УДК 517.9:629.42

В.Д. ДМИТРИЕНКО, д-р техн. наук, НТУ "ХПИ",
А.Ю. ЗАКОВОРОТНЫЙ, НТУ "ХПИ"

ЛИНЕАРИЗАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРИВОДА МЕТОДАМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Розглянуто геометричний метод лінеаризації зворотним зв'язком математичної моделі тягового асинхронного електропривода. Отримано математичну модель електропривода у формі Бруновського.

The geometrical method of linearization is considered by a feedback of mathematical model of the traction asynchronous electric drive. The mathematical model of the electric drive in the form of Brunovsky.

Постановка проблемы и анализ литературы. Трудности анализа и синтеза нелинейных систем управления общеизвестны. Поэтому в течении десятилетий ведется поиск более мощных теоретических средств, чем существующие, для решения фундаментальных проблем теории управления. Одним их таких средств является современная геометрия, в частности, геометрический подход к теории управления на основе теории групп и дифференциальной геометрии. Успехи этого подхода привели к интенсивной разработке нового научного направления – единой геометрической теории управления [1, 2]. Существенное преимущество нового научного направления состоит не только в создании математического аппарата, позволяющего описывать системы управления в пространствах состояний более общих, чем линейные пространства, что необходимо при решении целого ряда задач управления [1, 2], но и в реальной осуществимости эквивалентных преобразований нелинейных систем к линейным. Такие преобразования открывают возможности для использования при решении задач разработки нелинейных систем управления методов и средств теории линейных систем [1 – 3]. При этом линеаризация нелинейной системы выполняется не с помощью классического разложения в ряд Тейлора, а на основе использования линейной обратной связи в пространстве "вход – выход" или "вход – состояние". Теоретически линеаризация с помощью обратной связи позволяет преобразовать к линейному виду широкий класс нелинейных систем управления [1 – 7]. Однако практическое использование нового геометрического метода линеаризации для сколько-нибудь общих нелинейных систем выше третьего – четвертого порядка существенно затруднено из-за отсутствия конструктивных методов выполнения такой линеаризации.

В работах [2, 8] предпринимались попытки получить линейную модель асинхронного привода. В статье [8] два тяговых асинхронных двигателя дизель-поезда были заменены одним эквивалентным, математическая модель которого описывается с помощью системы дифференциальных уравнений через потокосцепления статора и ротора:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\Psi_1}{dt} = a_{11}\Psi_1 + a_{13}\Psi_3 + u_1;\\
&\frac{d\Psi_2}{dt} = a_{22}\Psi_2 + a_{24}\Psi_4 + u_2;\\
&\frac{d\Psi_3}{dt} = a_{31}\Psi_1 + a_{33}\Psi_3 + a_{345}\Psi_4\Omega;\\
&\frac{d\Psi_4}{dt} = a_{42}\Psi_2 + a_{44}\Psi_4 + a_{435}\Psi_3\Omega;\\
&\frac{d\Omega}{dt} = a_{514}\Psi_1\Psi_4 + a_{523}\Psi_2\Psi_3 - a_{51}\Omega - a_{52}\Omega^2,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4$ – потокосцепления эквивалентного двигателя; a_{11}, a_{13}, ..., a_{514}, a_{523} – постоянные коэффициенты, определяемые параметрами эквивалентного асинхронного двигателя; u_1, u_2 – статорные напряжения; a_{51}, a_{52} – постоянные коэффициенты, определяемые нагрузкой двигателя; Ω – угловая скорость вращения эквивалентного двигателя.

Рассматриваемая модель (1) использовалась для получения линейного эквивалента нелинейной системы. Однако относительно большое число одночленов в правой части системы уравнений (1) привело к громоздким и трудно используемым промежуточным выражениям и конечному результату.

В работе [2] использовалась аналогичная модель асинхронного двигателя, в которой статорные потокосцепления с помощью известных выражений [9] были заменены на статорные токи. Эта модель содержит такое же число одночленов в правой части системы уравнений, что и модель (1), поэтому ее использование для получения линейного эквивалента также проблематично. В связи с этим была предпринята попытка [2] уменьшить общее число одночленов в правой части системы уравнений за счет перехода с помощью нелинейного преобразования из статической системы координат во вращающуюся *d*-*q*-систему координат. Однако допущенные ошибки преобразования привели к появлению некорректной модели, в которой одна из полученных фазовых координат не входила ни в одно из четырех других уравнений ([2], пятое уравнение модели (1.476)).

В связи с этим **целью настоящей работы** является получение приемлемого для целей оптимизации асинхронного привода решения задачи линеаризации математической модели асинхронного двигателя с помощью обратной связи.

Математическую модель (1) в осях u и v с помощью известных выражений для токов статора [9]:

$$i_{us} = \frac{1}{\sigma L_s}\left(\Psi_{us} - k_r \Psi_{ur}\right); \;\; i_{vs} = \frac{1}{\sigma L_s}\left(\Psi_{vs} - k_r \Psi_{vr}\right),$$

где i_{us}, i_{vs} – статорные токи по осям u и v; $\sigma = 1 - k_r k_s = 1 - \frac{L_m^2}{L_s L_r}$ – полный коэффициент рассеяния; L_m – индуктивность контура намагничивания (взаимная индуктивность); L_s, L_r – полная индуктивность соответственно статора и ротора; Ψ_{us}, Ψ_{vs} – потокосцепления по осям u и v статора; $k_s = \frac{L_m}{L_s}$, $k_r = \frac{L_m}{L_r}$ – коэффициенты электромагнитной связи соответственно статора и ротора; Ψ_{ur}, Ψ_{vr} – потокосцепления ротора по осям u и v, преобразуем к виду

$$\begin{aligned}
&\frac{di_{us}}{dt} = \alpha\beta\Psi_{ur} - \gamma i_{us} + p\beta\Omega\Psi_{vr} + \frac{1}{\sigma L_s} u_{us};\\
&\frac{di_{vs}}{dt} = \alpha\beta\Psi_{vr} - \gamma i_{vs} - p\beta\Omega\Psi_{ur} + \frac{1}{\sigma L_s} u_{vs};\\
&\frac{d\Psi_{ur}}{dt} = -\alpha\Psi_{ur} - p\Omega\Psi_{vr} + \alpha L_m i_{us};\\
&\frac{d\Psi_{vr}}{dt} = -\alpha\Psi_{vr} + p\Omega\Psi_{ur} + \alpha L_m i_{vs};\\
&\frac{d\Omega}{dt} = k_1\mu\left(\Psi_{ur} i_{vs} - \Psi_{vr} i_{us}\right) - a_{51}\Omega - a_{52}\Omega^2,
\end{aligned} \tag{2}$$

где $\alpha = \frac{1}{T_r}$; T_r – постоянная времени ротора двигателя; $\beta = \frac{L_m}{\sigma L_s L_r}$; $\gamma = \frac{R_r L_m^2}{\sigma L_s L_r^2} + \frac{R_s}{\sigma L_s}$; R_r, R_s – активные сопротивления роторной и статорной обмоток двигателя; p – число пар полюсов статора; u_{us}, u_{vs} – статорные напряжения по осям u и v; k_1 – постоянный коэффициент; $\mu = \frac{pL_m}{JL_r}$; J – приведенный момент инерции двигателя (с учетом момента инерции дизель-поезда); $M_н = a_{51}\Omega + a_{52}\Omega^2$ – момент нагрузки двигателя.

Математическая модель асинхронного привода (2) не может быть непосредственно использована для линеаризации объекта с помощью динамической обратной связи из-за слишком большого числа одночленов, входящих в правую часть системы уравнений (2), что приводит к нетривиальным громоздким преобразованиям и необходимости весьма сложного поиска решений системы уравнений в частных производных. Выполним нелинейное преобразование системы уравнений (2) во вращающуюся систему координат d, q. Получим, что в новой системе координат

$$\Omega = \Omega; \tag{3}$$

$$\Psi_d i_q = \Psi_{ur} i_{vs} - \Psi_{vr} i_{us}\ , \tag{4}$$

где $\Psi_d = \sqrt{\Psi_{ur}^2 + \Psi_{vr}^2}\ ;$ (5)

$$i_q = i_{vs}\cos\rho - i_{us}\sin\rho\,; \tag{6}$$

$$\rho = \arcsin\frac{\Psi_{vr}}{\sqrt{\Psi_{ur}^2 + \Psi_{vr}^2}} \text{ или } \rho = \arccos\frac{\Psi_{ur}}{\sqrt{\Psi_{ur}^2 + \Psi_{vr}^2}}\,; \tag{7}$$

i_q – ток статора по оси q в системе координат d, q. При этом ток статора по оси d определяется выражением

$$i_d = i_{us}\cos\rho - i_{vs}\sin\rho. \tag{8}$$

Наиболее просто с помощью соотношений (3) и (4) в новой системе координат получается последнее уравнение из системы уравнений (2), которое в d-q-системе координат приобретает вид

$$\frac{d\Omega}{dt} = k_1\mu\Psi_d i_q - a_{51}\Omega - a_{52}\Omega^2\ . \tag{9}$$

Второе дифференциальное уравнение получим, продифференцировав левую и правую часть выражения (5) и подставив вместо производных $\frac{d\Psi_{ur}}{dt}$, $\frac{d\Psi_{vr}}{dt}$ соответствующие правые части третьего и четвертого уравнений из системы (2). После несложных алгебраических преобразований с учетом выражений (7) и (8) имеем:

$$\frac{d\Psi_d}{dt} = -\alpha\Psi_d + \alpha L_m i_d\,. \tag{10}$$

Продифференцировав левую и правую часть одного из выражений (7) и выполнив простые преобразования с учетом выражений (2), (5) и (6) получим

$$\frac{d\rho}{dt} = p\Omega + \alpha L_m \frac{i_q}{\Psi_d}. \tag{11}$$

Последние два дифференциальных уравнения новой математической модели получим, продифференцировав левые и правые части выражений (6), (8) и подставив необходимые соотношения из уравнений (2) и (11), и выполнив необходимые алгебраические преобразования:

$$\frac{di_d}{dt} = -\gamma i_d + p\Omega i_q + \alpha L_m \frac{i_q^2}{\Psi_d} + \alpha\beta\Psi_d + \frac{1}{\sigma L_s}(u_{us}\cos\rho + u_{vs}\sin\rho); \tag{12}$$

$$\frac{di_q}{dt} = -\gamma i_q - p\Omega i_d - \alpha L_m \frac{i_d i_q}{\Psi_d} - p\beta\Omega\Psi_d + \frac{1}{\sigma L_s}(u_{vs}\cos\rho + u_{us}\sin\rho). \tag{13}$$

Введем в полученную модель (9) – (13) асинхронного двигателя новые управления u_1, u_2, позволяющие убрать из правых частей уравнений (12), (13) нелинейные члены:

$$u_1 = p\Omega i_q + \alpha L_m \frac{i_q^2}{\Psi_d} + \alpha\beta\Psi_d + \frac{1}{\sigma L_s}\left(u_{us}\cos\rho + u_{vs}\sin\rho\right); \tag{14}$$

$$u_2 = -p\Omega i_d - \alpha L_m \frac{i_d i_q}{\Psi_d} - p\beta\Omega\Psi_d + \frac{1}{\sigma L_s}\left(u_{vs}\cos\rho + u_{us}\sin\rho\right). \tag{15}$$

Обозначив $x_1 = \Omega$; $x_2 = \Psi_d$; $x_3 = i_d$; $x_4 = i_q$; $x_5 = \rho$; $a_{11} = -a_{51}$; $a_{12} = -a_{52}$; $a_{124} = k_1\mu$; $a_{21} = -\alpha$; $a_{23} = \alpha L_m$; $a_{31} = -\gamma$; $a_{41} = -\gamma$; $a_{51} = p$; $a_{524} = \alpha L_m$ и подставив управления u_1 и u_2 (соотношения (14) и (15)) в уравнения (12), (13), получим модель асинхронного двигателя в виде:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_1^2 + a_{124}x_2x_4; \\
\frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_2 + a_{23}x_3; \\
\frac{dx_3}{dt} &= a_{31}x_3 + u_1; \\
\frac{dx_4}{dt} &= a_{41}x_4 + u_2; \\
\frac{dx_5}{dt} &= a_{51}x_1 + a_{524}\frac{x_4}{x_2}.
\end{aligned} \tag{16}$$

Определим возможность преобразования нелинейной системы (16) к линейной форме (к канонической форме Бруновского [1, 2, 8]). Для этого определим инволютивность последовательности распределений M^0, M^1, M^2 [2, 8].

С системой дифференциальных уравнений (16) связаны векторные поля

$$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_1^2 + a_{124}x_2x_4 \\ a_{21}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_3 \\ a_{41}x_4 \\ a_{51}x_1 + a_{524}\dfrac{x_4}{x_2} \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{Y}_1(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{Y}_2(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку векторные поля $\boldsymbol{Y}_1(\boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{Y}_2(\boldsymbol{x})$ постоянны, то распределение $M^0 = \mathrm{span}\{\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2\}$ – инволютивно и $\dim M^0 = 2$, где $\boldsymbol{x} = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5)$; span – линейная оболочка векторов $\boldsymbol{Y}_1$ и $\boldsymbol{Y}_2$; $\dim M^0$ – размерность распределения M^0 [2, 8].

Определим распределение $M^1 = \mathrm{span}\{\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, L_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{Y}_1, L_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{Y}_2\}$, где $L_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{Y}_1$ и $L_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{Y}_2$ – производные Ли векторных полей $\boldsymbol{Y}_1$ и $\boldsymbol{Y}_2$ вдоль векторного поля $\boldsymbol{X}$:

$$L_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{Y}_1 = [\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}_1] = \frac{\partial \boldsymbol{Y}_1}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{X} - \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{Y}_1 = -\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{Y}_1 = \left|0, -a_{23}, -a_{31}, 0, 0\right|^{\mathrm{T}};$$

$$L_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{Y}_2 = [\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}_2] = \frac{\partial \boldsymbol{Y}_2}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{X} - \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{Y}_2 = -\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{Y}_2 = \left|-a_{124}\,x_2, 0, 0, -a_{41}, -\frac{a_{524}}{x_2}\right|^{\mathrm{T}},$$

где $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}_k]$ – скобки Ли векторных полей $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}_k$.

Для инволютивности распределения M^1 необходимо выполнение условия $\mathrm{rank}(\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, L_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{Y}_1, L_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{Y}_2, [\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{X}_j]) = 4$, где $\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{X}_j$ – векторные поля из семейства $(\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, L_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{Y}_1, L_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{Y}_2)$. Имеем:

$$[\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2] = [\boldsymbol{Y}_1, L_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{Y}_1] = [\boldsymbol{Y}_1, L_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{Y}_2] = [\boldsymbol{Y}_2, L_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{Y}_2] = [\boldsymbol{Y}_2, L_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{Y}_1] = 0. \qquad (17)$$

Однако

$$[L_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{Y}_1, L_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{Y}_2] = \frac{\partial (L_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{Y}_2)}{\partial \boldsymbol{x}} L_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{Y}_1 - \frac{\partial (L_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{Y}_1)}{\partial \boldsymbol{x}} L_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{Y}_2 = \left|a_{23}\,a_{124}, 0, 0, 0, \frac{a_{524}\,a_{23}}{x_2^2}\right|^{\mathrm{T}}.$$

Поэтому ранг матрицы $\boldsymbol{R} = (\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, L_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{Y}_1, L_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{Y}_2, [L_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{Y}_1, L_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{Y}_2])$ равен пяти:

$$R = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -a_{124}x_2 & a_{23}a_{124} \\ 0 & 0 & -a_{23} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -a_{31} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -a_{41} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{a_{524}}{x_2} & \dfrac{a_{524}a_{23}}{x_2^2} \end{vmatrix}.$$

Таким образом, распределения M^1 не является инволютивным. Подраспределения $M_1^1 = \mathrm{span}\{\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, L_{\boldsymbol{x}}\,\boldsymbol{Y}_1\}$ и $M_2^1 = \mathrm{span}\{\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, L_{\boldsymbol{x}}\,\boldsymbol{Y}_2\}$ распределения M^1 в силу соотношений (17) являются инволютивными и имеют одинаковые размерности, равные 3. Введем дополнительную фазовую координату в канал, связанный с управлением u_2:

$$x_6 = u_2;\ \frac{dx_6}{dt} = u_2^*;\ u_1^* = u_1.$$

С расширенной моделью асинхронного двигателя связаны следующие векторные поля:

$$\boldsymbol{X}^*(\boldsymbol{x}^*) = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_1^2 + a_{124}x_2x_4 \\ a_{21}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_3 \\ a_{41}x_4 + x_6 \\ a_{51}x_1 + a_{524}\dfrac{x_4}{x_2} \\ 0 \end{vmatrix};\ \boldsymbol{Y}_1^*(\boldsymbol{x}^*) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix};\ \boldsymbol{Y}_2^*(\boldsymbol{x}^*) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix},$$

где $\boldsymbol{x}^* = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6)$.

Для расширенной модели асинхронного двигателя распределение $M^{0*} = \mathrm{span}\{\boldsymbol{Y}_1^*, \boldsymbol{Y}_2^*\}$ – инволютивно, $\dim M^{0*} = 2$. Распределение $M^{1*} = \mathrm{span}\{\boldsymbol{Y}_1^*, \boldsymbol{Y}_2^*, L_{\boldsymbol{x}^*}\,\boldsymbol{Y}_1^*, L_{\boldsymbol{x}^*}\,\boldsymbol{Y}_2^*\}$ также инволютивно, поскольку $[\boldsymbol{Y}_1^*, \boldsymbol{Y}_2^*] =$ $= [\boldsymbol{Y}_1^*, L_{\boldsymbol{x}^*}\,\boldsymbol{Y}_1^*] = [\boldsymbol{Y}_1^*, L_{\boldsymbol{x}^*}\,\boldsymbol{Y}_2^*] = [\boldsymbol{Y}_2^*, L_{\boldsymbol{x}^*}\,\boldsymbol{Y}_2^*] = [\boldsymbol{Y}_2^*, L_{\boldsymbol{x}^*}\,\boldsymbol{Y}_1^*] = [L_{\boldsymbol{x}^*}\,\boldsymbol{Y}_1^*, L_{\boldsymbol{x}^*}\,\boldsymbol{Y}_2^*] = 0$,

где $L_{\boldsymbol{x}^*}\,\boldsymbol{Y}_1^* = [\boldsymbol{X}^*, \boldsymbol{Y}_1^*] = \dfrac{\partial \boldsymbol{Y}_1^*}{\partial \boldsymbol{x}^*}\boldsymbol{X}^* - \dfrac{\partial \boldsymbol{X}^*}{\partial \boldsymbol{x}^*}\boldsymbol{Y}_1^* = -\dfrac{\partial \boldsymbol{X}^*}{\partial \boldsymbol{x}^*}\boldsymbol{Y}_1^* = \begin{vmatrix} 0, & -a_{32}, & -a_{31}, & 0, & 0, & 0 \end{vmatrix}^{\mathrm{T}}$;

$$L_{\boldsymbol{x}^*}\,\boldsymbol{Y}_2^* = [\boldsymbol{X}^*, \boldsymbol{Y}_2^*] = \frac{\partial \boldsymbol{Y}_2^*}{\partial \boldsymbol{x}^*}\boldsymbol{X}^* - \frac{\partial \boldsymbol{X}^*}{\partial \boldsymbol{x}^*}\boldsymbol{Y}_2^* = -\frac{\partial \boldsymbol{X}^*}{\partial \boldsymbol{x}^*}\boldsymbol{Y}_2^* = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}^{\mathrm{T}};$$

$$-\frac{\partial \boldsymbol{X}^*}{\partial \boldsymbol{x}^*}\boldsymbol{Y}_1^* = \begin{vmatrix} a_{11}+2a_{12}x_1 & a_{124}x_4 & 0 & a_{124}x_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_{21} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{41} & 0 & 1 \\ a_{51} & -a_{524}\dfrac{x_4}{x_2^2} & 0 & \dfrac{a_{524}}{x_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -a_{23} \\ -a_{31} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

При этом матрица $R_1 = (\boldsymbol{Y}_1^*, \boldsymbol{Y}_2^*, L_{\boldsymbol{x}^*}\boldsymbol{Y}_1^*, L_{\boldsymbol{x}^*}\boldsymbol{Y}_2^*)$ имеет ранг равный 4, $m_1 = \dim M^{1*} = 4$.

Рассмотрим распределение $M^{2*} = \mathrm{span}\{\boldsymbol{Y}_1^*, \boldsymbol{Y}_2^*, L_{\boldsymbol{x}^*}\boldsymbol{Y}_1^*, L_{\boldsymbol{x}^*}\boldsymbol{Y}_2^*, L_{\boldsymbol{x}^*}^2\boldsymbol{Y}_1^*,$ $L_{\boldsymbol{x}^*}^2\boldsymbol{Y}_2^*\}$,

где $L_{\boldsymbol{x}}^2\boldsymbol{Y}_1^* = [\boldsymbol{X}^*, L_{\boldsymbol{x}^*}\boldsymbol{Y}_1^*] = \dfrac{\partial(L_{\boldsymbol{x}^*}\boldsymbol{Y}_1^*)}{\partial \boldsymbol{x}^*}\boldsymbol{X}^* - \dfrac{\partial \boldsymbol{X}^*}{\partial \boldsymbol{x}^*}L_{\boldsymbol{x}^*}\boldsymbol{Y}_1^* = -\dfrac{\partial \boldsymbol{X}^*}{\partial \boldsymbol{x}^*}L_{\boldsymbol{x}^*}\boldsymbol{Y}_1^* =$

$$= \left| a_{23}a_{124}x_4,\ a_{23}(a_{21}+a_{31}),\ a_{31}^2,\ 0,\ -\frac{a_{23}a_{524}x_4}{x_2^2},\ 0 \right|^{\mathrm{T}};$$

$$L_{\boldsymbol{x}}^2\boldsymbol{Y}_2^* = [\boldsymbol{X}^*, L_{\boldsymbol{x}^*}\boldsymbol{Y}_2^*] = \frac{\partial(L_{\boldsymbol{x}^*}\boldsymbol{Y}_2^*)}{\partial \boldsymbol{x}^*}\boldsymbol{X}^* - \frac{\partial \boldsymbol{X}^*}{\partial \boldsymbol{x}^*}L_{\boldsymbol{x}^*}\boldsymbol{Y}_2^* = \left| a_{124}x_2, 0, 0, a_{41}, \frac{a_{524}}{x_2}, 0 \right|^{\mathrm{T}}.$$

Распределение M^{2*} имеет следующую размерность:

$$dim\, M^{2*} = \mathrm{rank}\{\boldsymbol{Y}_1^*, \boldsymbol{Y}_2^*, L_{\boldsymbol{x}^*}\boldsymbol{Y}_1^*, L_{\boldsymbol{x}^*}\boldsymbol{Y}_2^*, L_{\boldsymbol{x}^*}^2\boldsymbol{Y}_1^*, L_{\boldsymbol{x}^*}^2\boldsymbol{Y}_2^*\} = 6 .$$

Распределение M^{2*} инволютивно. Используя теорию о линейном эквиваленте для нелинейной аффинной системы с векторным управлением [2, теорема 1.16], получим, что индексы управляемости k_1 и k_2 для рассматриваемой системы управления одинаковы: $k_1 = k_2 = 3$, и имеются две клетки канонической формы Бруновского.

Таким образом, налицо следующий эквивалент исходной математической модели в форме Бруновского:

$$\begin{aligned} &\frac{dy_i}{dt} = y_{i+1},\ i = 1,\ 2,\ 4,\ 5; \\ &\frac{dy_i}{dt} = v_k,\ i = 3,\ 6;\ k = i/3. \end{aligned} \tag{18}$$

Следовательно, известно, что существуют некоторые преобразования $y_1 = T_1(\boldsymbol{x}^*)$ и $y_4 = T_2(\boldsymbol{x}^*)$, из которых путем последовательного дифференцирования функций $T_1(\boldsymbol{x}^*)$ и $T_2(\boldsymbol{x}^*)$ вдоль векторного поля $\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{X}^* + u_1^*\boldsymbol{Y}_1^* + u_2^*\boldsymbol{Y}_2^*$ можно определить, соответственно y_2, y_3 и y_5, y_6. Получим систему дифференциальных уравнений, определяющих функции $T_1(\boldsymbol{x}^*)$ и $T_2(\boldsymbol{x}^*)$. Для этого вначале продифференцируем вдоль векторного поля $\boldsymbol{X}_1$ эти функции:

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2 = L_{\boldsymbol{X}_1} T_2(\boldsymbol{x}^*) = L_{\boldsymbol{X}^*} T_1(\boldsymbol{x}^*) + u_1^* L_{\boldsymbol{Y}_1^*} T_1(\boldsymbol{x}^*) + u_2^* L_{\boldsymbol{Y}_2^*} T_1(\boldsymbol{x}^*)\,; \tag{19}$$

$$\frac{dy_4}{dt} = y_5 = L_{\boldsymbol{X}_1} T_2(\boldsymbol{x}^*) = L_{\boldsymbol{X}^*} T_2(\boldsymbol{x}^*) + u_1^* L_{\boldsymbol{Y}_1^*} T_2(\boldsymbol{x}^*) + u_2^* L_{\boldsymbol{Y}_2^*} T_2(\boldsymbol{x}^*)\,, \tag{20}$$

где $L_{\boldsymbol{X}_1} T_i(\boldsymbol{x}^*)$, $L_{\boldsymbol{X}^*} T_i(\boldsymbol{x}^*)$, $L_{\boldsymbol{Y}_1^*} T_i(\boldsymbol{x}^*)$, $L_{\boldsymbol{Y}_2^*} T_i(\boldsymbol{x}^*)$ – производные Ли функций $T_i(\boldsymbol{x}^*)$, $i = 1, 2$, вдоль, соответственно, векторных полей $\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{X}^* + u_1^*\boldsymbol{Y}_1^* + u_2^*\boldsymbol{Y}_2^*$, $\boldsymbol{X}^*$, $\boldsymbol{Y}_1^*$ и $\boldsymbol{Y}_2^*$.

Поскольку из выражения (18) следует, что y_2 и y_5 в соотношениях (19), (20) не зависят от управлений u_1^* и u_2^*, то имеем:

$$\begin{gathered} L_{\boldsymbol{Y}_1^*} T_1(\boldsymbol{x}^*) = \left\langle \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial \boldsymbol{x}^*}, \boldsymbol{Y}_1^* \right\rangle = \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_1}\cdot 0 + \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_2}\cdot 0 + \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_3}\cdot 1 + \\ + \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_4}\cdot 0 + \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_5}\cdot 0 + \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_6}\cdot 0 = 0; \end{gathered} \tag{21}$$

$$\begin{gathered} L_{\boldsymbol{Y}_2^*} T_1(\boldsymbol{x}^*) = \left\langle \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial \boldsymbol{x}^*}, \boldsymbol{Y}_2^* \right\rangle = \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_1}\cdot 0 + \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_2}\cdot 0 + \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_3}\cdot 0 + \\ + \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_4}\cdot 0 + \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_5}\cdot 0 + \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_6}\cdot 1 = 0; \end{gathered} \tag{22}$$

$$\begin{gathered} L_{\boldsymbol{Y}_1^*} T_2(\boldsymbol{x}^*) = \left\langle \frac{\partial T_2(\boldsymbol{x}^*)}{\partial \boldsymbol{x}^*}, \boldsymbol{Y}_1^* \right\rangle = \frac{\partial T_2(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_1}\cdot 0 + \frac{\partial T_2(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_2}\cdot 0 + \frac{\partial T_2(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_3}\cdot 1 + \\ + \frac{\partial T_2(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_4}\cdot 0 + \frac{\partial T_2(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_5}\cdot 0 + \frac{\partial T_2(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_6}\cdot 0 = 0; \end{gathered} \tag{23}$$

$$L_{\boldsymbol{Y}_2^*}T_2(\boldsymbol{x}^*)=\left\langle\frac{\partial T_2(\boldsymbol{x}^*)}{\partial \boldsymbol{x}^*},\boldsymbol{Y}_2^*\right\rangle=\frac{\partial T_2(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_1}\cdot 0+\frac{\partial T_2(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_2}\cdot 0+\frac{\partial T_2(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_3}\cdot 0+$$
$$+\frac{\partial T_2(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_4}\cdot 0+\frac{\partial T_2(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_5}\cdot 0+\frac{\partial T_2(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_6}\cdot 0. \tag{24}$$

Из выражений (21) – (24) следует, что функции $T_1(\boldsymbol{x})$ и $T_2(\boldsymbol{x})$ не зависят от x_3 и x_6.

Дифференцируя $y_2=L_{\boldsymbol{X}^*}T_1(x^*)$ и $y_5=L_{\boldsymbol{X}^*}T_2(x^*)$ вдоль векторного поля $\boldsymbol{X}_1$, получим:

$$\frac{dy_2}{dt}=y_3=L_{\boldsymbol{X}_1}(L_{\boldsymbol{X}^*}T_1)=L^2_{\boldsymbol{X}^*}T_1+u_1^*L_{\boldsymbol{Y}_1^*}(L_{\boldsymbol{X}^*}T_1)+u_2^*L_{\boldsymbol{Y}_2^*}(L_{\boldsymbol{X}^*}T_1); \tag{25}$$

$$\frac{dy_5}{dt}=y_6=L_{\boldsymbol{X}_1}(L_{\boldsymbol{X}^*}T_2)=L^2_{\boldsymbol{X}^*}T_2+u_1^*L_{\boldsymbol{Y}_1^*}(L_{\boldsymbol{X}^*}T_2)+u_2^*L_{\boldsymbol{Y}_2^*}(L_{\boldsymbol{X}^*}T_2(\boldsymbol{x}^*)). \tag{26}$$

Из выражения (18) следует, что y_3 и y_6 в соотношениях (25), (26) не зависят от управлений u_1^* и u_2^*, поэтому имеем

$$L_{\boldsymbol{Y}_1^*}(L_{\boldsymbol{X}^*}T_1)=L_{\boldsymbol{Y}_2^*}(L_{\boldsymbol{X}^*}T_1)=L_{\boldsymbol{Y}_1^*}(L_{\boldsymbol{X}^*}T_2)=L_{\boldsymbol{Y}_2^*}(L_{\boldsymbol{X}^*}T_2)=0\,. \tag{27}$$

Для дальнейших вычислений воспользуемся известной теоремой [3, стр. 180].

Теорема. Пусть имеются $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ – гладкие векторные функции и $T_1(\boldsymbol{x})$ – скалярная функция векторного аргумента ($\boldsymbol{f},\ \boldsymbol{g},\ \boldsymbol{x}\in R^n;\ T_1\in R$) и выполняются соотношения

$$L_{\boldsymbol{g}}L^i_{\boldsymbol{f}}T_1(\boldsymbol{x})=0,\ \ i=0,1,\dots,m-1,\ \ L_{\boldsymbol{g}}L^m_{\boldsymbol{f}}\alpha(\boldsymbol{x})\neq 0\,, \tag{28}$$

тогда справедливо выражение

$$L_{ad^j_{\boldsymbol{f}}\boldsymbol{g}}L^k_{\boldsymbol{f}}T_1(\boldsymbol{x})=\begin{cases}0\ \ \text{при}\ \ 0\le j+k\le m-1,\\(-1)^j L_{\boldsymbol{g}}L^m_{\boldsymbol{f}}T_1(\boldsymbol{x})\neq 0,\ \ j+k=m.\end{cases} \tag{29}$$

Рассмотрим случай, когда $k=0$, тогда из соотношений (28) $L_{\boldsymbol{g}}L_{\boldsymbol{f}}T_1(\boldsymbol{x})=L_{\boldsymbol{g}}L^2_{\boldsymbol{f}}T_1(\boldsymbol{x})=\dots=L_{\boldsymbol{g}}L^{m-1}_{\boldsymbol{f}}T_1(\boldsymbol{x})=0,\ \ L_{\boldsymbol{g}}L^m_{\boldsymbol{f}}T_1(\boldsymbol{x})\neq 0$ следует:

$$L_{ad^j_{\boldsymbol{f}}\boldsymbol{g}}T_1(\boldsymbol{x})=0\ \ \text{при}\ \ j=0,1,\dots,m{-}1,\ \ L_{ad^m_{\boldsymbol{f}}\boldsymbol{g}}T_1(\boldsymbol{x})\neq 0\,. \tag{30}$$

Известно [3], что производная Ли $L_{\boldsymbol{f}} T_1(\boldsymbol{x})$ скалярной функции $T_1(\boldsymbol{x})$ векторного аргумента по векторной функции $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ $(T_1(\boldsymbol{x}) \in R;\ \boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x}) \in R^n)$ может быть определена несколькими эквивалентными выражениями:

$$L_{\boldsymbol{f}} T_1(\boldsymbol{x}) = \frac{dT_1(\boldsymbol{x})}{d\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}) = \nabla T_1(\boldsymbol{x})\, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x})}{dx_i} f_i(\boldsymbol{x}), \tag{31}$$

где $\nabla = \left(\frac{\partial}{dx_1}, \frac{\partial}{dx_2}, \ldots, \frac{\partial}{dx_n} \right)$ – оператор, равносильный оператору дифференцирования $\frac{d}{d\boldsymbol{x}}$ по векторному аргументу. Поэтому соотношения (30) можно, используя выражения (31), записать в виде

$$\nabla T_1(\boldsymbol{x}) ad_{\boldsymbol{f}}^{j} \boldsymbol{g} = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, m-1, \quad \nabla T_1(\boldsymbol{x}) ad_{\boldsymbol{f}}^{m} \boldsymbol{g} \neq 0. \tag{32}$$

Используя выражения (28) – (32), из соотношений (27) получим

$$L_{\boldsymbol{Y}_1^*}(L_{\boldsymbol{X}^*} T_1(\boldsymbol{x}^*)) = \left\langle \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial \boldsymbol{x}^*}, L_{\boldsymbol{X}^*} \boldsymbol{Y}_1^* \right\rangle = \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_1} \cdot 0 + \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_2} \cdot (-a_{23}) +$$

$$+ \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_3} \cdot (-a_{31}) + \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_4} \cdot 0 + \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_5} \cdot 0 + \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_6} \cdot 0 = 0; \tag{33}$$

$$L_{\boldsymbol{Y}_2^*}(L_{\boldsymbol{X}^*} T_1(\boldsymbol{x}^*)) = \left\langle \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x^*}, L_{\boldsymbol{X}^*} \boldsymbol{Y}_2^* \right\rangle = \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_1} \cdot 0 + \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_2} \cdot 0 + \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_3} \cdot 0 +$$

$$+ \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_4} \cdot (-1) + \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_5} \cdot 0 + \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_6} \cdot 0 = 0. \tag{34}$$

Поскольку функция $T_1(\boldsymbol{x}^*)$ не зависит от x_3, то из выражения (33) следует, что она не зависит и от x_2, а из выражения (34) получим независимость $T_1(\boldsymbol{x}^*)$ от аргумента x_4. Таким образом, функция $T_1(\boldsymbol{x}^*)$ может зависеть только от аргументов x_1 и x_5.

С помощью соотношений, аналогичных (33), (34), нетрудно получить, что функция $T_2(\boldsymbol{x}^*)$ не зависит от аргументов x_2, x_4 и, таким образом, может быть функцией только аргументов x_1 и x_5.

Дифференцируя $y_3 = L_{\boldsymbol{X}^*}^2 T_1(\boldsymbol{x}^*)$ и $y_5 = L_{\boldsymbol{X}^*}^2 T_2(\boldsymbol{x}^*)$ вдоль векторного поля $\boldsymbol{X}_1$, получим

$$\frac{dy_3}{dt} = L_{X_1}(L_X^2 T_1(\boldsymbol{x}^*)) = L_{X^*}^3 T_1 + u_1^* L_{Y_1^*}(L_X^2 T_1) + u_2^* L_{Y_2^*}(L_X^2 T_1); \tag{35}$$

$$\frac{dy_6}{dt} = L_{X_1}(L_X^2 T_2(\boldsymbol{x}^*)) = L_{X^*}^3 T_2 + u_1^* L_{Y_1^*}(L_X^2 T_2) + u_2^* L_{Y_2^*}(L_X^2 T_2). \tag{36}$$

Из этих выражений следует, что $L_{Y_1^*}(L_X^2 T_1(\boldsymbol{x}^*)) \neq 0$ и $L_{Y_2^*}(L_X^2 T_2(\boldsymbol{x}^*)) \neq 0$ или

$$L_{Y_1^*}(L_X^2 T_1(\boldsymbol{x})) = \left\langle \frac{\partial T_1}{\partial \boldsymbol{x}}, L_X^2 \boldsymbol{Y}_1^* \right\rangle = \frac{\partial T_1}{\partial x_1} \cdot (a_{23} a_{124} x_4) + \frac{\partial T_1}{\partial x_5} \cdot \left(-\frac{a_{23} a_{524} x_4}{x_2^2} \right) \neq 0; \tag{37}$$

$$L_{Y_2^*}(L_X^2 T_2(\boldsymbol{x})) = \left\langle \frac{\partial T_2}{\partial \boldsymbol{x}}, L_X^2 \boldsymbol{Y}_2^* \right\rangle = \frac{\partial T_2}{\partial x_1} \cdot (a_{124} x_4) + \frac{\partial T_2}{\partial x_5} \cdot \left(\frac{a_{524}}{x_2} \right) \neq 0. \tag{38}$$

При $x_2 \neq 0$ и $x_4 \neq 0$ одним из возможных решений системы неравенств (37), (38) может быть $T_1(\boldsymbol{x}) = x_1$ и $T_2(\boldsymbol{x}) = x_5$.

Известно [2], что для того чтобы существовало преобразование (19), (20), (25), (26), (35), (36) необходимо и достаточно, чтобы матрица

$$\boldsymbol{Q} = \begin{vmatrix} L_{Y_1^*}(L_{X^*}^2 T_1(\boldsymbol{x}^*)) & L_{Y_2^*}(L_{X^*}^2 T_1(\boldsymbol{x}^*)) \\ L_{Y_1^*}(L_{X^*}^2 T_2(\boldsymbol{x}^*)) & L_{Y_2^*}(L_{X^*}^2 T_2(\boldsymbol{x}^*)) \end{vmatrix}$$

была невырождена. Проверим это, вычислив элементы матрицы $\boldsymbol{Q}$ и ее определитель:

$$L_{Y_1^*}(L_{X^*}^2 T_1(\boldsymbol{x}^*)) = \left\langle \frac{\partial T_1}{\partial \boldsymbol{x}^*}, L_{X^*}^2 \boldsymbol{Y}_1^* \right\rangle = \frac{\partial T_1}{\partial x_1} \cdot a_{124} a_{23} x_4 = a_{124} a_{23} x_4; \tag{39}$$

$$L_{Y_1^*}(L_{X^*}^2 T_1(\boldsymbol{x}^*)) = \left\langle \frac{\partial T_1}{\partial \boldsymbol{x}^*}, L_{X^*}^2 \boldsymbol{Y}_2^* \right\rangle = \frac{\partial T_1}{\partial x_1} \cdot a_{124} x_2 = a_{124} x_2; \tag{40}$$

$$L_{Y_1^*}(L_{X^*}^2 T_2(\boldsymbol{x}^*)) = \left\langle \frac{\partial T_2}{\partial \boldsymbol{x}^*}, L_{X^*}^2 \boldsymbol{Y}_1^* \right\rangle = \frac{\partial T_2}{\partial x_5} \cdot \left(-\frac{a_{23} a_{524} x_4}{x_2^2} \right) = -a_{23} a_{524} \frac{x_4}{x_2^2}; \tag{41}$$

$$L_{Y_2^*}(L_{X^*}^2 T_2(\boldsymbol{x}^*)) = \left\langle \frac{\partial T_2}{\partial \boldsymbol{x}^*}, L_{X^*}^2 \boldsymbol{Y}_2^* \right\rangle = \frac{\partial T_2}{\partial x_5} \cdot \frac{a_{524}}{x_2} = \frac{a_{524}}{x_2}; \tag{42}$$

$$\det \boldsymbol{Q} = \begin{vmatrix} a_{124} a_{23} x_4 & a_{124} x_2 \\ -a_{23} a_{524} \dfrac{x_4}{x_2^2} & \dfrac{a_{524}}{x_2} \end{vmatrix} = 2 a_{124} a_{23} a_{524} \frac{x_4}{x_2}.$$

Таким образом, при $x_2 \neq 0$ и $x_4 \neq 0$ преобразования (19), (20), (25), (26), (35), (36) существуют.

Зная $T_1(\boldsymbol{x}^*)$ и $T_2(\boldsymbol{x}^*)$, определим функции перехода к форме Бруновского (18):

$$y_1 = T_1(\boldsymbol{x}) = x_1;\ y_4 = T_2(\boldsymbol{x}) = x_5;$$

$$y_2 = L_{\boldsymbol{X}^*}T_1(\boldsymbol{x}^*) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_i}\boldsymbol{X}^* = a_{11}x_1 + a_{21}x_1^2 + a_{124}x_2x_4;$$

$$y_5 = L_{\boldsymbol{X}^*}T_5(\boldsymbol{x}^*) = \sum_{i=1}^{6}\frac{\partial T_5(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_i}\boldsymbol{X}_i^* = a_{51}x_1 + a_{524}\frac{x_4}{x_2};$$

$$y_3 = L^2_{\boldsymbol{X}^*}T_1(\boldsymbol{x}^*) = L_{\boldsymbol{X}^*}(L_{\boldsymbol{X}^*}T_1(\boldsymbol{x}^*)) = \sum_{i=1}^{6}\frac{\partial(L_{\boldsymbol{X}^*}T_1(\boldsymbol{x}^*))}{\partial x_i}\boldsymbol{X}_i^* = (a_{11} + 2a_{12}x_1)\cdot$$

$$\cdot(a_{11}x_1 + a_{12}x_1^2 + a_{124}x_2x_4) + a_{124}x_4(a_{21}x_2 + a_{23}x_{31}) + a_{124}x_2(a_{41}x_4 + a_6);$$

$$y_6 = L^2_{\boldsymbol{X}^*}T_2(\boldsymbol{x}^*) = L_{\boldsymbol{X}^*}(L_{\boldsymbol{X}^*}T_2(\boldsymbol{x}^*)) = \sum_{i=1}^{6}\frac{\partial(L_{\boldsymbol{X}^*}T_2(\boldsymbol{x}^*))}{\partial x_i}\boldsymbol{X}_i^* =$$

$$= a_{51}(a_{11}x_1 + a_{12}x_1^2 + a_{124}x_2x_4) + \left(-a_{524}\frac{x_4}{x_2^2}\right)(a_{21}x_2 + a_{23}x_{31}) + \frac{a_{524}}{x_2}(a_{41}x_4 + a_6).$$

Из вида уравнений (19), (20), (25), (26), (35), (36) следует, что управления $v_1,\ v_2$ для системы уравнений в форме Бруновского (18) определяются из выражений (35), (36):

$$\begin{aligned} v_1 &= L^3_{\boldsymbol{X}^*}T_1(\boldsymbol{x}^*) + u_1^*L_{\boldsymbol{Y}_1^*}(L^2_{\boldsymbol{X}}T_1(\boldsymbol{x}^*)) + u_2^*L_{\boldsymbol{Y}_2^*}(L^2_{\boldsymbol{X}}T_1(\boldsymbol{x}^*)); \\ v_2 &= L^3_{\boldsymbol{X}^*}T_2(\boldsymbol{x}^*) + u_1^*L_{\boldsymbol{Y}_1^*}(L^2_{\boldsymbol{X}}T_2(\boldsymbol{x}^*)) + u_2^*L_{\boldsymbol{Y}_2^*}(L^2_{\boldsymbol{X}}T_2(\boldsymbol{x}^*)). \end{aligned} \tag{43}$$

Систему уравнений (18) можно использовать для определения оптимальных управлений $v_1,\ v_2$. Затем, зная v_1 и v_2 – определить u_2^* и u_1^* из системы уравнений (43), а потом найти u_1 и u_2:

$$u_2^* = \frac{1}{det\boldsymbol{Q}}\left[L_{\boldsymbol{Y}_1^*}(L^2_{\boldsymbol{X}^2}T_1(\boldsymbol{x}^*))(v_2 - L^3_{\boldsymbol{X}^*}T_2(\boldsymbol{x})) - L_{\boldsymbol{Y}_1^*}(L^2_{\boldsymbol{X}}T_2(\boldsymbol{x}^*))(v_1 - L^3_{\boldsymbol{X}^*}T_1(\boldsymbol{x}))\right];$$

$$u_1^* = \frac{1}{L_{\boldsymbol{Y}_1^*}(L^2_{\boldsymbol{X}^2}T_1(\boldsymbol{x}^*))}\left[v_1 - L^3_{\boldsymbol{X}^*}T_1(\boldsymbol{x}) - u_2^*L_{\boldsymbol{Y}_2^*}(L^2_{\boldsymbol{X}}T_1(\boldsymbol{x}^*)\right];$$

$$u_1 = u_1^*;\ u_2 = \int_0^{\boldsymbol{T}} u_1^*dt.$$

Сравнение процессов в математических моделях асинхронного привода (1), (2), (16) и (18) в разных режимах работы привода подтвердило правильность линеаризации обратной связью исходной модели (1) и работоспособность модели объекта в форме Бруновского.

Выводы. Таким образом, впервые средствами дифференциальной геометрии получена работоспособная математическая модель асинхронного привода в канонической форме Бруновского, которую можно использовать для синтеза системы управления асинхронным приводом.

Список литературы: **1.** Методы классической и современной теории автоматического управления: Учебник в 5-и томах. Т. 5: Методы современной теории управления / Под ред. *К.А. Пупкова, Н.Д. Егупова*. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 784 с. **2.** *Краснощёченко В.И.*, *Грищенко А.П.* Нелинейные системы: геометрический метод анализа и синтеза. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2005. – 520 с. **3.** *Ким Д.П.* Теория автоматического управления. Т.2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы: Учебное пособие. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 464 с. **4.** *Kim D.P.* Automatic Control. Theory Nonlinear and Multivariable System. – Seol: Harnol, 2000. – 558 p. **5.** *Marino R., Tomei P.* Nonlinear Control Design. – Prentice Hall Europe, 1995. – 396 p. **6.** *Краснощёченко В.И.* Синтез регуляторов для нелинейных систем, приводимых к канонической форме Бруновского // Труды МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 1997. – № 569. – С. 28 – 33. **7.** *Краснощёченко В.И.* О линейных эквивалентах нелинейных систем // Труды МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 1999. – № 575. – С. 39 – 45. **8.** *Дмитриенко В.Д., Заковоротный А.Ю.* Динамическая линеаризация с помощью обратной связи математической модели тягового привода // Вісник НТУ «ХПІ». Збірник наукових праць. Тематичний випуск: Інформатика і моделювання. – Харків: НТУ «ХПІ». – 2006. – № 40. – С. 49–57. **9.** *Сандлер А.С., Сарбатов Р.С.* Автоматическое частотное управление асинхронными двигателями. – М.: Энергия, 1974. – 328 с.

Поступила в редакцию 25.04.2007