колебаний, возникающих при обработке прерывистой и сплошной поверхностей, показывает, что внешние воздействия на УС слабо влияют на колебания при прерывистой обработке. Закономерности изменения уровня колебаний, показывают, что при обработке прерывистых поверхностей источниками колебаний, является внешние воздействия на процесс резания ( $K_p W\Phi(t)$ ) и параметрические возмущения, причём последние оказываются существенными лишь при малых значениях  $f_0/f_B$  (в наших опытах при  $f_0/f_B \leq 2,5$ ). Объяснение ряда закономерностей можно дать основываясь на рассмотрении спектра возмущений.

Фурье – разложение функции (9) имеет вид:

$$\Phi(t) = 1 - g + \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{\cos 2ig\pi - 1}{i} \sin \frac{2i\pi t}{T_B} - \frac{\sin 2ig\pi}{i} \cos \frac{2i\pi t}{T_B} \right). \quad (10)$$

Если положить в этом выражении  $g = 0,5$  то получим

$$\Phi(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i} \sin \frac{2i\pi t}{T_B}, \quad (11)$$

то есть при ширине паза, мало отличающееся от расстояния между пазами, в разложении сохраняются только гармоники нечётного порядка. Отсюда ясна причина, по которой уровень вынужденных колебаний при нечётных значениях  $f_0/f_B$  заметно больше, чем при чётных.

Для оценки критических значений коэффициента возбуждения параметрических резонансов рассмотрим систему с одной степенью свободы, принимая статическую характеристику процесса резания. Условия параметрической устойчивости получим для однородного уравнения

$$m \cdot \ddot{y} + b \cdot \dot{y} + [c + \mu \cdot K_p \Phi(t)]y = 0, \quad (12)$$

используя метод сшивания решений, применённый в работах при исследовании частных случаев этой задачи [3].

Выполнив подстановку Эйлера



$$y = u \cdot \exp\left(-\frac{bt}{2m}\right), \quad (13)$$

получим для функции  $u(t)$  уравнение Хилла с кусочно-постоянным параметрическим возмущением

$$\ddot{u} + P_g^2 [1 - 2 \cdot \varepsilon \cdot \Phi_1(t)] \cdot u = 0, \quad (14)$$

где 
$$P_g^2 = \frac{c}{m} + \frac{\mu K_p}{2m} - \frac{b^2}{4m^2},$$

$$2\varepsilon = \frac{\mu \cdot K_p}{2(c + \mu \cdot K_p)},$$

$$\Phi(t) = 1 - 2\Phi(t) \begin{cases} 1 & \text{при } iT_B < t < (i+g)T_B \\ -1 & \text{при } (i+g)T_B < t < (i+1)T_B. \end{cases}$$

Обозначая функцию  $u$  индексами, соответствующими значениями  $\Phi(t)$ , запишем условия сшивания

$$\begin{aligned} u_1(g \cdot T_B) &= u_{-1}(g \cdot T_B), & u_{-1}(T_B) &= Su_1(0), \\ \dot{u}_1(g \cdot T_B) &= \dot{u}_{-1}(g \cdot T_B), & \dot{u}_{-1}(T_B) &= S\dot{u}_{-1}(0). \end{aligned} \quad (15)$$

Величина  $S$ , описывающая нарастание решений уравнения (14), удовлетворяет характеристическому уравнению

$$S^2 + 2SN + 1 = 0, \quad (16)$$

где

$$N = \frac{\cos(gP_g T_B \sqrt{1+2\varepsilon}) \cdot \cos[(1-g)P_g T_B \sqrt{1-2\varepsilon}] - \sin(gP_g T_B \sqrt{1+2\varepsilon}) \cdot \sin[(1-g)P_g T_B \sqrt{1-2\varepsilon}]}{\sqrt{1-4\varepsilon^2}}. \quad (17)$$

Учитывая зависимость (13), получим условие устойчивости

$$|N| < c \cdot h \cdot (\delta \cdot f_0 / f_B). \quad (18)$$

В отличие от гармонического параметрического возмущения, при котором критические значения коэффициента возбуждения  $\varepsilon_n^*$  монотонно возрастают с ростом номера  $n$  области параметрической неустойчивости, кусочно-постоянное параметрическое возмущение приводит немонотонному изменению  $\varepsilon_n^*$  при увеличении  $n$ . Причиной этого следует считать возможность возбуждения параметрических резонансов низших

порядков высшими гармониками функции  $\Phi(t)$ . Если, например,  $f_0 / f_B = n/2$ , то главный параметрический резонанс может возбуждаться  $n$ -ой гармоникой функции  $\Phi(t)$ . Амплитуда этой гармоники равна  $2\sqrt{2(1 - \cos 2ng\pi / n\pi)}$ , а условие устойчивости принимает вид:

$$\varepsilon < n\pi \cdot \varepsilon_1^* / 2\sqrt{2(1 - \cos 2ng\pi)}, \quad (19)$$

где  $\varepsilon_1^*$  – критическое значение коэффициента возбуждения при гармоническом возмущении.

### Выводы.

1. Приведены экспериментальные исследования колебаний при тонком растачивании отверстий с прерывистой поверхностью. Установлен характер колебаний: периодические изменения состояний равновесия и высокочастотные колебания.

2. Декремент колебаний во время резания отличается от измеренного во время прохождения паза и может быть выражен через параметры замкнутой динамической системы. Определена зависимость амплитуды колебаний от скорости резания. С помощью разложения в ряд Фурье кусочно-постоянной функции  $\Phi(t)$  определены гармоники, влияющие на интенсивность параметрических резонансов.

3. В целом, рассмотренная расчётная методика приводит к результатам, согласующимся с данными опыта. Рекомендации по расчёту колебаний при растачивании прерывистых поверхностей с помощью АВМ и по определению благоприятных скоростей резания используются при проектировании отделочно-расточных станков.

**Список использованных источников:** 1. Копелев Ю.Ф., Оргиян А.А. «Колебания при тонком растачивании прерывистых поверхностей» - Станки и инструменты 1972 г., М10, с. 13-15. 2. Knight W.A., Tobias S.A. Tensional vibrations and machine tool satiability// Advances in machine tool decagon research / Proceedings of the 10t international NTDR conference. – Oxford, 1970. – ptg. 299–323. 3. Стрелков С.П. Введение в теорию колебаний. – М.; Л.; Изд-во – Техн. теорет. лит., 1960. – 344 с.

**Bibliography (transliterated):** 1. Kopelev Ju.F., Orgijan A.A. «Kolebanija pri tonkom rastachivaniipreryvistyh poverhnostej» - Stanki i instrumenty 1972 g., M10, s. 13-15. 2. Knight W.A., Tobias S.A. Tensional vibrations and machine tool satiability// Advances in machine tool decagon research / Proceedings of the 10t international NTDR conference. – Oxford, 1970. – ptg. 299– 323. 3. Strelkov S.P. Vvedenie v teoriju kolebanij. – М.; Л.; Изд-во – Tehn. teoret. lit., 1960. – 344 s.