УДК 514.18

А.Ю. НИЦЫН, канд. техн. наук

КОНСТРУИРОВАНИЕ ТОЧЕЧНОГО КАРКАСА ПОВЕРХНОСТИ ОБЩЕГО ВИДА ПО ЗАДАННЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЯМ

Розглянуто метод побудови точкового каркаса поверхні за чотирма граничними кривими лініями. Метод грунтується на застосуванні аффінних перетворень площини. Обгрунтовано можливість застосування даного методу у комп'ютерній графіці.

The method of construction of a dot skeleton of a surface on four boundary curve lines is considered. The method is based on application of affined transformations of a plane. The opportunity of application of the given method in the computer diagram is reasonable.

Постановка проблемы. Геометрическое моделирование знает достаточно много способов конструирования поверхностей по заданным граничным условиям. Однако эти методы, как правило, касаются построения точечного каркаса поверхностей частного вида, а именно: торсовых поверхностей, поверхностей параллельного переноса и т.п.. Вместе с тем подавляющее большинство форм природы и технических изделий не описываются простейшими поверхностями и требуют для своего моделирования более сложных поверхностей, способных передать все разнообразие их рельефа.

Анализ литературы. В литературе по геометрическому моделированию описано достаточно методов конструирования поверхностей частного вида по заданным граничным условиям [1 – 6]. Однако конструированию поверхностей общего вида, по мнению автора, уделяется недостаточное внимание, несмотря на то, что в природе и в технике такие поверхности встречаются гораздо чаще. Поэтому разработка способов конструирования поверхностей общего вида по-прежнему является актуальной задачей и заслуживает проведения дальнейших исследований.

Цель статьи. Выделим среди известных методов, обеспечивающих гладкость линий и поверхностей технических форм, графический метод, который уже многие годы широко применяется в судостроении, самолетостроении и автомобилестроении [7]. Этот метод основывается на аффинных преобразованиях плоскости, с помощью которых по заданным четырем граничным кривым можно построить поверхность достаточно сложного рельефа. Однако у данного метода есть недостаток, который состоит в том, что на исходные данные, необходимые для построения поверхности, накладываются ограничения. Эти ограничения касаются выбора начального и конечного положений образующей поверхности, которые должны быть аффинными кривыми линиями. Поэтому цель статьи – разработка аналитического способа построения поверхности на основе аффинных преобразований плоскости по заданным граничным условиям, на выбор которых не накладываются какие-либо ограничения.

Построение точки каркаса поверхности общего вида методом аффинных преобразований. Применение аффинных преобразований для построения непрерывной поверхности с непрерывными производными первого и второго порядков основывается на том, что при аффинных преобразованиях алгебраическая линия переходит в алгебраическую. При этом порядок линии сохраняется, например: прямая линия переходит в прямую линию, а линия второго порядка переходит в линию второго порядка, то есть эллипс преобразуется в эллипс, гипербола – в гиперболу, а парабола – в параболу [8].

Пусть в пространстве заданы две плоскости Ω_1 и Ω_2, перпендикулярные координатной оси x_3. Возьмем в этих плоскостях кривые линии $n_1(u)$ и $n_2(u)$, которые будем рассматривать как направляющие. Проведем через точку *S* пучок плоскостей Σ_j, перпендикулярных плоскости x_1x_3. При этом каждая плоскость выделит на кривых $n_1(u)$ и $n_2(u)$ две точки, через которые проходит плоская кривая линия, рассматриваемая как образующая $m_j(v)$. Тогда построение поверхности можно представить как результат перемещения образующей $m_j(v)$, которая пересекает обе направляющие $n_1(u)$, $n_2(u)$ и принадлежит плоскости Σ_j.

Пусть положение плоскости Σ_j задается параметром *u*, который изменяется в интервале $0 \le u \le 1$, а положение плоскости Ω_i задается параметром *v*, который принимает значения в интервале $0 \le v \le 1$. При этом положения плоскостей Σ_1 и Σ_2 соответствуют граничным значениям интервала $0 \le u \le 1$, а положения плоскостей Ω_1 и Ω_2 соответствуют граничным значениям интервала $0 \le v \le 1$. Тогда образующие $m_j(v)$ можно представить как плоские кривые линии, которые выделяются на криволинейной поверхности плоскостями Σ_j.

Зададим в плоскости Σ_1 начальное положение образующей $m_1(v)$. Дополним граничные условия кривой линией, которая представляет конечное положение образующей $m_2(v)$. Покажем на рис. исходные данные для построения криволинейной поверхности.

Поскольку при образовании поверхности граничные условия не могут изменяться, кривая $m_2(v)$ должна принадлежать плоскости, перпендикулярной плоскости x_2x_3.

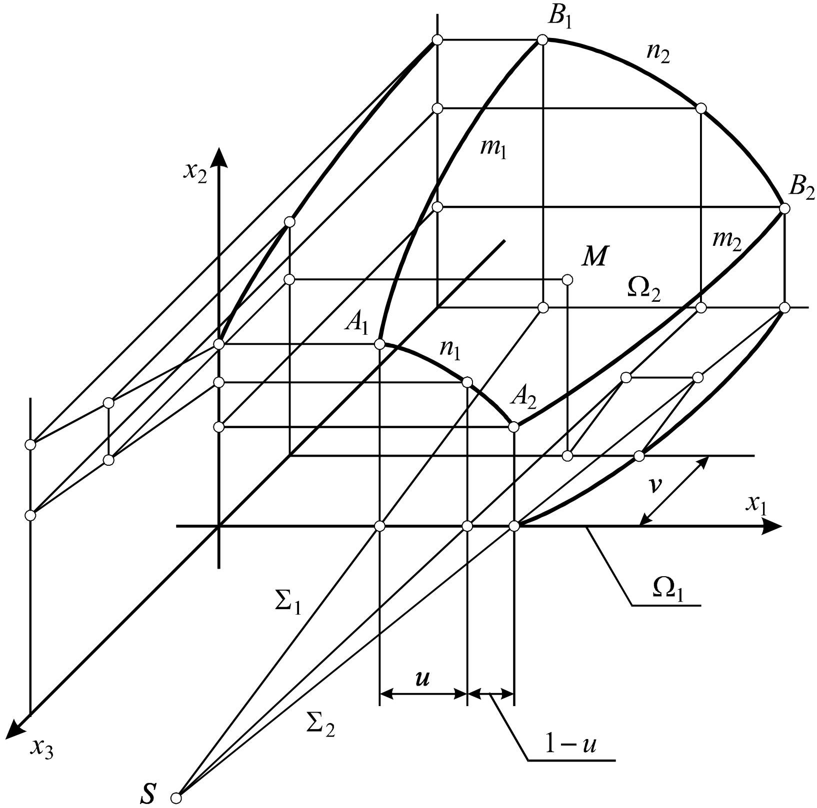

Рис. 1. Графический способ построения точки каркаса поверхности общего вида методом аффинных преобразования

Действительно, при образовании поверхности текущее положение образующей $m_j(v)$ переходит в ее конечное положение $m_2(v)$, если текущее значение параметра u принимает значение, равное верхней границе интервала $0 \le u \le 1$. Согласно аффинному преобразованию плоскости x_2x_3 при данном значении параметра u координата по оси x_2 точки, построенной на текущей образующей, определяется соответствующей координатой точки, взятой на прямой, проходящей через точки направляющих $n_1^2(1)$ и $n_2^2(1)$. Если конечное положение образующей $m_2(v)$ принадлежит плоскости, перпендикулярной плоскости x_2x_3, то этой же плоскости принадлежит и прямая, проходящая через точки направляющих $n_1^2(1)$ и $n_2^2(1)$. Поэтому координата по оси x_2 точки, взятой на данной прямой, равняется соответствующей координате точки образующей $m_2(v)$. Отсюда следует, что при конечном значении параметра *u* координата по оси x_2 точки поверхности $M(u,v)$ равняется соответствующей координате точки образующей $m_2(v)$.

Применим аффинные преобразования плоскости к построению точки $M(u,v)$ криволинейной поверхности. Пусть положение радиус-вектора точки $M(u,v)$ определяется значениями параметров *u*, *v*. Пусть точка $M(u,v)$ перемещается в плоскости Σ_j, проходящей через точки направляющих $n_1(u)$, $n_2(u)$. Рассмотрим траекторию движения точки $M(u,v)$ из начального положения $n_1(u)$ в конечное положение $n_2(u)$ как образующую $m_j(v)$. Тогда построение точки $M(u,v)$ можно представить как результат пересечения образующей $m_j(v)$ и плоскости Ω_i.

Выберем в интервале $0 \le u \le 1$ значение параметра *u*. Вычислим величину радиус-вектора точки пересечения направляющей $n_1(u)$ с плоскостью Σ_j с помощью подстановки выбранного значения параметра *u* в уравнение $r(u) = n_1(u)$. Вычислим величину радиус-вектора точки пересечения направляющей $n_2(u)$ с плоскостью Σ_j с помощью подстановки выбранного значения параметра *u* в уравнение $r(u) = n_2(u)$.

Построим проекции на координатную плоскость x_2x_3 начального положения образующей $m_1(v)$ и точек направляющих $n_1(u)$ и $n_2(u)$, положение которых определяется выбранным значением параметра *u*.

Выполним аффинное преобразование плоскости x_2x_3, согласно которому отрезки прямых, заключенных между плоскостями Ω_1 и Ω_2, делятся промежуточной плоскостью Ω_i в постоянном отношении. Это преобразование задается точками $m_1^2(0)$, $m_1^2(1)$ и $n_1^2(1)$, $n_2^2(1)$. Преобразуем проекцию образующей $m_1(v)$ на плоскость x_2x_3 в кривую, координаты точек которой пропорциональны координатам ее соответственных точек.

Выполним на координатной плоскости x_2x_3 вспомогательные построения, которые облегчают нахождение точек, соответственных точкам проекции образующей $m_1(v)$ на плоскость x_2x_3. Выделим проекции точек $m_1^2(0)$ и $m_1^2(1)$, принадлежащих концам сегмента проекции образующей $m_1(v)$, и соединим их отрезком прямой линии. Кроме того, построим отрезок прямой линии, которая проходит через точки направляющих $n_1^2(1)$ и $n_2^2(1)$. Покажем на рис. данные построения.

Выберем в интервале $0 \le v \le 1$ значение параметра v и вычислим величину радиус-вектора точки пересечения образующей $m_1(v)$ с плоскостью Ω_i посредством подстановки выбранного значения параметра v в уравнение $r(v) = m_1(v)$. Найдем на отрезке прямой, аппроксимирующей проекцию образующей $m_1(v)$, точку, координата которой по оси x_2 равна соответствующей координате выбранной точки. Это построение выполняется посредством подстановки некоторого значения параметра λ в уравнение прямой, проходящей через точки $m_1^2(0)$ и $m_1^2(1)$

$$m_1^2(v) = \left(m_1^2(1) - m_1^2(0)\right)\lambda + m_1^2(0). \tag{1}$$

Найдем соответственную точку на отрезке прямой, которую можно рассматривать как результат аффинного преобразования прямой, проходящей через точки $m_1^2(0)$ и $m_1^2(1)$. Это построение выполняется посредством подстановки некоторого значения параметра λ в уравнение прямой, проходящей через точки $n_1^2(1)$ и $n_2^2(1)$

$$m_j^2(v) = \left(n_2^2(u) - n_1^2(u)\right)\lambda + n_1^2(u). \tag{2}$$

Вычислим с помощью выражения (1) значение параметра λ

$$\lambda = \frac{m_1^2(v) - m_1^2(0)}{m_1^2(1) - m_1^2(0)}.$$

Подставим данное значение параметра λ в выражение (2) и найдем точку на отрезке прямой, соединяющей точки $n_1^2(1)$ и $n_2^2(1)$. При этом координата точки по оси x_2 равна соответствующей координате точки на кривой линии, которую можно рассматривать как результат аффинного преобразования проекции на плоскость x_2x_3 образующей $m_1(v)$

$$m_j^2(v) = \left(n_2^2(u) - n_1^2(u)\right)\frac{m_1^2(v) - m_1^2(0)}{m_1^2(1) - m_1^2(0)} + n_1^2(u).$$

Обратим внимание, что согласно данному выражению координаты по оси x_2 точек поверхности определяются соответствующими координатами точек начального положения образующей $m_1(v)$. Отсюда следует, что координаты по оси x_2 точек поверхности задаются исключительно формой начального положения образующей $m_1(v)$ и не зависят от формы конечного положения образующей $m_2(v)$.

Вычислим координату по оси x_1 точки поверхности. Пусть вычисления выполняются способом, при котором координаты по оси x_1 точек поверхности определяются исключительно формой конечного положения образующей $m_2(v)$ и не зависят от формы начального положения образующей $m_1(v)$.

Построим проекции на координатную плоскость x_1x_3 конечного положения образующей $m_2(v)$ и точек направляющих $n_1(u)$ и $n_2(u)$, положение которых задается выбранным значением параметра u.

Выполним аффинное преобразование плоскости x_1x_3, согласно которому отрезки прямых, заключенных между плоскостями Ω_1 и Ω_2, делятся промежуточной плоскостью Ω_i в постоянном отношении. Это преобразование задается точками $m_2^1(0)$, $m_2^1(1)$ и $n_1^1(u)$, $n_2^1(u)$. Преобразуем проекцию образующей $m_2(v)$ на плоскость x_1x_3 в кривую, координаты точек которой пропорциональны координатам ее соответственных точек.

Выполним на координатной плоскости x_1x_3 вспомогательные построения, которые облегчают нахождение точек, соответственных точкам проекции образующей $m_2(v)$ на плоскость x_1x_3. Выделим проекции точек $m_2^1(0)$ и $m_2^1(1)$, принадлежащих концам сегмента проекции образующей $m_2(v)$, и соединим их отрезком прямой линии. Кроме того, построим отрезок прямой линии, которая проходит через точки направляющих $n_1^1(u)$ и $n_2^1(u)$. Покажем на рис. данные построения.

Вычислим величину радиус-вектора точки пересечения образующей $m_2(v)$ с плоскостью Ω_i посредством подстановки выбранного значения параметра v в уравнение $r(v)=m_2(v)$. Найдем на отрезке прямой, аппроксимирующей проекцию образующей $m_2(v)$, точку, координата которой по оси x_1 равна соответствующей координате выбранной точки. Это построение выполняется посредством подстановки некоторого значения параметра λ в уравнение прямой, проходящей через точки $m_2^1(0)$ и $m_2^1(1)$

$$m_2^1(v)=\left(m_2^1(1)-m_2^1(0)\right)\lambda+m_2^1(0). \qquad (3)$$

Найдем соответственную точку на отрезке прямой, которую можно рассматривать как результат аффинного преобразования прямой, проходящей через точки $m_2^1(0)$ и $m_2^1(1)$. Это построение выполняется посредством подстановки некоторого значения параметра λ в уравнение прямой, проходящей через точки $n_1^1(u)$ и $n_2^1(u)$

$$m_j^1(v) = \left(n_2^1(u) - n_1^1(u)\right)\lambda + n_1^1(u). \qquad (4)$$

Вычислим с помощью выражения (3) значение параметра λ

$$\lambda = \frac{m_2^1(v) - m_2^1(0)}{m_2^1(1) - m_2^1(0)}.$$

Подставим данное значение параметра λ в выражение (4) и найдем точку на отрезке прямой, соединяющей точки $n_1^1(u)$ и $n_2^1(u)$. При этом координата точки по оси x_1 равна соответствующей координате точки на кривой линии, которую можно рассматривать как результат аффинного преобразования проекции на плоскость x_1x_3 образующей $m_2(v)$

$$m^1{}_j(v) = \left(n^1{}_2(u) - n^1{}_1(u)\right)\frac{m^1{}_2(v) - m^1{}_2(0)}{m^1{}_2(1) - m^1{}_2(0)} + n^1{}_1(u).$$

Вычислим координату по оси x_3 точки, которая в результате аффинного преобразования координатной плоскости x_2x_3 соответствует точке, выбранной на образующей $m_1(v)$. Это действие выполняется посредством подстановки выбранного значения параметра v в уравнение прямой, которая является проекцией на координатную плоскость x_1x_3 прямой, проходящей через точки $n_1(u)$ и $n_2(u)$

$$m_j^3(v) = (1-v)n_1^3(u) + vn_2^3(u).$$

Поскольку точка пересечения образующей $m_j(v)$ с плоскостью Ω_i принадлежит криволинейной поверхности $m_j(v) = M(u,v)$, координаты ее точки при заданных граничных условиях вычисляются с помощью следующих соотношений:

$$M^1(u,v) = \left(n_2^1(u) - n_1^1(u)\right)\frac{m_2^1(v) - m_2^1(0)}{m_2^1(1) - m_2^1(0)} + n_1^1(u);$$

$$M^2(u,v) = \left(n_2^2(u) - n_1^2(u)\right)\frac{m_1^2(v) - m_1^2(0)}{m_1^2(1) - m_1^2(0)} + n_1^2(u);$$

$$M^3(u,v) = (1-v)n_1^3(u) + vn_2^3(u).$$

Покажем, что аффинные преобразования действительно позволяют построить непрерывную поверхность Φ с непрерывными производными первого и второго порядков. Введем обозначение $r(u,v)=M(u,v)$ и вычислим производные $\frac{\partial r(u,v)}{\partial u}$, $\frac{\partial r(u,v)}{\partial v}$, $\frac{\partial^2 r(u,v)}{\partial u \partial v}$ от радиус-вектора $r(u,v)$ при заданных значениях параметров *u* и *v*:

$$\frac{\partial r^1(u,v)}{\partial u}=\left(\frac{\partial n_2^1(u)}{\partial u}-\frac{\partial n_1^1(u)}{\partial u}\right)\frac{m_2^1(v)-m_2^1(0)}{m_2^1(1)-m_2^1(0)}+\frac{\partial n_1^1(u)}{\partial u};$$

$$\frac{\partial r^1(u,v)}{\partial v}=\left(n_2^1(u)-n_1^1(u)\right)\frac{1}{m_2^1(1)-m_2^1(0)}\frac{\partial m_2^1(v)}{\partial v};$$

$$\frac{\partial r^2(u,v)}{\partial u}=\left(\frac{\partial n_2^2(u)}{\partial u}-\frac{\partial n_1^2(u)}{\partial u}\right)\frac{m_1^2(v)-m_1^2(0)}{m_1^2(1)-m_1^2(0)}+\frac{\partial n_1^2(u)}{\partial u};$$

$$\frac{\partial r^2(u,v)}{\partial v}=\left(n_2^2(u)-n_1^2(u)\right)\frac{1}{m_1^2(1)-m_1^2(0)}\frac{\partial m_1^2(v)}{\partial v};$$

$$\frac{\partial r^3(u,v)}{\partial u}=(1-v)\frac{\partial n_1^3(u)}{\partial u}+v\frac{\partial n_2^3(u)}{\partial u};$$

$$\frac{\partial r^3(u,v)}{\partial v}=-n_1^3(u)+n_2^3(u);$$

$$\frac{\partial r^1(u,v)}{\partial u \partial v}=\left(\frac{\partial n_2^1(u)}{\partial u}-\frac{\partial n_1^1(u)}{\partial u}\right)\frac{1}{m_2^1(1)-m_2^1(0)}\frac{\partial m_2^1(v)}{\partial v};$$

$$\frac{\partial r^2(u,v)}{\partial u \partial v}=\left(\frac{\partial n_2^2(u)}{\partial u}-\frac{\partial n_1^2(u)}{\partial u}\right)\frac{1}{m_1^2(1)-m_1^2(0)}\frac{\partial m_1^2(v)}{\partial v};$$

$$\frac{\partial r^3(u,v)}{\partial u \partial v}=-\frac{\partial n_1^3(u)}{\partial u}+\frac{\partial n_2^3(u)}{\partial u}.$$

Следовательно, если граничные условия $n_1(u)$, $n_2(u)$, $m_1(v)$, $m_2(v)$ заданы непрерывными функциями, которые имеют непрерывные производные первого порядка, то построенная поверхность описывается непрерывной функцией $r(u,v)$ с непрерывными производными первого и второго порядков.

Выводы. Таким образом, в статье изложен метод построения точечного каркаса поверхности на основе аффинных преобразований плоскости. Применение данного метода позволяет построить гладкую поверхность, которая во всех своих точках имеет непрерывные производные первого и второго порядков. При этом для построения поверхности не требуется, чтобы начальное и конечное положения образующей были аффинными кривыми линиями. Это обеспечивает, по мнению автора, широкое применение данного метода в компьютерной графике и в системах автоматизированного проектирования технических изделий.

Список литературы: **1**. *Обухова В.С., Підгорний Л.Н.* Торсові поверхні з напрямним конусом 2-го порядку // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2001. – Вип.69. – С. 6-10. **2**. *Обухова В.С., Несвідомін В.М.* Візуальне конструювання торсової поверхні // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2003. – Вип.72. – С. 18-22. **3**. *Пилипака С.Ф., Муквич М.М.* Конструювання торсових поверхонь за допомогою тригранника Френе плоскої напрямної кривої // Геометричне та комп'ютерне моделювання. – Харків: ХДУХТ, 2007. – Вип.17. – С.91-96. **4**. *Нікітенко О.А., Калінін О.О.* Криволінійні гвинтові поверхні, утворені кривими другого порядку // Геометричне та комп'ютерне моделювання. – Харків: ХДУХТ, 2007. – Вип.18. – С.114-117. **5**. *Пилипака С.Ф., Білоног Г.В.* Конструювання торсів однакового нахилу твірних як обвідної поверхні однопараметричної множини площин // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2007. – Вип.78. – С. 47-53. **6**. *Тимкович Г.І.* Моделювання поверхонь змінної геометрії як торсових // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2007. – Вип.78. – С. 110-116. **7**. *Иванов Г.С.* Конструирование технических поверхностей: Математическое моделирование на основе нелинейных преобразований. – М.: Машиностроение, 1982. – 192 с. **8**. *Фокс А., Пратт М.* Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве. – М.: Мир, 1982. – 304 с.

Поступила в редакцию 10.10. 2007