УДК 519-95

Л.М. ЛЮБЧИК, д-р техн. наук, проф. НТУ "ХПИ" (г. Харьков),
Ю.И. ДОРОФЕЕВ, канд. техн. наук, НТУ "ХПИ" (г. Харьков)

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЯЕМОЙ СЕТИ ПОСТАВОК

Рассматривается задача моделирования сети поставок. С применением балансных уравнений динамики уровней запасов продукции в узлах сети получена математическая модель сложной динамической системы как объекта управления. Выполнен анализ особенностей задачи синтеза системы управления поставками, которая гарантирует полное и своевременное удовлетворение спроса со стороны пользователей с учетом временных задержек на транспортировку и обработку продукции. Ил.: 1. Библиогр.: 13 назв.

Ключевые слова: задача моделирования сети поставок, синтез системы управления поставками.

Постановка проблемы. Сеть поставок [1 – 4] определяется как совокупность взаимосвязанных бизнес-объектов, несущих коллективную ответственность за добычу сырья, производство, хранение, транспортировку и распространение некоторого набора продукции. Элементы сети поставок связаны противонаправленными материальными и информационными потоками. Материальные потоки от поставщиков сырья через этапы производства и промежуточного хранения, процессы транспортировки полуфабрикатов и готовой продукции попадают на склады потребителей. Информационные потоки в виде заказов на сырье и готовую продукцию движутся в противоположном направлении от конечных потребителей через систему маркетинга и планирования производства.

Каждый элемент сети поставок соответствует некоторому физическому объекту и может принадлежать к одному из следующих классов: поставщик сырья, производственный узел, узел хранения, продавец, потребитель.

С точки зрения теории автоматического управления рассматриваемая система представляет собой многосвязный динамический объект управления, подверженный действию внешних возмущений, роль которых выполняют колебания спроса со стороны потребителей. Возникает необходимость в разработке методов математического моделирования сети поставок как основы для решения задач оперативного управления планированием поставок с целью поддержания в узлах сети оптимальных уровней страховых запасов продукции с учетом наличия временных задержек на транспортировку и производство продукции при условии полного и своевременного удовлетворения спроса на готовую продукцию со стороны потребителей.

Анализ литературы. В работах [1 – 5] рассматриваются различные подходы к решению задач математического моделирования систем управления запасами в классической постановке. В работах [6 – 8] рассмотрены особенности построения динамической модели системы управления запасами в сетевой постановке без учета временных задержек в узлах сети. Различные подходы для построения математической модели управляемой сети поставок с учетом временных задержек предложены и исследованы в [9 – 14]. При постороении модели объекта в задачах оперативного управления уровнями запасов продукции в узлах сети возникает необходимость в развитии и обобщении предложенных подходов применительно к задачам математического моделирования сложных динамических систем с различными временными задержками, что и является **целью данной статьи.**

Построение модели управляемой сети поставок. Пусть сеть поставок содержит N узлов (элементов). Пронумеруем их в порядке возрастания вначале внутри каждой страты, соответствующей одному из перечисленных выше классов объектов, а затем продвигаясь от поставщиков сырья к потребителям готовой продукции. Узлы, моделирующие потребителей конечной продукции, в количестве N_e, группируются в последней страте. Будем считать, что каждый узел сети является однопродуктовой системой.

Для графического представления модели сети поставок предлагается использовать ориентированный взвешенный граф, вершины которого соответствуют узлам сети и группируются в страты в зависимости от их принадлежности к перечисленным выше классам. Наличие дуги между вершинами графа i и j означает, что узел сети i является поставщиком продукции для узла j. Вес дуги равен времени доставки продукции, которое считается известным после определения вида транспорта, типа топлива и порядка транспортировки, и обозначается $T_{i,j}$. Для математического описания графа используется матрица достижимости размерностью $(N-N_e)\times N$, которая содержит информацию о существовании путей между вершинами орграфа.

Формирование модели производственного узла. Для описания производственного узла i предлагается использовать следующие обозначения:

$\Pi=\{\pi_{ij}\},\ i,j=\overline{1,N-N_e}$ − производственная матрица, значение (i,j)-го элемента которой равно количеству продукта *j*, измеренному в единицах, которое требуется для производства единицы продукта *i*;

C_i − производительность узла i, измеряемая в единицах;

LT_i − целочисленная переменная, значение которой кратно периоду дискретизации Δt, обозначающая время выполнения заказа в узле *i*;

$Cost_i$ − стоимость производства единицы продукта i, измеренная в у.е.;

$Emis_i$ − объем выбросов CO_2, производимый узлом i в процессе производства единицы продукции, измеренный в кг;

λ_i − технологический коэффициент, обозначающий уровень загрузки оборудования узла i, измеренный в %.

Для математического описания производственных узлов предлагается использовать так называемую модель "time bucket discrete-event model" [5]. В такой модели: 1**)** выбирается период дискретизации по времени Δt и все временные задержки считаются кратными выбранному периоду; 2) время увеличивается пошагово, в конце каждого шага новое состояние определяется с помощью уравнений модели; 3) состояние системы характеризуется уровнем запасов каждого продукта в течение данного периода.

Структура взаимодействия узлов рассматриваемой сети поставок приведена на рисунке.

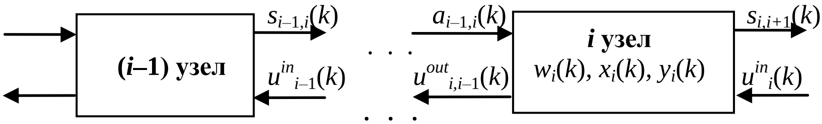

Рис. Модель взаимодействия узлов сети поставок

Обозначим соответственно через $w_i(k)$, $x_i(k)$ и $y_i(k)$ уровень запаса продукта i, находящийся в процессе обработки, имеющийся в наличии и объем неудовлетворенного спроса в момент времени k, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Пусть $u^{out}_{i,i-1}(k)$ – это объем запроса продукта $(i-1)$, который узел i отправляет на узел $(i-1)$ в момент k. Обозначим $a_{i-1,i}(k)$ – количество продукта $(i-1)$, которое в момент k фактически поступает от узла $(i-1)$ на узел i. По прошествии времени выполнения заказа LT_i соответствующее количество продукта i помещается в запас. Обозначим множество узлов, которые являются потребителями продукта i, через $D_i^{out} = \left\{ j \middle| \pi_{ji} \neq 0, j = \overline{i+1, N} \right\}$, а множество узлов, которые являются поставщиками сырья для узла i, через $D_i^{in} = \left\{ j \middle| \pi_{ij} \neq 0, j = \overline{1, i-1} \right\}$. Пусть $u_i^{in}(k) = \sum\limits_{j \in D_i^{out}} u^{out}_{j,i}(k)$ − это суммарный объем запросов продукта i, которые поступают на узел i в момент k из узлов D_i^{out}.

Тогда динамика узла i описывается следующими уравнениями:

$$w_i(k) = w_i(k-1) + \sum_{j \in D_i^{in}} a_{i,j}(k) - \sum_{j \in D_i^{in}} a_{i,j}(k - LT_i), \qquad w_i(0) = 0, \tag{1}$$

$$s_i(k) = \min\left\{ x_i(k-1) + \min_{j \in D_i^{in}} \left(\frac{a_{j,i}(k - LT_i)}{\pi_{ij}} \right),\ y_i(k-1) + u_i^{in}(k-1) \right\}, \tag{2}$$

$$x_i(k) = x_i(k-1) + \min_{j \in D_i^{in}} \left(\frac{a_{j,i}(k - LT_i)}{\pi_{ij}} \right) - s_i(k), \qquad x_i(0) = x_i^*, \tag{3}$$

$$y_i(k) = y_i(k-1) + u_i^{in}(k-1) - s_i(k), \quad y_i(0) = 0,\ i = \overline{1, N - N_e},\ k = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

Предполагается, что переменные, описывающие уровень запаса, являются неотрицательными в любой момент времени: $\forall k \;\; x_i(k) \ge 0$, $i = \overline{1, N}$.

Если текущий спрос удовлетворяется полностью, то выполняется равенство $s_{i,j}(k) = u_{j,i}^{out}(k-1) \;\; \forall j = \overline{1, N}$, то есть $s_i(k) = u_i^{in}(k-1)$. Узел j, который является поставщиком сырья для узла i, отправляет $s_{j,i}(k)$ количество продукта j в узел i, которое прибудет спустя время транспортировки $T_{j,i}$, т.е. выполняется равенство $a_{j,i}(k) = s_{j,i}(k - T_{j,i})$.

Будем предполагать, что потребители конечной продукции подают продавцам заявки с информацией о "номинальном" спросе $\overline{u}_i^{in}(k)$, $i = \overline{N - N_e + 1, N}$, для которого возможно вычислить управляющие воздействия $\overline{u}_{i,j}^{out}(k)$, $i, j = \overline{1, N - N_e}$, которые позволяют поддерживать желаемый неотрицательный страховой запас продукции $x_i^*(k)$, $i = \overline{1, N - N_e}$. Однако "номинальный" спрос $\overline{u}_i^{in}(k)$ подвергается воздействию возмущений. Обозначим через $\partial x_i(k)$ отклонение уровня запаса продукта i от номинального значения страхового запаса x_i^*, а через $\partial u_i^{in}(k)$ и $\partial u_{i,j}^{out}(k)$ – отклонение спроса на продукт i и заявок поставщикам сырья для узла i от номинальных значений $\overline{u}_i^{in}(k)$ и $\overline{u}_{i,j}^{out}(k)$ соответственно. Получим:

$$x_i(k) = x_i^* + \partial x_i(k),\ \ u_i^{in}(k) = \overline{u}_i^{in}(k) + \partial u_i^{in}(k),\ \ u_{i,j}^{out}(k) = \overline{u}_{i,j}^{out}(k) + \partial u_{i,j}^{out}(k). \tag{5}$$

Тогда с учетом уравнений (1) – (5) получим следующее уравнение в отклонениях

$$\partial x_i(k) = \partial x_i(k-1) + \min_{j \in D_i^{in}} \left(\frac{\partial u_{i,j}^{out}(k - \Lambda_{j,i})}{\pi_{ij}} \right) - \partial u_i^{in}(k-1), \tag{6}$$

где $\Lambda_{j,i} = T_{j,i} + LT_i + 1$. Целочисленная переменная $\Lambda_{j,i}$ определяет период запаздывания материальных потоков в сети.

С целью получения модели без временных задержек применим стандартную технику расширения пространства состояний системы. Предположим, что величины $\Lambda_{j,i}$ известны. Для определения максимального значения задержки для узла i возникает необходимость решения задачи, которая в терминах теории графов формулируется как поиск пути максимального веса. При этом к весу дуги, которое равно времени транспортировки $T_{i,j}$, добавляется время выполнения заказа LT_j.

Обозначим найденное суммарное максимальное значение временной задержки для узла i через $\Lambda_i^{\max}$. Определим следующий вектор:

$$z_i(k) = \left[\partial x_i(k), \left[\partial u_{i,j}^{out}(k-1)\right]^T, \left[\partial u_{i,j}^{out}(k-2)\right]^T, \ldots, \left[\partial u_{i,j}^{out}(k-\Lambda_i^{\max}+1)\right]^T\right]^T, \; j \in D_i^{in}. \quad (7)$$

Очевидно, что $z_i(k)$ определяет имеющийся в наличии уровень запаса продукта i и количество уже заказанных на момент времени k, но еще не доставленных и не обработанных ресурсов. Будем называть $z_i(k)$ фиктивным уровнем запаса продукта i в момент времени k и рассматривать в качестве вектора состояния узла i. Переменные $\partial u_{i,j}^{out}(k)$ могут рассматриваться как управляющие, а переменные $\partial u_i^{in}(k)$ – как возмущающие воздействия для узла i. Тогда с учетом введенных обозначений динамика узла i может быть описана следующим уравнением:

$$z_i(k+1) = A_i \cdot z_i(k) + B_i \cdot \partial u_{i,j}^{out}(k) + D_i \cdot \partial u_i^{in}(k), \quad (8)$$

где матрицы A_i, B_i и D_i формируются на основе уравнений (1) – (7).

Формирование модели сети поставок. Модели узлов сети, которые являются поставщиками сырья, узлами хранения, либо продавцами, строятся по аналогии с производственным узлом. Вектор состояния модели сети поставок формируется как совокупность векторов состояния узлов сети, из которых состоит модель $Z(k) = \left[z_1(k), \; \ldots, \; z_{N-N_e}(k)\right]^T$. При этом размерность вектора состояния равна $\Lambda = \sum_{i=1}^{N-N_e}\left(1 + (\Lambda_i^{\max} - 1) \cdot \left|D_i^{in}\right|\right)$. Вектор управляющих воздействий определяется как $U(k) = \left[\partial u_{1,j}^{out}(k) \middle| j \in D_1^{in}, \; \ldots, \partial u_{N-N_e}^{out}(k) \middle| j \in D_{N-N_e}^{in}\right]^T$ и имеет размерность $\Lambda_U = \sum_{i=1}^{N-N_e}\left|D_i^{in}\right|$. Роль внешних возмущающих воздействий выполняет вектор $F(k) = \left[\partial u_{N-N_e+1,j}^{out}(k) \middle| j \in D_{N-N_e+1}^{in}, \; \ldots, \; \partial u_{N,j}^{out}(k) \middle| j \in D_N^{in}\right]^T$ размерности $\Lambda_F = \sum_{i=N-N_e+1}^{N}\left|D_i^{in}\right|$.

С учетом введенных обозначений динамика сети поставок может быть описана следующим уравнением:

$$Z(k+1) = A \cdot Z(k) + B \cdot U(k) + D \cdot F(k)\,, \tag{9}$$

где $A = diag(A_i)$ − блочно-диагональная матрица размерности $\Lambda \times \Lambda$, а матрица B размерности $\Lambda \times \Lambda_U$ и матрица D размерности $\Lambda_F \times 1$ формируются в соответствии со структурой матрицы достижимости, описывающей граф сети поставок. В качестве выходных переменных модели рассматривается вектор $Y(k) = \left[\partial x_1(k),\ \ldots,\ \partial x_{N-N_e}(k)\right]^T$. Тогда уравнение выходов будет иметь вид $Y(k) = C \cdot Z(k)$, где $C = diag(C_i)$ − блочно-диагональная матрица размерности $N \times \Lambda$, где каждая матрица C_i размерности $1 \times \Lambda_i^{\max}$ имеет вид $C_i = \left[0 \quad \ldots \quad 0 \quad 1\right]$.

В результате выполненных преобразований модель сети поставок с различными временными задержками, обусловленными затратами времени на транспортировку продукции между узлами сети и обработку сырья в производственных узлах, была приведена к детерминированной динамической модели в пространстве состояний без временных задержек.

Выводы. Полученные уравнения модели сети поставок как объекта управления (9) могут быть использованы при решении задачи синтеза системы управления уровнями запасов продукции в узлах сети. Особенность рассматриваемой задачи заключается в наличии различных запаздываний в каналах объекта управления, следствием чего является существенное снижение качества управления и возможная потеря устойчивости замкнутой системы.

Таким образом, в работе обоснована возможность и эффективность применения методов математического моделирования для построения модели управляемой сети поставок. Дальнейшее развитие предложенной методики позволит рассмотреть комплексную задачу управления уровнями запасов продукции в узлах сети поставок с учетом существующих ограничений и внешних воздействий.

Список литературы: **1.** *Хедли Дж.* Анализ систем управления запасами / *Дж. Хедли, Т. Уайтин.* – М.: Наука, 1969. **2.** *Лотоцкий В.А.* Модели и методы управления запасами / *В.А. Лотоцкий, А.С. Мандель.* – М.: Наука, 1991. **3.** *Рыжиков Ю.И.* Теория очередей и управление запасами / *Ю.И. Рыжиков.* – СПб.: Питер, 2001. **4.** *Daganzo C.* A Theory of Supply Chains / *C. Daganzo.* – New York: Springer, 2003. **5.** *Kleijnen J.P.C.* Supply chain simulation tools and techniques: a survey / *J.P.C. Kleijnen* // International Journal of Simulation and Process Modelling. – 2005. – Vol. 1 (1/2). – P. 82–89. **6.** *Чаусова Е.В.* Динамическая сетевая модель управления запасами с интервальной неопределенностью спроса и устареванием запаса в узлах сети / *Е.В. Чаусова* // Вестник Томского государственного университета. – 2004. – № 284. – С. 103–108. **7.** *Chausova E.V.* Dynamic Network Inventory Control Model with Interval Nonstationary Demand Uncertainty / *E.V. Chausova* // Numerical algorithms. – 2004. – Vol. 37. – P. 71–84. **8.** *Чаусова Е.В.* Динамическая сетевая модель управления запасами с интервальной неопределенностью спроса и потерь запаса / *Е.В. Чаусова* // Вестник Томского государственного университета. – 2006. – № 290. – С. 208–215. **9.** *Blanchini F.* Feedback control on production-distribution systems with unknown demand and delays / *F. Blanchini, R. Pesenti,* *F. Rinaldi, W. Ukovich* // IEEE Transaction on robotics and automation. – 2000. – Vol. 16. – №. 3. – P. 313–317. **10.** *Blanchini F.* A network design problem for a distribution system with uncertain demands / *F. Blanchini, F. Rinaldi, W. Ukovich* // SIAM Journal on optimization. – 1997. – Vol. 7. – №. 2. – P. 560–578. **11.** *Hennet J.-C.* A bimodal scheme for multi-stage production and inventory control / *J.-C. Hennet* // Automatica. – 2003. – Vol. 39. – P. 793–805. **12.** *Sipahi R.* On Stability Analysis and Parametric Design of Supply Networks Under the Presence of Transportation Delays / *R. Sipahi, S. Lammer, S.-I. Niculescu, D. Helbing* // ASME-IMECE Conference. – Chicago, IL. – 2006. **13.** *Cal dentey R.* Analysis of a decentralized production-inventory system / *R. Cal dentey, L.M. Wein* // Manufacturing and Service Operations Management. – 2003. – Vol. 5. – № 1. – P. 1–17.

УДК 519-95

Математична модель керованої мережі постачань / Любчик Л.М., Дорофеєв Ю.І. // Вісник НТУ "ХПІ". Тематичний випуск: Інформатика і моделювання. – Харків: НТУ "ХПІ". – 2009. – № 43. – С. 108 – 114.

Розглядається задача моделювання мережі поставок. Із застосуванням балансних рівнянь динаміки рівнів запасів продукції у вузлах мережі отримана математична модель складної динамічної системи як об’єкта керування. Виконано аналіз особливостей задачі синтезу системи керування поставками, яка гарантує повне та своєчасне задоволення попиту зі сторони користувачів із урахуванням запізнення на транспортування та обробку продукції. Іл.: 1. Бібліогр.: 13 назв.

Ключевые слова: задача моделювання мережі поставок, задача синтезу системи управління поставками.

UDC 519-95

Mathematical model of the guided network of deliveries / Lubchik L.M., Dorofeev Yu.I. / Herald of the National Technical University "KhPI". Subject issue: Information Science and Modelling. – Kharkov: NTU "KhPI". – 2009. – №. 43. – P. 108 – 114.

The problem of supply network modelling is considered. Based on balance dynamics equations the complex dynamic system mathematical model as a controled object is obtained. The supply network controller design problem features is investigated subject with delays on transportation and manufactory products. Figs: 1. Refs.: 13 titles.

Keywords: task of design of network of deliveries, synthesis of control system by deliveries.

Поступила в редколлегию 15.10.2009