

*В.М. УДОВИЧЕНКО*, канд. техн. наук, НТУ "ХПІ"

## ДВОВИМІРНІ ОПЕРАТОРИ ПЕРЕТВОРЕНЬ ФУР'Є ТА ХАРТЛІ НА ПРЯМОКУТНІЙ СІТЦІ НА ОСНОВІ МЕТОДУ ФАЙЛОНА ТА В-СПЛАЙНУ П'ЯТОГО СТЕПЕНЯ

Побудовано двовимірні фінитні дискретно-неперервні та дискретні оператори перетворень Фур'є та Хартлі на основі методу Файлона (Filon) та  $B$ -сплайну п'ятого степеня. Наведені теореми та тестовий приклад.

In this paper the operators of calculation of two-dimensional finite discretely-continual and discretely Fourier Transform and the Hartley Transform on the basis Filon's metod and of B-spline of the fifth degree are researched. The example and the theorems are given.

**Проблема**, яку ми розв'язуємо в даній статті, полягає в побудові інструментарію інформаційних технологій [1, 2] – двовимірних фінитних операторів перетворень Фур'є та Хартлі (скорочено: оператори  $F\&H$ ) на прямокутній сітці на основі методу Файлона (Filon) [3] та двовимірного  $B$ -сплайну [4] п'ятого степеня для дійсних або комплексних функцій двох дійсних змінних на основі фіксованої кількості відліків наближуваної функції  $f(x, y)$ , які б мали більш якісні характеристики точності, ніж "класичні" двовимірні оператори  $F\&H$ . Тому проблема є актуальною.

**В літературі**, присвяченій перетворенням  $F\&H$ , основними напрямками досліджень є різноманітні варіанти реалізації швидких алгоритмів дискретного перетворення Фур'є (ДПФ) [5 – 7], порівняння швидких алгоритмів ДПФ та швидких алгоритмів дискретного перетворення Хартлі (ДПХ) [8], створення багатовимірних варіантів ДПФ та ДПХ [9]. Двовимірні перетворення  $F\&H$  [9]:

$$Z^{F\&H}(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \{ \exp[-j2\pi(ux + vy)] \backslash \text{cas}[2\pi(ux + vy)] \} dx dy ;$$

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Z^{F\&H}(u, v) \{ \exp[j2\pi(ux + vy)] \backslash \text{cas}[2\pi(ux + vy)] \} du dv ,$$

(де  $\text{cas}(t) = \cos(t) + \sin(t)$ ,  $F\&H$  – скорочено: Фур'є або Хартлі), в прикладних задачах, орієнтованих на комп'ютерні технології, використовують у вигляді "класичних" прямого та оберненого ДПФ та ДПХ [9]:

$$Z^{F\&H}[v_1, v_2] = (N_1 N_2)^{-1} \sum_{\tau_1=0}^{N_1-1} \sum_{\tau_2=0}^{N_2-1} f[\tau_1, \tau_2] \times \left[ \exp\left(-j2\pi \sum_{s=1}^2 \frac{v_s \tau_s}{N_s}\right) \backslash \text{cas}\left(2\pi \sum_{s=1}^2 \frac{v_s \tau_s}{N_s}\right) \right], \quad v_s = \overline{0, N_s-1}, \quad s=1, 2; \quad (1)$$

$$f[\tau_1, \tau_2] = \sum_{v_1=0}^{N_1-1} \sum_{v_2=0}^{N_2-1} Z^{F \setminus H} [v_1, v_2] \times \\ \times \left[ \exp \left( j 2 \pi \sum_{s=1}^2 \frac{v_s \tau_s}{N_s} \right) \setminus \text{cas} \left( 2 \pi \sum_{s=1}^2 \frac{v_s \tau_s}{N_s} \right) \right], \tau_s = \overline{0, N_s - 1}, s=1, 2. \quad (2)$$

Двовимірне "класичне" дискретне перетворення Фур'є (1), (2) з точки зору характеристик точності має недоліки, які розглянуто в [10].

**Метою роботи** є побудова двовимірних операторів фінітних дискретно-неперервних та дискретних перетворень  $F \setminus H$  на основі методу Файлона та  $B$ -сплайну п'ятого степеня по кожній змінній, з  $\prod_{s=1}^2 (2Mp_s + 1)$  вузлами

прямокутної сітки  $S(x_{p_1}, y_{p_2})$ ,  $x_{p_s} = p_s \Delta_s$ ,  $\Delta_s = \frac{2\pi}{2Mp_s + 1}$ ,  $p_s = \overline{-Mp_s, Mp_s}$ ,

$s=1, 2$ , в квадратній області  $D = (-\pi, \pi)^2$ , які мали б нову властивість (порівнянно з "класичними" дискретно-неперервними та дискретними двовимірними операторами  $F \setminus H$ ) – можливість забезпечувати більш високі характеристики точності (при однаковій кількості вузлів). Ціною за ці переваги є деяке збільшення обчислювальної трудомісткості.

**Побудуємо** двовимірні фінітні оператори дискретно-неперервних та дискретних перетворень  $F \setminus H$  на основі методу Файлона та  $B$ -сплайну п'ятого степеня по кожній змінній. Під фінітними операторами  $F \setminus H$  ми розуміємо операторами  $F \setminus H$  від фінітної функції. Не зменшуючи загальності ми вважаємо, що носій цих функції  $\text{supp } f(x, y) = C^r(D)$ ,  $D = [-\pi, \pi]^2$  та  $\text{supp } Z^{F \setminus H}(u, v) = C^r(D)$ ,  $D = [-\pi, \pi]^2$ . Хай  $f(x, y) \in C^r(D) \cap L_p(D)$ ,  $r=1, 2, 3, \dots$ ,  $p=1, 2$  задовольняє вимогам двовимірної теореми Найквіста [11]. (Умова 1). Областю визначення дискретизованої функції  $f(x_{p_1}, y_{p_2})$  є вузли прямокутної сітки

$$S(x_{p_1}, y_{p_2}), x_{p_1} = p_1 \Delta_1, y_{p_2} = p_2 \Delta_2, \Delta_s = \frac{2\pi}{2Mp_s + 1}, p_s = \overline{-Mp_s, Mp_s}, s=1, 2,$$

в області  $D = (-\pi, \pi)^2$ . (Умова 2). Для подальшого застосування умови 1 та 2 позначимо як умову "V".

Для наближеного обчислення коефіцієнтів двовимірних фінітних дискретно-неперервних та дискретних перетворень  $F \setminus H$  комплексної

функції дійсного аргумента  $f(x, y) = \text{Re } f(x, y) + j \text{Im } f(x, y)$ ,  
 $f(x, y) \in L_2(D)$ ,  $D = [-\pi, \pi]^2$ , для якої виконується умова "V":

$$a_{N, k_1, k_2}^{F \setminus H, 2d}(f) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) \left\{ \begin{array}{l} \exp[-j(k_1 x + k_2 y)] \\ \text{cas}(k_1 x + k_2 y) \end{array} \right\} dx dy, \quad (3)$$

$$N = \{N_s\}, \quad k_s = \overline{-N_s, N_s}, \quad s = 1, 2,$$

в двовимірних сумах  $F \& H$ :

$$S_N^{F \setminus H}(u, v) = \sum_{k_1 = -N_1}^{N_1} \sum_{k_2 = -N_2}^{N_2} a_{N, k_1, k_2}^{F \setminus H, 2d}(f) \left\{ \begin{array}{l} \exp[j(k_1 u + k_2 v)] \\ \text{cas}(k_1 u + k_2 v) \end{array} \right\},$$

послідовно до кожної змінної  $f(x, y)$  застосовуємо підхід Файлона, сформульований в [3] і модифікований в [12]. При цьому ми замінюємо в (3)  $f(x, y)$  двовимірним  $B$ -сплайном п'ятого степеня. Внаслідок цього отримуємо наближення  $a_{N, k_1, k_2}^{F \setminus H, 2d}(f)$  функціоналом [13]:

$$a_{N, k_1, k_2}^{F \setminus H, 2d, Sp5}(f) \approx b_{M, N, k_1, k_2}^{F \setminus H, 2d, Sp5}(f) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{p_1 = -Mp_1}^{Mp_1} \int_{(p_1-3)\Delta_1}^{(p_1+3)\Delta_1} h5(x, p_1, \Delta_1) \times$$

$$\times \sum_{p_2 = -Mp_2}^{Mp_2} R_{p_1, p_2}^{Sp5}(f) \int_{(p_2-3)\Delta_2}^{(p_2+3)\Delta_2} h5(y, p_2, \Delta_2) \left\{ \begin{array}{l} \exp[-j(k_1 x + k_2 y)] \\ \text{cas}(k_1 x + k_2 y) \end{array} \right\} dx dy, \quad (4)$$

де [4]:

$$h5(x, p, \Delta) = \frac{1}{120} \left\{ \begin{array}{l} 0, \quad x \leq x_{p-3}, \\ t^5, \quad x_{p-3} < x \leq x_{p-2}, \quad t = (x - x_{p-3}) / \Delta, \\ 1 + 5t + 10t^2 + 10t^3 + 5t^4 - 5t^5, \quad x_{p-2} < x \leq x_{p-1}, \quad t = (x - x_{p-2}) / \Delta, \\ 26 + 50t + 20t^2 - 20t^3 - 20t^4 + 10t^5, \quad x_{p-1} < x \leq x_p, \quad t = (x - x_{p-1}) / \Delta, \\ 66 - 60t^2 + 30t^4 - 10t^5, \quad x_p < x \leq x_{p+1}, \quad t = (x - x_p) / \Delta, \\ 26 - 50t + 20t^2 + 20t^3 - 20t^4 + 5t^5, \quad x_{p+1} < x \leq x_{p+2}, \quad t = (x - x_{p+1}) / \Delta, \\ (1-t)^5, \quad x_{p+2} < x < x_{p+3}, \quad t = (x - x_{p+2}) / \Delta, \\ 0, \quad x \geq x_{p+3}, \end{array} \right.$$

$$R_{p_1, p_2}^{Sp5}(f) = C_1^{2d, Sp5} f(x_{n_1}, y_{n_2}) + C_2^{2d, Sp5} \left[ f(x_{n_1}, y_{n_2-1}) + \right.$$

$$\left. + f(x_{n_1}, y_{n_2+1}) + f(x_{n_1-1}, y_{n_2}) + f(x_{n_1+1}, y_{n_2}) \right] + C_3^{2d, Sp5} \left[ f(x_{n_1}, y_{n_2-2}) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + f(x_{n_1}, y_{n_2+2}) + f(x_{n_1-2}, y_{n_2}) + f(x_{n_1+2}, y_{n_2}) \Big] + \\
& + C_4^{2d, Sp5} \left[ f(x_{n_1-1}, y_{n_2-1}) + f(x_{n_1-1}, y_{n_2+1}) + f(x_{n_1+1}, y_{n_2-1}) + \right. \\
& + f(x_{n_1-1}, y_{n_2+1}) \Big] + C_5^{2d, Sp5} \left[ f(x_{n_1-1}, y_{n_2-2}) + f(x_{n_1-1}, y_{n_2+2}) + \right. \\
& + f(x_{n_1+1}, y_{n_2-2}) + f(x_{n_1+1}, y_{n_2+2}) + f(x_{n_1-2}, y_{n_2-1}) + \\
& + f(x_{n_1-2}, y_{n_2+1}) + f(x_{n_1+2}, y_{n_2-1}) + f(x_{n_1+2}, y_{n_2+1}) \Big] + \\
& + C_6^{2d, Sp5} \left[ f(x_{n_1-2}, y_{n_2-2}) + f(x_{n_1-2}, y_{n_2+2}) + f(x_{n_1+2}, y_{n_2-2}) + \right. \\
& + f(x_{n_1+2}, y_{n_2+2}) \Big], \quad C_1^{2d, Sp5} = \frac{47961}{14400}, \quad C_2^{2d, Sp5} = -\frac{1533}{1800}, \quad C_3^{2d, Sp5} = \frac{2847}{28800}, \\
& C_4^{2d, Sp5} = \frac{49}{225}, \quad C_5^{2d, Sp5} = -\frac{91}{3600}, \quad C_6^{2d, Sp5} = \frac{169}{57600}.
\end{aligned}$$

Обчисливши функціонал (4), отримаємо [13]:

$$\begin{aligned}
b_2 \quad & B_{M, N, k_1, k_2}^{F \setminus H, 2d, Sp5}(f, Mp_1, Mp_2) = \left[ B_{M, N, k_1, k_2}^{F \setminus H, 2d, Sp5}(f), (k_1 \neq 0) \wedge (k_2 \neq 0) \right] \vee \\
& \vee \left[ B_{2M, N, k_1, 0}^{F \setminus H, 2d, Sp5}(f), (k_1 \neq 0) \wedge (k_2 = 0) \right] \vee \left[ B_{3M, N, 0, k_2}^{F \setminus H, 2d, Sp5}(f), (k_1 = 0) \wedge (k_2 \neq 0) \right] \vee \\
& \vee \left[ B_{4M, N, 0, 0}^{F \setminus H, 2d, Sp5}(f), (k_1 = 0) \wedge (k_2 = 0) \right], \quad (5)
\end{aligned}$$

$$B_{1M, N, k_1, k_2}^{F \setminus H, 2d, Sp5}(f) = Q_5(1) Q_5(2) \sum_{p_1 = -Mp_1}^{Mp_1} \sum_{p_2 = -Mp_2}^{Mp_2} R_{p_1, p_2}^{Sp5}(f) \begin{bmatrix} \exp \left( -j \sum_{s=1}^2 p_s k_s \Delta_s \right) \\ \text{cas} \left( \sum_{s=1}^2 p_s k_s \Delta_s \right) \end{bmatrix},$$

$$B_{2M, N, k_1, 0}^{F \setminus H, 2d, Sp5}(f) = Q_5(1) e_2 \sum_{p_1 = -Mp_1}^{Mp_1} \sum_{p_2 = -Mp_2}^{Mp_2} R_{p_1, p_2}^{Sp5}(f) \begin{bmatrix} \exp(-j p_1 k_1 \Delta_1) \\ \text{cas}(p_1 k_1 \Delta_1) \end{bmatrix},$$

$$B_{3M, N, 0, k_2}^{F \setminus H, 2d, Sp5}(f) = e_1 Q_5(2) \sum_{p_1 = -Mp_1}^{Mp_1} \sum_{p_2 = -Mp_2}^{Mp_2} R_{p_1, p_2}^{Sp5}(f) \begin{bmatrix} \exp(-j p_2 k_2 \Delta_2) \\ \text{cas}(p_2 k_2 \Delta_2) \end{bmatrix},$$

$$B_{4M, N, 0, 0}^{F \setminus H, 2d, Sp5}(f) = e_1 e_2 \sum_{p_1 = -Mp_1}^{Mp_1} \sum_{p_2 = -Mp_2}^{Mp_2} R_{p_1, p_2}^{Sp5}(f),$$

$$Q_5(s) = \frac{10 - \cos(3k_s \Delta_s) + 6 \cos(2k_s \Delta_s) - 15 \cos(k_s \Delta_s)}{\pi (\Delta_s)^5 (k_s)^6}, \Delta_s = 2\pi e_s,$$

$$e_s = \frac{1}{2Mp_s + 1}, N_s \leq Mp_s, k_s = \overline{-N_s, N_s}, s=1, 2.$$

Значення функції  $f(x_{p_1}, y_{p_2})$  за межами прямокутної сітки,  $S(x_{p_1}, y_{p_2})$ ,

$$x_{p_1} = p_1 \Delta_1, y_{p_2} = p_2 \Delta_2, \Delta_s = \frac{2\pi}{2Mp_s + 1}, p_s = \overline{-Mp_s, Mp_s}, s=1, 2,$$

отримуємо, користуючись властивістю періодичності частотних характеристик перетворень  $F\&H$ .

Оператори двовимірних фінітних дискретно-неперервних перетворень  $F\&H$  на прямокутній сітці на основі методу Файлона та  $B$ -сплайну п'ятого степеня:

$$L_{M, N}^{F\&H, 2d, Sp5}(f) = \sum_{k_1=-N_1}^{N_1} \sum_{k_2=-N_2}^{N_2} b_{M, N, k_1, k_2}^{F\&H, 2d, Sp5}(f) \left\{ \begin{array}{l} \exp[j(k_1 x + k_2 y)] \\ \text{cas}(k_1 x + k_2 y) \end{array} \right\}, \quad (6)$$

$$N_s \leq Mp_s, s=1, 2, (x, y) \in D,$$

дозволяють обчислювати неперервне наближення функції  $f(x, y) \in C^r(D)$ ;  $r=1, 2, 3, \dots$  по її дискретних відліках  $f(x_{p_1}, y_{p_2})$ ,  $(x_{p_1}, y_{p_2}) \in (-\pi, \pi)^2$ . При застосуванні (6) враховуємо вимоги двовимірної теореми дискретизації [11] для вибору необхідних  $Mp_1, Mp_2$  для даної функції  $f(x, y)$ .

Оператори двовимірних фінітних дискретних перетворень  $F\&H$  на прямокутній сітці на основі методу Файлона та  $B$ -сплайну п'ятого степеня отримуємо з (6) замінивши неперервні  $x, y$  на їх відповідні дискретні значення:

$$L_{M, N}^{F\&H, 2d, Sp5}[f(x_{p_1}, y_{p_2})] = \sum_{k_1=-N_1}^{N_1} \sum_{k_2=-N_2}^{N_2} b_{M, N, k_1, k_2}^{F\&H, 2d, Sp5}(f) \left[ \exp\left(j \sum_{s=1}^2 k_s p_s \Delta_s\right) \backslash \right. \\ \left. \text{cas}\left(\sum_{s=1}^2 k_s p_s \Delta_s\right) \right], N_s \leq Mp_s, p_s = \overline{-Mp_s, Mp_s}, s=1, 2. \quad (7)$$

При застосуванні (7) враховуємо вимоги двовимірної теореми дискретизації [11] для вибору необхідних  $Mp_1, Mp_2$  для даної функції  $f(x, y)$ .

**Теорема 1.** Оператори двовимірних дискретно-неперервних перетворень  $F\&H$ , побудовані на прямокутній сітці на основі методу Файлона обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій та  $B$ -сплайну п'ятого степеня, які задовольняють умову " $V$ ", мають властивості:

$$L_{M,N}^{F,2d,Sp5}(f) = L_{M,N}^{H,2d,Sp5}(f). \quad (8)$$

Доведення виконується безпосереднім обчисленням.

**Теорема 2.** Оператори двовимірних дискретно-неперервних перетворень  $F\&H$ , побудовані на прямокутній сітці на основі методу Файлона обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій та  $B$ -сплайну п'ятого степеня, в яких  $f(x, y)$  задовольняють умову " $V$ ":

$$U_{Mp, Mp}^{F\&H,2d,Sp5}(f) = \sum_{k_1=-N_1}^{N_1} \sum_{k_2=-N_2}^{N_2} g_{M,N,k_1,k_2}^{F\&H,2d,Sp5}(f) \left\{ \exp[j(k_1 x + k_2 y)] \setminus \right. \\ \left. \setminus \text{cas}(k_1 x + k_2 y) \right\}, N_s = Mp_s, s=1,2, x, y \in \mathbb{R}, \quad (9)$$

де  $g_{M,N,k_1,k_2}^{F\&H,2d,Sp5}(f) = \left[ G_1^{F\&H,2d,Sp5}(f), (k_1 \neq 0) \wedge (k_2 \neq 0) \right] \vee$   
 $\vee \left[ G_2^{F\&H,2d,Sp5}(f), (k_1 \neq 0) \wedge (k_2 = 0) \right] \vee \left[ G_3^{F\&H,2d,Sp5}(f), (k_1 = 0) \wedge (k_2 \neq 0) \right] \vee$   
 $\vee \left[ G_4^{F\&H,2d,Sp5}(f), (k_1 = 0) \wedge (k_2 = 0) \right]; \quad (10)$

$$G_1^{F\&H,2d,Sp5}(f) = \overline{Q_5(1)} \overline{Q_5(2)} \sum_{p_1=-Mp_1}^{Mp_1} \sum_{p_2=-Mp_2}^{Mp_2} R_{p_1,p_2}^{Sp5}(f) \begin{bmatrix} \exp\left(-j \sum_{s=1}^2 p_s k_s \Delta_s\right) \\ \text{cas}\left(\sum_{s=1}^2 p_s k_s \Delta_s\right) \end{bmatrix};$$

$$G_2^{F\&H,2d,Sp5}(f) = \overline{Q_5(1)} e_2 \sum_{p_1=-Mp_1}^{Mp_1} \sum_{p_2=-Mp_2}^{Mp_2} R_{p_1,p_2}^{Sp5}(f) \begin{bmatrix} \exp(-j p_1 k_1 \Delta_1) \\ \text{cas}(p_1 k_1 \Delta_1) \end{bmatrix};$$

$$G_3^{F\&H,2d,Sp5}(f) = e_1 \overline{Q_5(2)} \sum_{p_1=-Mp_1}^{Mp_1} \sum_{p_2=-Mp_2}^{Mp_2} R_{p_1,p_2}^{Sp5}(f) \begin{bmatrix} \exp(-j p_2 k_2 \Delta_2) \\ \text{cas}(p_2 k_2 \Delta_2) \end{bmatrix};$$

$$G_4^{F\&H,2d,Sp5}(f) = e_1 e_2 \sum_{p_1=-Mp_1}^{Mp_1} \sum_{p_2=-Mp_2}^{Mp_2} R_{p_1,p_2}^{Sp5}(f);$$

$$\overline{Q_5(s)} = \frac{120}{(2Mp_s + 1)(219 - 112 \cos(k_s, \Delta_s) + 13 \cos(2k_s, \Delta_s))}, Mp_s = M_s + 2;$$

$$N_s \leq Mp_s, \Delta_s = 2\pi e_s, e_s = \frac{1}{2Mp_s + 1}, k_s = \overline{-Mp_s, Mp_s}, s=1, 2,$$

отримані як результат обчислення функціоналу [13]:

$$g_{M,N,k_1,k_2}^{F \setminus H, 2d, Sp^5}(f) = \frac{b_{2M,N,k_1,k_2}^{F \setminus H, 2d, Sp^5}(f)}{b_{2M,N,k_1,k_2}^{F \setminus H, 2d, Sp^5} \left\{ \exp \left[ j(k_1 x + k_2 y) \right] \setminus \text{cas}(k_1 x + k_2 y) \right\}},$$

$k_s = \overline{-Mp_s, Mp_s}, s=1, 2$ ; мають властивості:

$$U_{M,N}^{F, 2d, Sp^5}(f) = U_{M,N}^{H, 2d, Sp^5}(f), \quad (11)$$

де функціонал  $b_{2M,N,k_1,k_2}^{F \setminus H, 2d, Sp^5}(f), k_s = \overline{-Mp_s, Mp_s}, s=1, 2$ ; визначається (5).

Доведення виконується безпосереднім обчисленням.

**Теорема 3.** Оператори  $U_{M,N}^{F \setminus H, 2d, Sp^5}(f)$  двовимірних дискретно-неперервних перетворень  $F \& H$ , побудовані на прямокутній сітці на основі методу Файлона обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій та  $B$ -сплайну п'ятого степеня, якщо  $f(x, y)$  задовольняють умову "V", а також  $f(x, y) \in T_N, N = \{N_s\}, s=1, 2$ , де  $T_N$  є множина тригонометричних поліномів степеня  $N$ , при  $N = Mp$  мають властивості:

$$U_{Mp, Mp}^{F \setminus H, 2d, Sp^5}(f) = f, \quad (12)$$

тобто є точні на тригонометричних поліномах заданого степеня в області  $D = (-\pi, \pi)^2$ . Доведення виконується безпосереднім обчисленням.

Оператори двовимірних фінітних дискретних перетворень  $F \& H$  побудовані на прямокутній сітці на основі методу Файлона та  $B$ -сплайну п'ятого степеня, в яких  $f(x, y)$  задовольняють умову "V", отримуємо з (11), замінивши неперервні  $x, y$  на їх відповідні дискретні значення:

$$U_{Mp, Mp}^{F \setminus H, 2d, Sp^5} \left[ f(x_{p_1}, x_{p_2}) \right] = \sum_{k_1 = -Mp_1}^{Mp_1} \sum_{k_2 = -Mp_2}^{Mp_2} g_{Mp, Mp, k_1, k_2}^{F \setminus H, 2d, Sp^5}(f) \times \left[ \exp \left( j \sum_{s=1}^2 k_s p_s \Delta_s \right) \setminus \text{cas} \left( \sum_{s=1}^2 k_s p_s \Delta_s \right) \right], p_s = \overline{-Mp_s, Mp_s}, s=1, 2. \quad (13)$$

При застосуванні (13) враховуємо вимоги двовимірної теореми дискретизації [10, с. 13], для вибору необхідних  $Mp_1, Mp_2$  для даної функції  $f(x, y)$ .

**Теорема 4.** Оператори двовимірних фінітних дискретних перетворень  $F\&H$  побудовані на прямокутній сітці, на основі методу Файлона та  $B$ -сплайну п'ятого степеня, точні на тригонометричних поліномах заданого степеня, мають властивості:

$$U_{M,N}^{F\&H,2d,Sp5} [f(x_{p_1}, y_{p_2})] = f(x_{p_1}, y_{p_2}), \quad p_s = \overline{-Mp_s, Mp_s}, \quad s=1, 2, \quad (14)$$

якщо  $f(x, y)$  задовольняє умову " $V$ " в області  $D = (-\pi, \pi)^2$ .

Доведення виконується безпосереднім обчисленням.

Для наступного застосування скористаємося теоремами 3, 4 [14, с. 185], з урахуванням яких маємо наступні теореми:

**Теорема 5.** Для двовимірних операторів перетворень  $F\&H$ , побудованих на прямокутній сітці на основі методу Файлона обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій та  $B$ -сплайну п'ятого степеня, для функцій  $f(x, y)$ , які задовольняють умову " $V$ " в області  $D = (-\pi, \pi)^2$ , виконується наступне:

$$u_{Mp, Mp, \left[ \frac{\Omega(n)}{\Psi(n)} \right]}^{F, 2d, Sp5}(f) = \left( \frac{1 \mp j}{2} \right) u_{Mp, Mp, \left[ \frac{\Omega(n)}{\Psi(n)} \right]}^{H, 2d, Sp5}(f) + \left( \frac{1 \pm j}{2} \right) u_{Mp, Mp, \left[ \frac{\Psi(n)}{\Omega(n)} \right]}^{H, 2d, Sp5}(f), \quad (15)$$

де  $\Omega(n) = \{(-k_1, 0)_0, (0, -k_2)_1, (-k_1, -k_2)_2, (-k_1, +k_2)_3\}$ ,  $n = \overline{0, 3}$ ;

$\Psi(n) = \{(+k_1, 0)_0, (0, +k_2)_1, (+k_1, +k_2)_2, (+k_1, -k_2)_3\}$ ,  $n = \overline{0, 3}$ ;

$u_{Mp, Mp, (\circ), (\circ)}^{F\&H, 2d, Sp5}(f) = \left\{ b_{Mp, Mp, (\circ), (\circ)}^{F\&H, 2d, Sp5}(f), g_{Mp, Mp, (\circ), (\circ)}^{F\&H, 2d, Sp5}(f) \right\}$ ,  $k_s = \overline{1, Mp_s}$ ,  $s=1, 2$ .

Доведення отримуємо при застосуванні до  $u_{Mp, Mp, (\circ), (\circ)}^{F\&H, 2d, Sp5}(f)$  теореми 3 [14, С. 185].

**Теорема 6.** Для двовимірних операторів перетворень  $F\&H$ , побудованих на прямокутній сітці на основі методу Файлона обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій та  $B$ -сплайну п'ятого степеня, для функцій  $f(x, y)$ , які задовольняють умову " $V$ ", в області  $D = (-\pi, \pi)^2$  виконується наступне:

$$u_{Mp, Mp, \left[ \frac{\Omega(n)}{\Psi(n)} \right]}^{H, 2d, Sp5}(f) = \left( \frac{1 \pm j}{2} \right) u_{Mp, Mp, \left[ \frac{\Omega(n)}{\Psi(n)} \right]}^{F, 2d, Sp5}(f) + \left( \frac{1 \mp j}{2} \right) u_{Mp, Mp, \left[ \frac{\Psi(n)}{\Omega(n)} \right]}^{F, 2d, Sp5}(f),$$

$$u_{Mp, Mp, (\circ), (\circ)}^{F\&H, 2d, Sp5}(f) = \left\{ b_{Mp, Mp, (\circ), (\circ)}^{F\&H, 2d, Sp5}(f), g_{Mp, Mp, (\circ), (\circ)}^{F\&H, 2d, Sp5}(f) \right\}, \quad (16)$$

$$k_s = \overline{1, Mp_s}, \quad s=1, 2, \quad n = \overline{0, 3}.$$



$\Omega(n)$  та  $\Psi(n)$  визначаються в (15). Доведення отримуємо при застосуванні до  $u_{Mp_1, Mp_2, (\circ), (\circ)}^{F \setminus H, 2d, Sp5}(f)$  теореми 4 [14, с. 185].

**Тестовий приклад.** В табл. наведені результати обчислення оцінки приведених похибок наближення модуля функції  $f(x, y)$ , де:  $f(x, y) = [\cos(0,3x)\sin(1,7y) + j\cos(1,3x)\sin(2,7y)] \exp[-(|x|+|y|)]$  за допомогою розглянутих операторів.

Таблиця

| $Mp_1, Mp_2$ | $\max\_E2$ | $\max\_e2$ | $\max\_E3$ | $\max\_e3$ |
|--------------|------------|------------|------------|------------|
| 14, 14       | 2,51 E-2   | 2,91 E-2   | 3,0 E-15   | 3,46 E-2   |
| 24, 24       | 1,58 E-2   | 1,71 E-2   | 2,8 E-15   | 2,22 E-2   |
| 34, 34       | 1,54 E-2   | 1,54 E-2   | 4,9 E-15   | 1,90 E-2   |

В табл. використанні наступні позначення:

$$\max\_e2 = \max_{\substack{-R_1 \leq r \leq R_1 \\ -R_2 \leq s \leq R_2}} |\mu(x_r, y_s)| / \Theta; \quad \max\_E2 = \max_{\substack{-Mp_1 \leq r \leq Mp_1 \\ -Mp_2 \leq s \leq Mp_2}} |\mu(x_r, y_s)| / \Theta;$$

$$\mu(x_r, y_s) = f(x_r, y_s) - L_{Mp_1, Mp_2}^{F \setminus H, 2d, Sp5} f(x_r, y_s);$$

$$\max\_e3 = \max_{\substack{-R_1 \leq r \leq R_1 \\ -R_2 \leq s \leq R_2}} |\lambda(x_r, y_s)| / \Theta; \quad \max\_E3 = \max_{\substack{-Mp_1 \leq r \leq Mp_1 \\ -Mp_2 \leq s \leq Mp_2}} |\lambda(x_r, y_s)| / \Theta;$$

$$\Theta = \max_{\substack{-R_1 \leq r \leq R_1 \\ -R_2 \leq s \leq R_2}} |f(x_r, y_s)|, \quad \lambda(x_r, y_s) = f(x_r, y_s) - U_{Mp_1, Mp_2}^{F \setminus H, 2d, Sp5} f(x_r, y_s);$$

$Mp = \{Mp_s\}$ ,  $R = \{R_s\}$ ,  $R_s = k Mp_s$ ,  $s=1, 2$ , де  $k=5$  – кількість інтервалів інтерполяції.

**Висновки.** 1. Побудовано оператори двовимірних, фінітних, дискретно-неперервних та оператори двовимірних, фінітних, дискретних перетворень  $F \setminus H$  на прямокутній сітці на основі методу Файлона обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій та  $B$ -сплайну п'ятого степеня (5), (6), (7). Визначено їх властивості (8). 2. Побудовано оператори двовимірних, фінітних, дискретно-неперервних та оператори двовимірних, фінітних, дискретних перетворень  $F \setminus H$  на прямокутній сітці на основі методу Файлона обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій та  $B$ -сплайну п'ятого степеня, точні на тригонометричних поліномах заданого степеня (9), (10), (13).

Визначено їх властивості (11), (12), (14). 3. Наведено теореми, які визначають зв'язок між операторами  $b_{Mp, N, \Omega}^{F, 2d, Sp^5}(f) - b_{Mp, N, \Omega}^{H, 2d, Sp^5}(f)$ , та  $g_{Mp, N, \Omega}^{F, 2d, Sp^5}(f) - g_{Mp, N, \Omega}^{H, 2d, Sp^5}(f)$  – (15), (16). 4. Наведено тестовий приклад, який підтверджує отримані теоретичні твердження. 5. Отримані оператори доповнюють існуючий інструментарій інформаційних технологій в базисах  $F\&H$ . 6. Побудовані оператори  $F\&H$  є подальшим розвитком методу Файлона [3] обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій.

**Перспективи** досліджень у даному напрямку автор вбачає у створенні швидких алгоритмів обчислення запропонованих операторів  $F\&H$  та їх застосуванні при вирішенні деяких задач інформаційних технологій, наприклад, в системах автоматичного управління та регулювання, які застосовують сигнальні методи; у задачах математичного моделювання та комп'ютерної діагностики, у відомих непараметричних та параметричних методах спектрального оцінювання сигналів у цифровій обробці сигналів, у вимірювальній техніці при побудові комп'ютерних вимірювальних засобів, при побудові різноманітних систем криптографії тощо.

**Список літератури:** 1. *Литвин О.М., Удовиченко В.М.* Інструментарій інформаційних технологій в базисі Хартлі // Вестник Национального технического университета "ХПИ". Сб. научных трудов. Тематический выпуск "Приборы и методы неразрушающего контроля". – 2006. – № 38. – С. 69–74. 2. *Литвин О.М., Удовиченко В.М.* Інструментарій інформаційних технологій в базисі Фур'є // Вестник Национального технического университета "ХПИ". Сб. научных трудов. Тематический выпуск "Автоматика и приборостроение". – 2007. – № 10. – С. 119–127. 3. *Filon L.N.G.* On a quadrature formula for trigonometric integrals // Proc. Roy.Soc. Edinburgh. – 1928. – P. 38–47. 4. *Литвин О.М.* Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – Харків: Основа, 2002. – 541 с. 5. *Рабинер Л., Гоулд Б.* Теория и применение цифровой обработки сигналов. – М.: Мир, 1978. – 848 с. 6. *Марпл-мл. С.Л.* Цифровой спектральный анализ и его приложения. – М.: Мир, 1990. – 684 с. 7. *Брейсуэлл Р.* Преобразование Хартли. – М.: Мир, 1990. – 175 с. 8. *Болд Э.Дж.* Сравнение времени вычисления БПХ и БПФ // ТИИЭР. – 1985. – № 12. – С. 184–185. 9. *Даджион Д., Мерсеро Р.* Цифровая обработка многомерных сигналов. – М.: Мир, 1988. 10. *Удовиченко В.Н.* Точностные характеристики прямоугольного двумерного дискретного преобразования Фурье. / Методы и микрорелектронные средства цифрового преобразования и обработки сигналов, СИП-89. – Рига, 1989. – С. 204–206. 11. *Отнес Р., Энксон Л.* Прикладной анализ временных рядов. – М.: Мир, 1982. – 428 с. 12. *Литвин О.М., Удовиченко В.М.* Оператори обчислення одновимірного фінітного дискретно-неперервного перетворення Хартлі на основі  $V$ -сплайнів третього степеня // Вестник Национального технического университета "ХПИ". Сб. научных трудов. Тематический выпуск "Информатика и моделирование". – 2003. – № 19. – С. 95–100. 13. *Балакришнан А.В.* Прикладной функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. – 383 с. 14. *Удовиченко В.М.* Оператори Фур'є та Хартлі, побудовані на основі методу Файлона та кубічних  $V$ -сплайнів, точні на тригонометричних поліномах заданого степеня // Вестник Национального технического университета "ХПИ". Сб. научных трудов. Тематический выпуск "Информатика и моделирование". – 2007. – № 19. – С. 182–190.

*Поступила в редакцію 03. 09. 2007*