УДК 539.3

А.Ф. ВЕРЛАНЬ, д.т.н., Институт проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины, г. Киев,
Б.А. ХУДАЯРОВ, д.т.н., Ташкентский институт ирригации и мелиорации, г. Ташкент, Республика Узбекистан,
Э.Ф. ФАЙЗИБОЕВ, проф., Ташкентский институт ирригации и мелиорации, г. Ташкент, Республика Узбекистан,
З.У. ЮЛДАШЕВ, ст. преп., Ташкентский институт ирригации и мелиорации, г. Ташкент, Республика Узбекистан

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ В ЗАДАЧЕ О ФЛАТТЕРЕ ВЯЗКОУПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ, ОБТЕКАЕМОЙ ПОД ПРОИЗВОЛЬНОМ УГЛОМ В ПОТОКЕ ГАЗА

Рассмотрены нелинейные колебания вязкоупругих элементов тонкостенных конструкций в потоке газа. Разработаны методика и алгоритм численного решения интегро-дифференциальных уравнений. Определены критические скорости флаттера пластин в потоке газа. Ил.: 1. Табл.: 2. Библиогр.: 9 назв.

Ключевые слова: вязкоупругая пластина, алгоритм, интегро-дифференциальное уравнение, флаттер.

Постановка задачи и анализ литературы. В настоящее время композиционные материалы, обладающие ярко выраженными вязкоупругими свойствами, широко применяются в авиационной промышленности и многих других отраслях машиностроения. Эти отрасли получили легкие, изящные и экономичные тонкостенные конструкции, для которых роль расчетов на устойчивость в общем цикле прочностных расчетов резко возросла. В связи с этим наследственная теория вязкоупругости привлекает к себе все большее внимание исследователей. Об этом свидетельствует выход в свет за последние годы ряда научных работ, в которых отражены последние достижения теории вязкоупругости. Возрастающий интерес к этой теории объясняется развитием вычислительной техники, позволяющей достоверно сравнить вычислительный эксперимент, полученный на основе математических моделей, с натурным экспериментом. Следует отметить, что использование традиционных материалов в самолетостроении позволяло применять математические модели, которые уже сейчас можно называть упрощенными, не учитывающими в полной мере свойств вязкоупругости и других эффектов. Данные эффекты наиболее значительно проявляются в условиях сверхзвуковых потоков воздуха или жидкости, т.е. при высоких скоростях, которые приводят к возникновению эффекта флаттера.

Одно из основных затруднений для полного понимания явления сверхзвукового панельного флаттера состоит в том, что критическая скорость панельного флаттера зависит от большого числа параметров. В настоящее время трудность выделения многих из этих факторов при экспериментальном исследовании не позволяет получить удовлетворительного соответствия между экспериментальными и теоретическими результатами. Имеются обзоры исследованных задач: обширная библиография приведена у Фына [1], Эйсли, Льюэсен [2], Вентрес, Дауэлла [3]. Оказывается, что чувствительность скорости флаттера к таким факторам, как угол обтекания до сих пор является неполной.

В связи с этим **целью данной статьи** и является теоретическое исследование нелинейного флаттера вязкоупругих пластин, обтекаемых под произвольным углом. Акцент сделан на сопоставление результатов с ранее полученными известными результатами.

Рассмотрим задачу о колебаниях гибкой наследственно-деформируемой прямоугольной пластинки со сторонами a и b, движущейся в газе с большой сверхзвуковой скоростью V (рис. 1). Полагая, что зависимость между напряжениями и деформациями для материала пластинки линейно наследственная, используется упрощенная модель гибких пластин, а сила аэродинамического воздействия записывается согласно линеаризованной поршневой теории [4], получим уравнение Бергера для описания нелинейных колебаний тонкой изотропной пластинки в следующем виде:

$$D(1-R^*)\Delta^2 w - D_1\Delta w(1-R^*)J_1(t) + \rho\, h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + B\frac{\partial w}{\partial t} + BV(\vec{n}_0 \cdot \mathrm{grad}\ w) = 0\,, \quad (1)$$

где $D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ – цилиндрическая жесткость; h – толщина пластинки; E – модуль упругости; μ – коэффициент Пуассона; w – прогиб пластинки; $D_1 = \dfrac{Eh}{2ab(1-\mu^2)}$; ρ – плотность материала; $B = \dfrac{\aleph p_\infty}{V_\infty}$; $\aleph$ – показатель политропы газа; p_∞, V_∞ – соответственно давление и скорость звука в невозмущенном потоке газа; $J_1(t) = \int_0^a\int_0^b \left[\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]dxdy$ **;**

$\vec{n}_0$ **=** **(**cosθ, sinθ); θ – угол обтекания; $R^*\varphi(t) = \int\limits_0^t R(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau$ **;**

$R(t-\tau) = A\cdot\exp(-\beta\,(t-\tau))\cdot(t-\tau)^{\alpha-1}$**,** $A > 0$, $\beta > 0$, $0 < \alpha < 1$; t – время наблюдения; τ – предшествующее моменту наблюдения время.

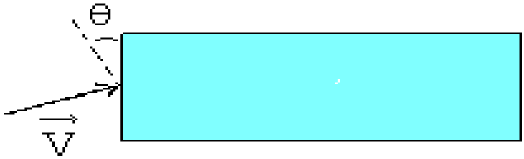

Рис. 1. Обтекание пластинки под произвольным углом

В уравнение (1) введем безразмерные координаты $x = a\bar{x}$, $y = b\bar{y}$, $t = t_1\bar{t}$, $(t_1^2 = \rho h a^4 / D)$ и $w = h\bar{w}$, сохранив за координатами прежние обозначения. В безразмерных координатах уравнение (1) примет вид

$$(1-R^*)\Delta^2 w - \Delta w(1-R^*)\,\overline{J(t)} + a_2 M^*(\vec{n}_0\cdot \mathrm{grad}w) + a_1\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (2)$$

где $\Delta^2 = w_{xxxx} + 2\lambda^2 w_{xxyy} + \lambda^4 w_{yyyy}$; $\lambda = a/b$; $\Delta w = w_{xx} + \lambda^2 w_{yy}$; $a_1 = p_0\aleph a^4/(V_\infty D_0 t_1)$; $a_2 = p_0\aleph a^3/D_0$; $\mathrm{grad}w = (w_x, \lambda w_y)$; $\overline{J}(t) = \int\limits_0^1\int\limits_0^1 [(w_x)^2 + \lambda^2(w_y)^2]\,dxdy$.

Решение уравнения (2) будем искать с помощью метода Бубнова-Галеркина. Пусть $\{\varphi_{nm}(x, y)\}$ – полная последовательность координатных функций, удовлетворяющих краевым условиям. Подставляя в (2) ряд

$$w(x,y,t) = \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} w_{nm}(t)\varphi_{nm}(x,y) \quad (3)$$

и выполняя известную процедуру метода Бубнова-Галеркина, получим:

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\Bigg\{N_{klnm}\left(\ddot{w}_{nm} + a_1\dot{w}_{nm}\right) + A_{klnm}(1-R^*)w_{nm} +$$

$$+\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} G_{klnm}w_{nm} + \sum_{n,i,j=1}^{N}\sum_{m,r,s=1}^{M} D_{klnmirjs}w_{nm}(1-R^*)w_{ir}w_{js} = 0, \quad (4)$$

$$k=\overline{1,N}\,;\;\; l=\overline{1,M}\,,$$

где $N_{klnm}, A_{klnm}, G_{klnm}, D_{klnmirjs}, \bar{J}_{irjs}$ – безразмерные параметры.

Начальные условия для системы уравнений (4) принимают вид

$$w_{nm}(0)=\alpha_{nm},\;\; \dot{w}_{nm}(0)=\beta_{nm}, \tag{5}$$

где α_{nm}, β_{nm} – известные константы.

Системы нелинейных ИДУ (4) решаются численно с помощью метода, предложенного в [5]. Для этого запишем эту систему в интегральной форме и с помощью рационального преобразования исключим слабо-сингулярные особенности интегрального оператора R^*. Полагая затем $t=t_i$, $t_i=i\Delta t$, $i=1, 2, \ldots$ ($\Delta t=const$) и заменяя интегралы некоторыми квадратурными формулами для вычисления $w_{nm}=w_{nm}(t)$, получим следующее рекуррентное соотношение:

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}N_{klnm}w_{pnm}=\frac{1}{1+A_p a_1}\left\{\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}N_{klnm}\left\langle w_{0nm}+\left(\dot{w}_{0nm}+a_1 w_{0nm}\right)t_p\right\rangle-\right.$$

$$-\sum_{j=0}^{p-1}A_j\left(a_1\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}N_{klnm}w_{jnm}-(t_p-t_j)\left[\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}G_{klnm}w_{jnm}+\right.\right. \tag{6}$$

$$+\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}A_{klnm}\left(w_{jnm}-\frac{A}{\alpha}\sum_{s=0}^{j}B_s\exp(-\beta t_s)w_{j-s,nm}\right)+$$

$$\left.\left.\left.+\sum_{n,i,j_1=1}^{N}\sum_{m,r,s_1=1}^{M}D_{klnm}w_{jnm}\left(w_{jir}w_{jj_1s_1}-\frac{A}{\alpha}\sum_{s=0}^{j}B_s\exp(-\beta t_s)w_{j-s,ir}w_{j-s,j_1s_1}\right)\right]\right)\right\},$$

$$p=1,2,\ldots;\;\; n=\overline{1,N};\quad m=\overline{1,M}\,,$$

где A_j, B_s – числовые коэффициенты применительно к квадратурным формулам трапеции:

$$A_0=\frac{\Delta t}{2};\quad A_j=\Delta t;\quad j=\overline{1,i-1};\quad A_i=\frac{\Delta t}{2};\quad B_s=\frac{\Delta t^{\alpha}((s+1)^{\alpha}-(s-1)^{\alpha})}{2};$$

$$B_0=\frac{\Delta t^{\alpha}}{2};\quad s=j;\quad B_j=\frac{\Delta t^{\alpha}(j^{\alpha}-(j-1)^{\alpha})}{2}.$$

Алгоритм (6) достаточно общий и он пригоден к задачам флаттера как для идеально упругих, так и для наследственно–деформируемых гибких пластин, в принципе при различных граничных условиях.

В качестве примера рассмотрим задачу о флаттере шарнирно опертых прямоугольных пластин в сверхзвуковым потоке газа с учетом геометрической нелинейности.

Решение упрощенного уравнения, описывающего данный процесс в безразмерном виде (2) при начальных условиях:

$$w(x, y, 0) = a_o \sin(nx)\sin(my); \quad \dot{w}(x, y, 0) = 0 \tag{7}$$

и граничных условиях

$$\begin{aligned} w = w_{xx} = 0 \quad &\text{при } x = 0 \text{ и } x = 1; \\ w = w_{yy} = 0 \quad &\text{при } y = 0 \text{ и } y = 1; \end{aligned} \tag{8}$$

ищем в виде

$$w(x, y, t) = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{M} w_{nm}(t) \sin(n\pi x) \sin(m\pi y). \tag{9}$$

Система нелинейных ИДУ (4) в данном случае упрощается и принимает вид

$$\begin{gathered} \ddot{w}_{kl} + a_1 \dot{w}_{kl} + \omega_{kl}^2 (1 - R^*) w_{kl} + 4 \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{M} G_{k\text{l}n m} w_{nm} + \\ + \frac{3}{2} \omega_{kl} w_{kl} \left(1 - R^*\right) \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{M} \omega_{nm} w_{nm}^2 = 0, \end{gathered} \tag{10}$$

где $\omega_{kl} = \pi^2(k^2 + \lambda^2 l^2)$;

$$\delta_n = \begin{cases} 1, & \text{при } n = 0, \\ 0, & \text{при } n \neq 0, \end{cases} \qquad \gamma_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & n - \text{нечетный}, \\ 0, & n = 0 \quad \text{или} \quad n - \text{четный}. \end{cases}$$

Результаты вычислений представлены в таблицах 1 и 2.

В качестве критерия, определяющего критическую скорость $V_{\text{кр}}$, принимаем условие, предложенное в работах [6 – 8].

Продольное обтекание. Исследовалось влияние вязкоупругих свойств материала пластинки на критические значения времени и скорости флаттера. Результаты вычислений, представленные в табл. 1, показывают, что если использовать экспоненциальное ядро ($\alpha = 1$)

$$R(t) = A \cdot \exp(-\beta\, t), \tag{11}$$

скорость флаттера уменьшается приблизительно на 1%, а при использовании ядра Колтунова-Ржаницына

$$R(t) = A \cdot \exp(-\beta\, t) \cdot t^{\alpha - 1} \tag{12}$$

эта скорость уменьшается на 46.4%, относительно критической скорости флаттера идеально-упругих пластин. Поэтому при использовании экспоненциальных ядер скорость флаттера вязкоупругой пластинки практически совпадает с критической скоростью флаттера для идеально-упругих пластин. Эти выводы и результаты полностью соответствуют выводам и результатам работы [9], где критические скорости флаттера определены численно-аналитическим методом.

Таблица 1

Зависимости скорости флаттера от параметров A и α

A	α	β	λ	λ_1	θ	$V_{кр}$
0,0 0,01 0,1	0,25	0,05	1	220	0	1003 853,4 537,2
0,1	1 0,5 0,15	0,05	1	220	0	993,14 697,34 412,42

Обтекание под произвольным углом. Рассмотрим вязкоупругую пластинку со сторонами *a, b* и толщиной *h*, обтекаемую сверхзвуковым потоком газа под произвольным углом. Несмотря на очевидную важность обсуждаемой задачи, имеются лишь две работы, посвященные исследованию поведения пластинки, обтекаемой под произвольным углом [2, 9].

В табл. 2 приведены критические значения скорости флаттера в зависимости от физико-механического и геометрического характера пластины с учетом угла θ.

Из табл. 2 видно, что величина критического числа $V_{кр}$ для пластинки при $\theta > 0$, больше, чем для пластинки при $\theta = 0$. Например, при $\theta = 20^0$ критическое число $V_{кр}$ пластинки возрастает на 11,14% по сравнению с соответствующим значением $V_{кр}$ при $\theta = 0$, при $\theta = 36^0$ на 27,66%, а при $\theta = 45^0$ – на 46,9%. Заметим, что влияние параметра угла обтекания θ, прекрасно согласуется с результатом работы [9].

В табл. 2 также дается влияние вязкоупругих свойств материала пластинки на скорость флаттера при $\theta \neq 0$. Для упругой пластинки ($A = 0$) при $\theta = \pi/6$ критическая скорость $V_{кр}$ составляет 1211,76, а для вязкоупругой пластинки ($A = 0,1$) с таким же $\theta = \pi/6$ критическая скорость $V_{кр}$ равна 646,34. Разница между ними составляет 46,4%.

Вычислительные эксперименты показали, что незначительное увеличение параметра сингулярности α приводит к существенному увеличению критической скорости флаттера.

Таблица 2

Зависимость скорости флаттера от физико-механических и геометрических параметров пластинки

A	α	β	λ	λ_1	θ	$V_{кр}$
0,0 0,01 0,05 0,1	0,25	0,05	1	220	$\pi/6$	1211,76 965,6 721,48 646,34
0,1	0,15 0,5	0,05	1	220	$\pi/6$	483,14 830,98
0,1	0,25	0,1 0,01	1	220	$\pi/6$	649,4 645,66
0,1	0,25	0,05	1,2 1,4 1,5	220	$\pi/6$	805,8 1016,26 1135,6
0,1	0,25	0,05	1	180 200 250	$\pi/6$	1164,5 870,4 442,34
0,1	0,25	0,05	1	220	$\pi/9$ $\pi/5$ $\pi/4$	567,04 685,78 789,14

Из приведенной таблицы видно, что влияние параметра затухания β ядра наследственности на скорость флаттера пластинки по сравнению с влиянием параметра вязкости A и сингулярности α незначительно, что еще раз подтверждает общеизвестные выводы о том, что экспоненциальное ядро релаксации неспособно полностью описать наследственные свойства материала конструкций.

Выводы. Таким образом, можно сделать вывод о том, что параметр сингулярности α влияет не только на колебания вязкоупругих систем, но и на критическую скорость флаттера. Следовательно, учет этого влияния при проектировании авиационных конструкций имеет важное значение, так как чем меньше параметр сингулярности материала конструкции, тем интенсивнее протекают диссипативные процессы в этих конструкциях.

На основании полученных результатов можно заключить, что учет вязкоупругих свойств материала пластинки приводит к уменьшению критической скорости флаттера $V_{кр}$, с которой начинается явление флаттера.

Отметим также, что при скорости потока меньшей, чем $V_{кр}$, влияние вязкоупругого свойства материала уменьшает амплитуду и частоту колебаний. Если же скорость потока превышает $V_{кр}$, то вязкоупругое свойство материала оказывает уже дестабилизирующее влияние.

Список литературы: **1**. *Fung Y.C.* A summary of the theories and experiments on panel flutter / *Y.C. Fung* // Air Force Office Sci. Research TN 60-224 (May 1960). – 27 p. **2.** *Eisley J.G.* Flutter of Thin Plates under Combined Shear and Normal Edge Forces / *J.G. Eisley, G. Luessen* // AIAA Journal. – 1963. – Vol. 1. – № 3. – P. 347-356. **3.** *Вентрес Дауэлл.* Сравнение теории и эксперимента в задаче о нелинейном флаттере нагруженных пластин / *Дауэлл Вентрес* // Ракетная техника и космонавтика. – 1970. – Т. 8. – № 11. – С. 126-136. **4.** *Ильюшин А.А.* Новая постановка задачи о флаттере пологой оболочки / *А.А. Ильюшин, И.А. Кийко* // Прикладная математика и механика. – 1994. – Т. 58. – Вып. 3. – С. 167-171. **5.** *Бадалов Ф.Б.* О некоторых методах решения систем интегродифференциальных уравнений, встречающихся в задачах вязкоупругости / *Ф.Б. Бадалов, Х. Эшматов, М. Юсупов* // Прикладная математика и механика. – 1987. – Т. 51. – №5. – С. 867-871. **6.** *Худаяров Б.А.* Numerical Analysis of the Nonlinear Flutter of Viscoelastic Plates / *Б.А. Худаяров* // International J. Applied Mechanics. – 2005. – Vol. 41. – № 5. – P. 538-542. **7.** *Худаяров Б.А.* Численное исследование нелинейного флаттера вязкоупругих трехслойных пластин / *Б.А. Худаяров* // Электронное моделирование. – 2006. – Том 28. – № 1. – С. 13-18. **8.** *Верлань А.Ф.* Численное решение нелинейных задач динамики вязкоупругих систем / *А.Ф. Верлань, Х. Эшматов, Б. Худаяров, Ш.П. Бобоназаров* // Электронное моделирование. – 2004. – Том 26. – № 3. – С. 3–14. **9.** *Кийко И.А.* Колебания и устойчивость вязкоупругой полосы в потоке газа / *И.А. Кийко, В.В. Показеев* // Доклады РАН. – 2005. – Т. 401. – № 3. – С. 342-344.

УДК 539.3

Обчислювальний експеримент в завданні про флаттер в'язкопружної пластини, обтічної під довільному кутом в потоці газу / Верлань А.Ф., Худаяров Б.А., Файзібоєв Е.Ф., Юлдашев З.У. // Вісник НТУ "ХПІ". Тематичний випуск: Інформатика і моделювання. – Харків: НТУ "ХПІ". – 2011. – № 36. – С. 4 – 11.

Розглянуті нелінійні коливання в'язкопружних елементів тонкостінних конструкцій в потоці газу. Розроблені методика і алгоритм чисельного рішення інтегро-дифференційних рівнянь. Визначені критичні швидкості флаттеру пластин в потоці газу. Іл.: 1. Табл.: 2. Бібліогр.: 9 назв.

Ключові слова: в'язкопружна пластина, алгоритм, інтегро-дифференційне рівняння, флаттер.

UDC 539.3

Computational experiment in task about flutter of viscoelastic plate, streamlined under arbitrary corner in stream of gas / Verlan A.F., Khudayarov B.A., Fayziboyev E.F., Yuldashev Z.U. // Herald of the National Technical University "KhPI". Subject issue: Information Science and Modelling. – Kharkov: NTU "KhPI". – 2011. – № 36. – P. 4 – 11.

Nonlinear vibrations of viscoelastic thin-walled elements of structures in the gas stream.The method and algorithm for the numerical solution of integro-differential equations. The critical velocity of flutter of plates in the gas stream. Figs.: 1. Tabl.: 2. Refs.: 9 titles.

Keyworts: viscoelastic plate, algorithm, integro-differential equations, flutter.

Поступила в редакцию 15.07.2011