

В.Л. ТИМЧЕНКО, канд. техн. наук, доц. НУК (г. Николаев)

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМ ОБЪЕКТОМ НА ОСНОВЕ МЕТОДА СТРУКТУРНО-ПЕРЕКЛЮЧАЕМЫХ ОБРАТНЫХ СВЯЗЕЙ

Рассмотрено решение задачи оптимального синтеза управляющих функций в линейных системах с непрерывным временем путем построения специальной структурной конфигурации переключаемых обратных связей, обеспечивающей необходимый порядок производных фазовых переменных с соответствующими позитивными или негативными постоянными значениями. Приведен порядок синтеза для линейного объекта при произвольных фазовых траекториях.

Ключевые слова: оптимальный синтез, управляющие функции, линейные системы, структурно-переключаемые обратные связи.

Постановка проблемы и анализ литературы. Решение задачи синтеза оптимальных управляющих воздействий, которые обеспечивают переходный процесс управления объектом с заданными показателями качества, является актуальным при разработке эффективных прикладных инженерных методов синтеза. Классические методы оптимального управления приводят к ряду вычислительных сложностей, например, необходимости решения краевых задач [1, 2, 3]. Аналитическое решение краевых задач, с учетом многомерности управляемого объекта, затруднительно и громоздко, а численные решения в ряде случаев не дают достаточно быстрой сходимости [4, 5]. Различные подходы оптимизации динамики объектов управления с помощью цепей обратных связей получили развитие в работах [6, 7], однако они не дают решения для задачи построения оптимальной траектории движения объекта.

Цель статьи – развитие подхода к синтезу оптимального управления, который не требует непосредственного решения дифференциальных уравнений динамики объекта для нахождения оптимальных управляющих функций и в тоже время обеспечивает управление с помощью специальных структур цепей обратных связей [8, 9].

Планирование оптимальной фазовой траектории. Произвольную фазовую траекторию объекта управления можно описать как совокупность отрезков траекторий с постоянной производной определенного порядка.

Фазовую траекторию динамического объекта, например, для вектора $\mathbf{X}(t)$ представим для i -го отрезка траектории с помощью разложения в ряд Тейлора

$$\mathbf{X}(t_{i+1}) = \mathbf{X}(t_i) + \frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} \Big|_{t_i} \frac{\Delta t^1}{1!} + \frac{d^2\mathbf{X}(t)}{dt^2} \Big|_{t_i} \frac{(\Delta t^1)^2}{2!} + \dots + \frac{d^k\mathbf{X}(t)}{dt^k} \Big|_{t_i} \frac{(\Delta t^1)^k}{k!} + \dots + \mathbf{R}_p,$$

где $\mathbf{X}(t) = \{x_x(t); x_y(t); x_z(t)\}$ – вектор фазовых координат объекта по координатным осям $l = \{x, y, z\}$; \mathbf{R}_p – вектор, определяющий остаточные члены ряда Тейлора; $\Delta t^l = t_{i+1}^l - t_i^l$; t_i^l, t_{i+1}^l – начальный и конечный моменты времени движения объекта по каждой из координатных осей на i -м отрезке.

Планирование фазовой траектории объекта управления для начальных условий

$$\{x_{ox}, x_{oy}, x_{oz}; \dot{x}_{ox}, \dot{x}_{oy}, \dot{x}_{oz}; \dots; x_{ox}^{(k)}, x_{oy}^{(k)}, x_{oz}^{(k)}\}$$

и конечных условий

$$\{x_{fx}, x_{fy}, x_{fz}; \dot{x}_{fx}, \dot{x}_{fy}, \dot{x}_{fz}; \dots; x_{fx}^{(m)}, x_{fy}^{(m)}, x_{fz}^{(m)}\}$$

будет заключаться в определении необходимого количества отрезков фазовой траектории с постоянными значениями соответствующих производных вектора $\mathbf{X}(t)$, а также моментов времени t_i^l переключения управляющих функций в обратных связях для обеспечения перехода объекта с данного отрезка траектории на следующий отрезок по каждой из координатных осей $l = \{x, y, z\}$.

Исследование фазовых траекторий и формирование принципов оптимальности движения динамического объекта. Рассмотрим синтез оптимальных управляющих функций для многомерного объекта при использовании критерия оптимальности по минимуму потраченной на движение энергии. Исследуем движение объекта на плоскости на прямолинейном отрезке траектории для координаты $x(t)$ при одинаковых граничных условиях по двум возможным фазовым траекториям, которые описываются следующими уравнениями

$$x(T_1) = x(0) + \dot{x}(0)T_1 + \ddot{x}(0)\frac{T_1^2}{2!} + \dots + x^{(m)}(0)\frac{T_1^m}{m!}; \quad (1)$$

$$x(T_2) = x(0) + \dot{x}(0)T_2 + \ddot{x}(0)\frac{T_2^2}{2!} + \dots + x^{(r)}(0)\frac{T_2^r}{r!}, \quad (2)$$

где $x(0), x(T_1) = x(T_2)$ – начальные и конечные координаты движения; T_1, T_2 – время движения по каждой из траекторий; m, r – порядок высших производных фазовых координат; $m > r$.

Изменение кинетической энергии объекта массой M для первой траектории движения будет иметь вид

$$\Delta E_1 = \frac{Mv_x^2(T_1)}{2} - \frac{M[\dot{x}(0)]^2}{2},$$

$$\text{где } v_x(T_1) = \dot{x}(0) + \ddot{x}(0)T_1 + \dots + x^{(m)}(0) \frac{T_1^{m-1}}{(m-1)!};$$

для второй –

$$\Delta E_2 = \frac{Mv_x^2(T_2)}{2} - \frac{M[\dot{x}(0)]^2}{2},$$

$$\text{где } v_x(T_2) = \dot{x}(0) + \ddot{x}(0)T_2 + \dots + x^{(r)}(0) \frac{T_2^{r-1}}{(r-1)!}.$$

Сравнительная оценка энергии, необходимой для перехода объекта управления из начального состояния в конечное состояние по фазовым траекториям, показывает, что при движении по траектории (2) расходы энергии меньше. Следовательно, можно сделать вывод, что траектория (2), лучше, чем (1) по расходам энергии. При этом в случае $(m - r) = 1$ разница кинетических энергий $\Delta E = \min$, а с ростом $(m - r)$ величина ΔE будет также расти. Анализ показывает, что оптимальной по минимуму расходов энергии есть траектория с наименьшим количеством производных фазовых переменных, необходимых для выполнения всех граничных условий. При этом время переходного процесса $T_2 > T_1$. Для произвольных значений m и r можно сделать обобщенный вывод о требованиях к оптимальности движения динамического объекта: при положительных значениях производных траектория будет оптимальной по быстрдействию при движении с учетом максимально возможного количества производных вектора координат, при этом это будет траектория с наибольшим расходом энергии.

Решения задач поиска оптимальных фазовых траекторий описывают формирование непрерывных процессов "разгона" или "торможения". Широкий класс задач оптимального управления включает задачи с ограниченной функцией управления и предельными условиями, которые нуждаются в переключении управляющей функции.

Определение моментов переключения управляющих функций в обратных связях объекта управления. Переключение управляющих функций обеспечивает необходимый порядок производной фазовой координаты с соответствующими позитивными или негативными постоянными значениями. Моменты переключения управляющих функций в обратной связи будут определяться на основе энергетического анализа (гамильтониана системы), вида фазовых траекторий с учетом ограничений на управляющее воздействие, критерия оптимальности и заданных граничных условий.

В общем виде процесс управления можно разбить на этапы "разгона" и "торможения" по заданным показателям, например, при постоянном ускорении движения. Будем считать, что объект управления первого порядка

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t) \quad (3)$$

начинает движение с начальными условиями

$$x(0); \dot{x}(0); \ddot{x}(0); \dots; x^{(k)}(0).$$

Необходимые начальные значения управляющих функций для движения объекта с заданными начальными условиями определяются из следующих соотношений

$$u(0) = \frac{\dot{x}(0) - ax(0)}{b};$$

.....

$$u^{(k-1)}(0) = \frac{x^{(k)}(0) - a^{(k-1)}x(0)}{b}.$$

В случае заданных ограничений на управляющее воздействие максимальными значениями управляющих функций, в начальный момент времени ($t = 0$) будут выполняться соотношения:

$$\dot{x}(0) = ax(0) + bu_{\max}(0);$$

$$\ddot{x}(0) = a^2x(0) + abu_{\max}(0) + b\dot{u}_{\max}(0);$$

.....

$$x^{(k)}(0) = a^kx(0) + a^{k-1}bu_{\max}(0) + \dots + b u_{\max}^{(k-1)}(0).$$

Фазовые уравнения траекторий "разгона" до заданной скорости $\dot{x}(t_{i+1})$ и последующего движения объекта управления с ее постоянным значением $\dot{x}(t_{i+1}) = \text{const}$ до момента времени t_{i+2} запишем в виде

$$x(t_1) = x(0) + \dot{x}(0)t_1 + \ddot{x}(0)\frac{t_1^2}{2} + \dots + x^{(k)}(0)\frac{t_1^k}{k!};$$

$$x(t_2) = x(t_1) + \dot{x}(t_1)(t_2 - t_1) + \ddot{x}(t_1)\frac{(t_2 - t_1)^2}{2} + \dots + x^{(k-1)}(t_1)\frac{(t_2 - t_1)^{k-1}}{(k-1)!}; \quad (4)$$

.....

$$x(t_{i+2}) = x(t_{i+1}) + \dot{x}(t_{i+1})(t_{i+2} - t_{i+1}).$$

Этап "торможения" от постоянной скорости $\dot{x}(t_{i+1}) = \text{const}$ до заданного значения скорости $\dot{x}(t_m) = \text{const}$ описывается уравнениями

$$\begin{aligned}
 x(t_{i+3}) &= x(t_{i+2}) + \dot{x}(t_{i+2})(t_{i+3} - t_{i+2}) - \dots - x^{(k)}(t_{i+2}) \frac{(t_{i+3} - t_{i+2})^k}{k!}; \\
 &\dots\dots\dots \\
 x(t_m) &= x(t_{m-1}) + \dot{x}(t_{m-1})(t_m - t_{m-1}) - \ddot{x}(t_{m-1}) \frac{(t_m - t_{m-1})^2}{2}; \\
 x(t_{m+1}) &= x(t_m) + \dot{x}(t_m)(t_{m+1} - t_m),
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

где t_i ($i = 1, \dots, m$) – моменты переключения управляющих функций.

Синтез управляющих функций для линейного объекта первого порядка. Одномерный стационарный линейный объект управления описывается скалярным уравнением (3) и после дифференцирования $(n-1)$ раз дает совокупность уравнений

$$\begin{aligned}
 \ddot{x}(t) &= a\dot{x}(t) + b\dot{u}(t); \\
 \ddot{x}(t) &= a\ddot{x}(t) + b\ddot{u}(t); \\
 &\dots\dots\dots \\
 x^{(n)}(t) &= a^{(n-1)}x^{(n-1)}(t) + b^{(n-1)}u^{(n-1)}(t).
 \end{aligned}$$

Для реализации траекторий вида (4), (5) необходимо управляющее воздействие, при котором соответствующая производная координаты $x(t)$ равняется нулю. Таким образом, можно записать

$$\begin{aligned}
 u(t) &= b^{-1}ax(t); \quad \dot{x}(t) = 0; \\
 \dot{u}(t) + au(t) &= -b^{-1}a^2x(t); \quad \ddot{x}(t) = 0; \\
 &\dots\dots\dots \\
 u^{(n-1)}(t) + a^{(n-2)}u^{(n-2)}(t) + \dots + a^{n-2}\dot{u}(t) + a^{n-1}u(t) &= -b^{-1}a^nx(t); \quad x^{(n)}(t) = 0.
 \end{aligned}$$

После применения преобразования Лапласа при нулевых начальных условиях для управляющих воздействий будем иметь

$$\begin{aligned}
 u(p) &= -b^{-1}ax(p); \\
 u(p) &= -\frac{b^{-1}}{p+a}a^2x(p); \\
 &\dots\dots\dots \\
 u(p) &= -\frac{b^{-1}}{p^{n-1} + ap^{n-2} + \dots + a^{n-2}p + a^{n-1}}a^nx(p).
 \end{aligned}$$

Полученные уравнения позволяют в цепях обратных связей формировать

управляющие функции, которые обеспечивают движение объекта по фазовым траекториям вида (4), (5).

Для синтеза управляющих воздействий с учетом начальных значений $u_0, \dot{u}_0, \dots, u_0^{(k)}$ будем иметь выражения

$$u(p) = -b^{-1}ax(p);$$

$$u(p) = \frac{-b^{-1}a^2x(p) + u_0}{p + a};$$

$$u(p) = \frac{-b^{-1}a^kx(p) + u_0(p^{k-2} + \dots + a^{k-2}) + \dot{u}_0(p^{k-3} + \dots + a^{k-3}) + \dots + u_0^{(k-2)}}{p^{k-1} + ap^{k-2} + \dots + a^{k-2}p + a^{k-1}}.$$

Пример 1. Рассмотрим движение линейного объекта (3) с начальными условиями $\dot{x}_0 = 1; x_0 = 0$. Тогда для начального значения управления получим $u_0 = (\dot{x}_0 - ax_0)b^{-1} = b^{-1}$. Для функции управления после применения преобразования Лапласа при нулевой второй производной имеем $u(p) = \frac{-a^2x(p) + 1}{b(p+a)}$. При начальных условиях $\dot{x}_0 = 1; x_0 = 1$ получим $u_0 = b^{-1}(1-a)$ и запишем для управляющей функции при нулевой второй производной $u(p) = \frac{-a^2x(p) + 1 - a}{b(p+a)}$ (структурная схема представлена на рис. 1).

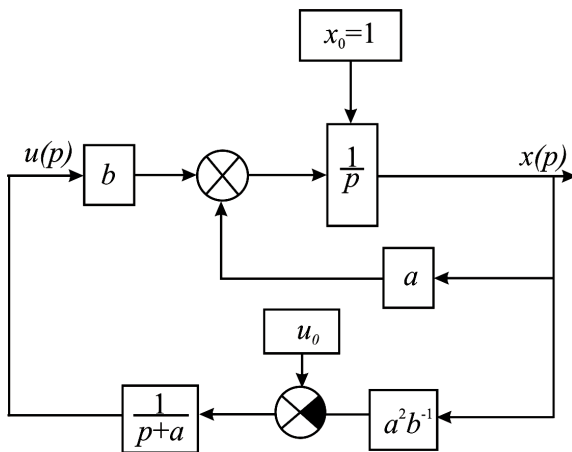


Рис. 1.

Пример 2. При движении объекта (3) по фазовой траектории из двух отрезков

$$x(t_1) = x(0) + \dot{x}(0)t_1 + |\ddot{x}(0)|\frac{t_1^2}{2};$$

$$x(T) = x(t_1) + \dot{x}(t_1)(T - t_1) - |\ddot{x}(0)|\frac{(T - t_1)^2}{2},$$

где T , t_1 – время перехода и момент переключения управляющей функции, соответственно. Структурная схема со структурно-переключаемыми обратными связями для этого случая приведена на рис. 2.

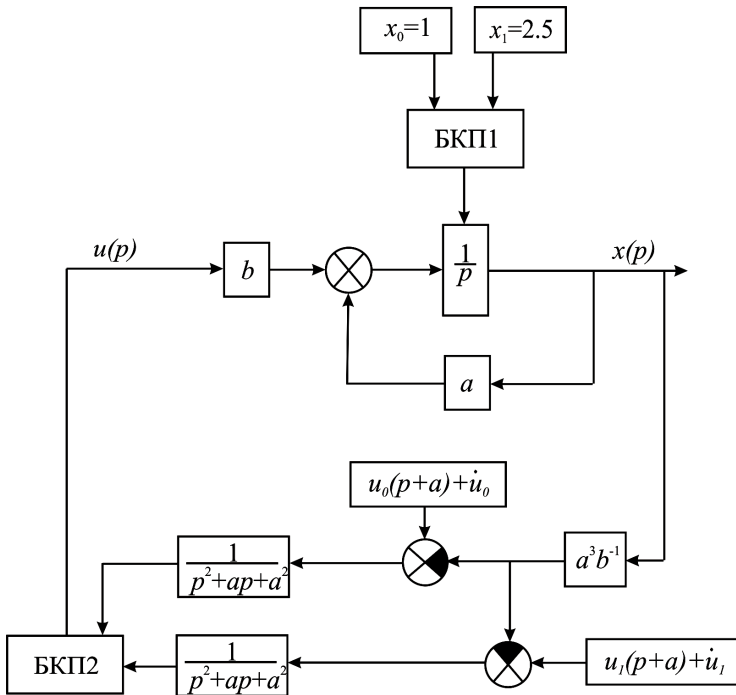


Рис. 2.

При нулевой третьей производной для начальных условий $\ddot{x}_0 = 1$; $\dot{x}_0 = 1$; $x_0 = 1$; $u_0 = \dot{u}_0 = b^{-1}(1-a)$ имеем для первого отрезка траектории функцию управления $u(p) = \frac{-a^3x(p) + (1-a)(p+a+1)}{b(p^2+ap+a^2)}$.

Для второго отрезка при значении $t_1 = 1$ с учетом полученных конечных условий для первого отрезка (начальных для второго) $\ddot{x}_1 = -1$; $\dot{x}_1 = 2$; $x_1 = 2.5$; $u_1 = b^{-1}(2 - 2.5a)$; $\dot{u}_1 = -b^{-1}(1 + 2a)$ (структурная схема – рис. 2; БКП1, БКП2 – блоки ключей переключения) получаем

$$u(p) = \frac{-a^3 x(p) + (2 - 2.5a)p - 2.5a^2 - 1}{b(p^2 + ap + a^2)}.$$

Выводы. Предложенный метод структурно-переключаемых обратных связей для синтеза управляющих функций позволяет для широкого класса динамических объектов решать практические задачи построения оптимальных фазовых траекторий движения для различных критериев оптимальности и вида граничных условий. Следует отметить, что построение оптимальной траектории и определение моментов времени переключения управляющих функций осуществляется путем решения системы алгебраических уравнений; полученные выражения для управляющих функций физически реализуемы, а применение управляющих функций в цепях обратной связи не требует непосредственного измерения производных фазовых переменных на выходе объекта управления.

Список литературы: 1. Понтрягин Л.С. Математическая теория оптимальных процессов – М.: Наука, 1974. – 392 с. 2. Чаки Ф. Современная теория управления. – М.: Мир, 1975. – 424 с. 3. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. Красовского А.А. – М.: Наука, 1987. – 711 с. 4. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. – М.: Мир, 1968. – 184 с. 5. Ларин В.Б. О симметризации двухточечной краевой задачи // Проблемы управления и информатики. – К. – 2002. – № 3. – С. 30 – 38. 6. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Ружижская Е.А. Реализация ограниченной обратной связи в нелинейной задаче регулирования // Кибернетика и системный анализ. – К., 2009. – № 1. – С. 108 – 117. 7. Ларин В.Б. Стабилизация системы обратной связью по выходной переменной // Проблемы управления и информатики. – К., 2004. – № 2. – С. 5 – 18. 8. Kondratenko Y.P., Timchenko V.L. Optimal feedback switching method for linear control systems // Systems and Networks: Mathematical Theory and Applications (Mathematical Research). – Berlin: Academia Verlag, 1994. – Vol. 79. – P. 291 – 292. 9. Тимченко В.Л. Синтез управляющих функций на основе структурно-переключаемых обратных связей при управлении многомерным объектом // Труды Одесского политехнического университета. – Вып. 2 (24), 2005. – С. 155 – 160.

УДК 62-502

Оптимальне управління лінійним об'єктом на основі методу структурно-перемиканих зворотних зв'язків / Тимченко В.Л. // Вісник НТУ "ХПІ". Тематичний випуск: Інформатика і моделювання. – Харків: НТУ "ХПІ". – 2009. – № 13. – С. 167 – 175.

Розглянуто рішення задачі оптимального синтезу керуючих функцій в лінійних системах з безперервним часом шляхом побудови спеціальної структурної конфігурації зворотних перемиканих зв'язків, що забезпечує необхідний порядок похідних фазових змінних з відповідними позитивними або негативними постійними значеннями. Приведено порядок синтезу для лінійного об'єкту при довірливих фазових траєкторіях. Іл.: 2. Бібліогр.: 9 назв.

Ключові слова: оптимальний синтез, керуючі функції, лінійні системи, структурно-перемикані зворотні зв'язки.

UDC 62-502

Optimal control of linear object on basis of method of the structurally-commuted feed-backs
/ **Tymchenko V.L.** // Herald of the National Technical University "KhPI". Subject issue: Information Science and Modelling. – Kharkov: NTU "KhPI". – 2009. – №. 13. – P. 167 – 175.

The decision of task of optimal synthesis of control influences is considered in the linear systems with continuous time by the construction of the special structural configuration of feed-backs, providing the necessary order of derivative phase variables with the proper positive or negative constant values. The order of synthesis is resulted for a linear object at the arbitrary phase trajectories. Figs: 2. Refs: 9 titles.

Keywords: optimal synthesis, control functions, linear systems, structurally-commuted feed-backs.

Поступила в редакцию 22.04.2009