УДК 62-5

СЕЙЕД МОДЖТАБА ДЖАФАРИ ХЕНДЖАНИ, аспирант НТУ "ХПИ",
В.П. СЕВЕРИН, д-р техн. наук, проф. НТУ "ХПИ" (г. Харьков)

АЛГОРИТМЫ ПОШАГОВОГО МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОГО СИНТЕЗА СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ПО ИНТЕГРАЛЬНЫМ КВАДРАТИЧНЫМ ОЦЕНКАМ

В статье рассматриваются алгоритмы пошагового многокритериального синтеза систем автоматического управления по улучшенным интегральным квадратичным оценкам с использованием компьютерной системы MATLAB на основании математических моделей и методов векторной оптимизации. Приведены примеры решения задач синтеза для моделей систем управления без применения и с применением пошагового подхода.

Ключевые слова: алгоритмы, многокритериальный синтез, системы автоматического управления, интегральные квадратичные оценки, компьютерная система MATLAB.

Постановка проблемы и анализ литературы. Одной из основных проблем разработки систем автоматического управления (САУ) является проблема многокритериального параметрического синтеза, для решения которой рекомендуется применять улучшенные интегральные квадратичные оценки (ИКО). Такие оценки определены только в области устойчивости САУ, что приводит к сложности использования численных методов оптимизации для синтеза систем. Улучшенные ИКО косвенно характеризуют качество протекания переходных процессов в САУ [1 – 5]. Однако вычисление и минимизация улучшенных ИКО для САУ выше второго порядка вызывают трудности, что ограничивает их применение [1]. Эффективные методы вычисления ИКО предложили А.М. Кац [6] и К.Ю. Острем [7]. Сравнение этих методов показало, что метод К.Ю. Острема эффективнее метода А.М. Каца по точности и скорости вычислений [8 – 11]. Для минимизации улучшенных ИКО предложен пошаговый подход удовлетворения ограничений области устойчивости [8 – 11]. Проведены исследования различных методов оптимизации при минимизации ИКО для САУ различных порядков, которые позволяют заключить, что наиболее эффективными методами являются: метод адаптации шага для одномерного поиска и метод Бройдена-Флетчера-Гольдфарба-Шанно (БФГШ) для многомерной оптимизации [12, 13]. Разработку и тестирование методов и их алгоритмов целесообразно проводить в компьютерной математической системе MATLAB [14].

Цель статьи состоит в разработке и исследовании алгоритмов многокритериального параметрического синтеза систем автоматического управления на основе минимизации улучшенных интегральных квадратичных оценок качества численными методами оптимизации с использованием пошагового подхода для учета ограничений области устойчивости систем.

Улучшенные интегральные квадратичные оценки. Для устойчивости линейной системы автоматического управления, зависящей от вектора переменных параметров $x \in R^p$ и имеющей передаточную функцию (ПФ)

$$W(x,s) = \beta(x,s)/\alpha(x,s), \quad \alpha(x,s) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i(x) s^{n-i}, \quad \beta(x,s) = \sum_{i=0}^{m} \beta_i(x) s^{m-i},$$

по критерию Рауса необходимо и достаточно выполнение условий [3]:

$$\alpha_i(x) > 0, \quad i = \overline{0,n}; \quad \rho_k(x) > 0, \quad k = \overline{2,n-1}, \tag{1}$$

где $\rho_k(x)$ – элементы первого столбца таблицы Рауса.

Решение задачи многокритериального синтеза САУ может быть достигнуто минимизацией улучшенных ИКО [1 – 4]:

$$J(x) = \int_0^\infty \sum_{k=0}^{l} w_k \left[z_t^{(k)}(x,t) \right]^2 dt; \tag{2}$$

$$I(x) = \int_0^\infty \left[\sum_{k=0}^{l} \tau_k z_t^{(k)}(x,t) \right]^2 dt, \tag{3}$$

где $z(x,t)$ – отклонение выходной величины $y(x,t)$ от установившегося значения $y_\infty = 1$; l – порядок оценки, $l < n - m$; w_k и τ_k – весовые коэффициенты. Оценки (2) и (3) определены только в области устойчивости САУ, заданной системой неравенств (1). Оценка (3) имеет преимущество перед оценкой (2), так как она проще формируется и вычисляется [8].

Для системы второго порядка с одним переменным параметром x и ПФ

$$W(x,s) = 1/(s^2 + xs + 1) \tag{4}$$

улучшенные ИКО (2) и (3) определены в области устойчивости $x > 0$ [1, 2]:

$$J(x) = 0{,}5[x + (1+w)/x]; \tag{5}$$

$$I(x) = 0{,}5[1 + (x-\tau)^2]/x, \tag{6}$$

причем $\tau = \sqrt{w}$, $J(x) = I(x) + \tau$. Оценка (6) имеет единственный минимум при $x^* = \sqrt{1+\tau^2}$, $I^* = \sqrt{1+\tau^2} - \tau$. Для значений весовых коэффициентов $w = 1$ и $\tau = 1$ оценки (5) и (6) принимают минимальные значения при $x^* = \sqrt{2}$.

Для САУ третьего порядка с вектором переменных $x = (x_1, x_2)$ и ПФ

$$W(x,s) = 1/(s^3 + x_1 s^2 + x_2 s + 1) \tag{7}$$

ИКО (2) и (3) определены в области устойчивости $x_1, x_2 > 0$, $x_1 x_2 > 1$ [1, 2]:

$$J(x) = \frac{1}{2}\left(x_2 + \frac{x_1^2 + w_1 x_1 + w_2}{x_1 x_2 - 1} \right); \tag{8}$$

$$I(x) = \frac{1}{2}\left(x_2 + \frac{x_1^2 + (\tau_1^2 - 2\tau_2) x_1 + \tau_2^2}{x_1 x_2 - 1} \right) - \tau_1, \tag{9}$$

причем $\tau_2 = \sqrt{w_2}$, $\tau_1 = \sqrt{w_1 + 2\tau_2}$, $J(x) = I(x) + \tau_1$.

Алгоритмы численных методов оптимизации. Уже для САУ третьего порядка с ПФ (7) для минимизации оценок (8) и (9) необходимо применять численные методы. Опыт минимизации ИКО показал, что наиболее эффективным методом для одномерного поиска является метод адаптации шага, а для многомерного – метод БФГШ [13]. Приведем алгоритмы этих методов для минимизации целевой функции $f(x) = I(x)$.

Алгоритм метода адаптации шага. Входные параметры: x – начальное значение переменной; h – начальный шаг поиска; ε – допустимая погрешность. Выходные параметры: x и f_x – конечные значения переменной и функции.

1. Положить $r = 0$.

2. Положить $x = x + h$, $f_y = f(x)$.

3. Если $f_y < f_x$, положить $f_x = f_y$, иначе перейти к п. 6.

4. Если $r \geq 0{,}5$, положить $r = 2$, иначе положить $r = 0{,}5$.

5. Перейти к п. 8.

6. Положить $x = x - h$.

7. Если $r = 2$, положить $r = 0{,}25$, иначе положить $r = -0{,}5$.

8. Положить $h = hr$.

9. Если $|h| > \varepsilon$, перейти к п. 2.

10. Остановиться.

Алгоритм метода БФГШ. Входные параметры: x – начальная точка; h – начальный шаг поиска; ε – допустимая погрешность. Выходные параметры: x и f_x – конечные значения вектора переменных и функции.

1. Положить $f_x = f(x)$, $g_x = agrad(x, f_x, h)$, $n = \dim x$, $G = E$, $r = 1$, $d = g_x$.

2. Вычислить $(y, f_y, r) = S(x, f_x, d, r)$, $s = y - x$, $h = \|s\|$.

3. Вычислить $g_y = agrad(y, f_y, h)$, $p = g_x - g_y$.

4. Вычислить $u = Gp$, $v = 1/(p^{\mathrm{T}}s)$, $G = G - v(us^{\mathrm{T}} + su^{\mathrm{T}}) + v(1 + u^{\mathrm{T}}pv)ss^{\mathrm{T}}$.

5. Вычислить $d = Gg_y$.

6. Положить $x = y$, $f_x = f_y$, $g_x = g_y$.

7. Если $h > \varepsilon$, перейти к п. 2.

8. Остановиться.

В этом алгоритме для одномерного поиска используется алгоритм многомерного метода адаптации шага в виде функции $(y, f_y, r) = S(x, f_x, d, r)$, а для вычисления антиградиента – функция $g = agrad(x, f_x, h)$.

Алгоритм вычисления антиградиента. Входные параметры: x и f_x – базовые значения переменной и функции; h – шаг поиска. Выходной параметр: g – антиградиент.

1. Положить $\delta = \max\{|h|10^{-4}; \|x\|_{\infty}\varepsilon_m 10^2; \varepsilon_m 10^2\}$, $k = 1/\delta$, $y = x$, $g = x$, $n = \dim x$, $i = 1$.

2. Вычислить $y_i = x_i + \delta$, $f_y = f(y)$, $g_i = k(f_x - f_y)$.

3. Положить $y_i = x_i$, $i = i + 1$.

4. Если $i < n$, перейти к п. 2.

5. Выйти из алгоритма.

На шаге 1 алгоритма параметр приращения независимых переменных δ вычисляется с использованием "машинного эпсилон" ε_m – встроенной константы системы MATLAB [14].

Процесс минимизации функции улучшенной ИКО (6) для системы второго порядка с ПФ (4) методом адаптации шага представлен на рис. 1, 2. Начальная точка отмечена кругом, конечная – ромбом. Показаны 7 точек поиска. На рис. 2 по сравнению с рис. 1 добавлена еще одна горизонтальная координата i, обозначающая номер точки поиска. Из начальной точки $x_0 = 1$ большой начальный шаг $h = 2{,}5$ вывел процесс оптимизации из области устойчивости. Третья точка поиска оказалась вне области устойчивости с отрицательным значением целевой функции (6). На границе области устойчивости $x = 0$ эта функция терпит разрыв – бесконечный скачок. Поэтому при дальнейшем поиске целевая функция стремится к $-\infty$, и точка минимума ИКО, отмеченная звездочкой, оказывается недостижимой.

Процесс минимизации функции улучшенной ИКО (9) для системы третьего порядка с ПФ (7) и значениями весовых коэффициентов $\tau_1 = \sqrt{3}$ и $\tau_2 = 1$, полученный методом БФГШ, представлен на рис. 3, 4. Тонкой линией соединены все 8 точек поиска, а перекрывающей ее жирной линией соединены лучшие точки поиска.

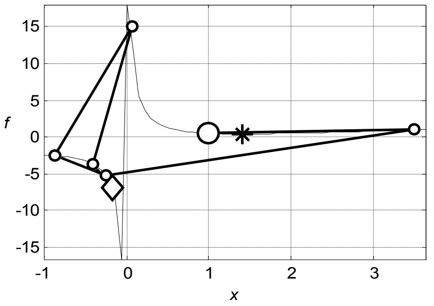

Рис. 1. График минимизации функции ИКО для САУ 2-го порядка

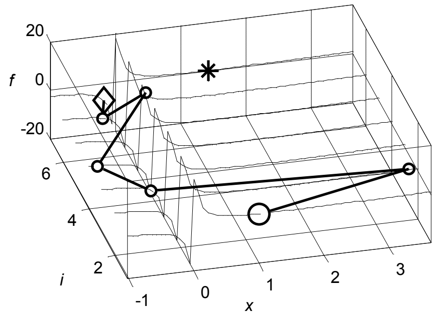

Рис. 2. Трехмерный график минимизации функции ИКО для САУ 2-го порядка

На рис. 3 показаны линии уровня целевой функции. Рис. 4 представляет процесс минимизации функции ИКО на трехмерном графике целевой функции. Из начальной точки $x^{(0)} = (1; 2)$ большой начальный шаг $h = 3$ вывел процесс оптимизации из области устойчивости.

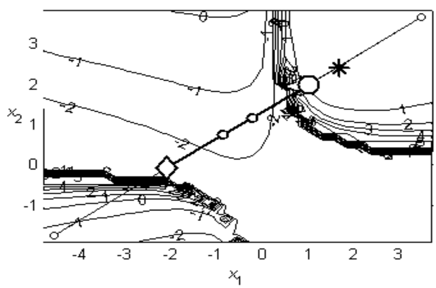

Рис. 3. График минимизации функции ИКО для САУ 3-го порядка

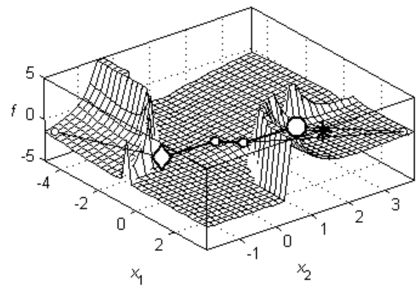

Рис. 4. Трехмерный график минимизации функции ИКО для САУ 3-го порядка

Пошаговый подход к минимизации оценок. Для исключения случая выхода из области устойчивости разработан пошаговый подход выполнения условий устойчивости с помощью векторной целевой функции [8 – 11]:

$$F(x) = \begin{cases} (0; P(x)), & x \in H_0; \\ (k; -\rho_{k+1}(x)), & x \in H_k, \quad k = \overline{1, n-2}; \\ (n-1; I(x)), & x \in H_{n-1}. \end{cases} \tag{10}$$

Здесь используется штрафная функция нарушения неравенств (1):

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} \max\{-\alpha_i(x), 0\}.$$

Функция (10) формируется на основании областей уровней H_k, которые определяются последовательным выполнением неравенств (1). В отличие от функции ИКО $I(x)$ векторная целевая функция (10) определена во всем пространстве переменных параметров, ее первая проекция $F_1(x)$ – функция уровня представляет число выполненных ограничений, а ее вторая проекция $F_2(x)$ – функция штрафа в области устойчивости совпадает с ИКО.

Разработан алгоритм вычисления функции (10) по методу К. Ю. Острема.

Алгоритм вычисления векторной целевой функции с ИКО. Входные параметры: α и β – массивы коэффициентов знаменателя и числителя ПФ; τ – массив весовых коэффициентов улучшенной ИКО. Выходные параметры: F – значение векторной целевой функции; B – признак устойчивости системы.

1. Положить $n = \dim\alpha$, $B = 1$, $P = 0$, $h = 0$, $i = 0$.

2. Если $\alpha_i \le 0$, положить $P = P - \alpha_i$, $B = 0$.

3. Если $i < n$, положить $i = i + 1$ и перейти к п. 2.

4. Если $\neg B$, положить $F = (h; P)$ и перейти к п. 16.

5. Положить $c = \beta \otimes \tau$, $\gamma = \alpha - (0(\dim\alpha - \dim c), c)$, $\gamma_n = \varnothing$.

6. Положить $m = n - 1$, $I = 0$, $k = 2$.

7. Положить $h = h + 1$, $\mu = \alpha_{k-2}/\alpha_{k-1}$, $\lambda = \gamma_{k-2}/\alpha_{k-1}$, $I = I + \lambda^2/\mu$, $i = k$.

8. Положить $\alpha_i = \alpha_i - \mu\alpha_{i+1}$, $\gamma_i = \gamma_i - \lambda\alpha_{i+1}$.

9. Если $i < m$, положить $i = i + 2$ и перейти к п. 8.

10. Если $\alpha_k \le 0$, положить $F = (h; -\alpha_k)$, $B = 0$ и перейти к п. 16.

11. Если $k < m$, положить $k = k + 1$ и перейти к п. 7.

12. Положить $k = m$.

13. Положить $\mu = \alpha_{k-1}/\alpha_k$, $\lambda = \gamma_{k-1}/\alpha_k$, $I = I + \lambda^2/\mu$.

14. Если $k < n$, положить $k = k + 1$ и перейти к п. 13.

15. Положить $F = (h + 1;\ 0{,}5I)$.

16. Остановиться.

На шаге 5 с помощью операции $\otimes$ выполняется свертка двух векторов, аналогичная перемножению многочленов. Перед вычитанием векторов производится выравнивание их размерностей путем добавления нулей в начало вычитаемого вектора c. Последний элемент вектора γ исключается.

Процесс минимизации ИКО с возвращением в область устойчивости можно выполнить рассмотренными алгоритмами методов оптимизации, если заменить в них скалярную функцию $f(x)$ векторной функцией $F(x)$ и переопределить для нее операции сравнения и вычитания:

$$F^{(k)} < F^{(j)} = \begin{cases} 1, & F_1^{(k)} > F_1^{(j)} \vee F_1^{(k)} = F_1^{(j)} \wedge F_2^{(k)} < F_2^{(j)}, \\ 0, & F_1^{(k)} < F_1^{(j)} \vee F_1^{(k)} = F_1^{(j)} \wedge F_2^{(k)} \geq F_2^{(j)}, \end{cases}$$

$$F^{(k)} - F^{(j)} = \begin{cases} F_1^{(j)} - F_1^{(k)}, & F_1^{(k)} \neq F_1^{(j)}, \\ F_2^{(k)} - F_2^{(j)}, & F_1^{(k)} = F_1^{(j)}. \end{cases}$$

Такое переопределение обеспечивает минимизацию функции штрафа $F_2(x)$ с приоритетной максимизацией функции уровня $F_1(x)$, что и предотвращает выход из области устойчивости.

Применение пошагового подхода. Процесс минимизации улучшенной интегральной квадратичной оценки (3) для САУ второго порядка методом адаптации шага с использованием функции (10) представлен на рис. 5, 6. Из начальной точки $x_0 = 1$ минимум ИКО получен с начальным шагом 2,5 и допустимой погрешностью шага 10^{-3} за 15 вычислений векторной функции: $x^* = 1{,}4138$, $I^* = 0{,}4142$.

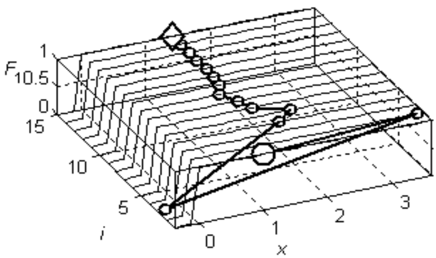

Рис. 5. Оптимизация САУ 2-го порядка на графике функции уровня

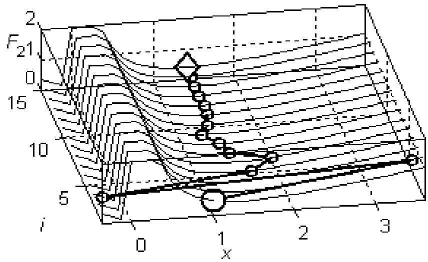

Рис. 6. Оптимизация САУ 2-го порядка на графике функции штрафа

Процесс минимизации улучшенной интегральной квадратичной оценки (3) для значений $\tau_1 = \sqrt{3}$, $\tau_2 = 1$ и системы третьего порядка, полученный методом БФГШ с адаптацией шага, представлен на рис. 7, 8. Тонкой линией соединены все точки поиска, а жирной линией – лучшие точки итераций. Из начальной точки $x^{(0)} = (1; 2)$ минимум ИКО получен с начальным шагом 3 и допустимой погрешностью 10^{-3} по шагу за 77 вычислений функции: $x^* = (1{,}6760; 2{,}4057)$, $I^* = 0{,}3753$.

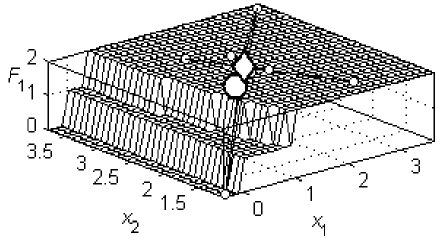

Рис. 7. Оптимизация САУ 3-го порядка на графике функции уровня

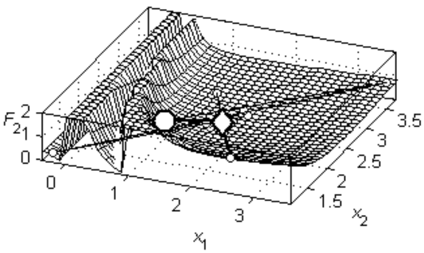

Рис. 8. Оптимизация САУ 3-го порядка на графике функции штрафа

Выводы. Проделанная работа позволяет сделать следующие выводы.

1. Рассмотрены улучшенные интегральные квадратичные оценки качества, применяемые для синтеза систем автоматического управления.
2. Разработаны алгоритмы численных методов оптимизации, которые при минимизации оценок приводят к выходу из области устойчивости.
3. Рассмотрен пошаговый подход к минимизации оценок качества с помощью векторной целевой функции и разработан алгоритм ее вычисления.
4. Применение пошагового подхода позволило минимизировать оценки качества методами оптимизации с учетом ограничений устойчивости системы.

Список литературы: 1. *Бесекерский В.А., Попов Е.П.* Теория систем автоматического управления. – СПб.: Профессия, 2004. – 752 с. **2.** *Иващенко Н.Н.* Автоматическое регулирование. – М.: Машиностроение, 1978. – 736 с. **3.** Теория автоматического управления. Ч. 1 / Под ред. *А.А. Воронова.* – М.: Высшая школа, 1986. – 367 с. **4.** Теория автоматического регулирования. Книга 1 / Под ред. *В.В. Солодовникова*. – М.: Машиностроение, 1967. – 767 с. **5.** *Дорф Р., Бишоп Р.* Современные системы управления. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2002. – 832 с. **6.** *Кац А.М.* К вопросу о вычислении квадратичного качества регулирования // Прикладная математика и механика. – 1952. – Т. XVI. – Вып. 3. – С. 362–364. **7.** *Острем К.Ю.* Введение в стохастическую теорию управления. – М.: Мир, 1973. – 322 с. **8.** *Северин В.П.* Минимизация интегральных квадратичных оценок систем автоматического управления. Часть 1. Вычисление оценок // Проблемы управления и информатики. – 2004. – № 4. – С. 5–16. **9.** *Северин В.П.* Минимизация интегральных квадратичных оценок систем автоматического управления. Часть 2. Пошаговый подход // Проблемы управления и информатики. – 2004. – № 5. – С. 5–15. **10.** *Северин В.П.* Векторная оптимизация интегральных квадратичных оценок систем автоматического управления // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2005. – № 2. – С. 52–61. **11.** *Северин В.П.* Моделі і методи оптимізації показників якості систем автоматичного управління енергоблоку атомної електростанції: Автореф. дис... д-ра техн. наук: 05.13.07 / НТУ "ХПІ". Харків, 2007. – 36 с. **12.** *Fletcher R.* Practical Methods of Optimization. Second Edition. Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 2006. – 436 p. **13.** *Нікуліна О.М.* Багатокритеріальний параметричний синтез систем автоматичного керування реакторної установки АЕС: Автореф. дис... канд. техн. наук: 05.13.07 / НТУ "ХПІ". Харків, 2008. – 21 с. **14.** *Дьяконов В.* MATLAB 6: учебный курс. – СПб.: Питер, 2001. – 592 с.

УДК 62-5

Алгоритми покрокового багатокритеріального синтезу систем автоматичного керування за інтегральними квадратичними оцінками / Джафарі Хенджані Сейед Моджтаба, Северин В.П. // Вісник НТУ "ХПІ". Тематичний випуск: Інформатика і моделювання. – Харків: НТУ "ХПІ". – 2009. – № 13. – С. 150 – 158.

У статті розглядаються алгоритми покрокового багатокритеріального синтезу систем автоматичного керування за покращеними інтегральними квадратичними оцінками з використанням комп'ютерної системи MATLAB на основі математичних моделей та методів векторної оптимізації. Наведені приклади розв'язання задач синтезу для моделей систем керування без використання та з використанням покрокового підходу. Іл.: 8. Бібліогр.: 14 назв.

Ключові слова: алгоритм, багатокритеріальний синтез, система автоматичного керування, інтегральна квадратична оцінка, комп'ютерна система MATLAB.

UDC 62-5

Algorithms of step-by-step multicriterion synthesis of automatic control systems using integral quadratic estimates / Jafari Henjani Seyed Mojtaba, Severin V.P. // Herald of the National Techical University "KhPI". Subject issue: Information Science and Modelling. – Kharkov: NTU "KhPI". – 2009. – №. 13. – P. 150 – 158.

In paper the algorithms of step-by-step multicriterion synthesis of automatic control systems using improved integral quadratic estimates are considered in MATLAB computer system on the basis of mathematical models and methods of vector optimization. The examples of synthesis tasks solution for control systems models with and without step-by-step approach are produced. Figs.: 8. Refs.: 14 titles.

Key words: algorithm, multicriterion synthesis, automatic control system, integral quadratic estimates, MATLAB computer system.

Поступила в редакцию 10.04.2009