УДК 539.3

Б.А. ХУДАЯРОВ, д.т.н., Ташкентский институт ирригации и мелиорации, г. Ташкент, Республика Узбекистан,
З.У. ЮЛДАШЕВ, ст. преп. Ташкентский институт ирригации и мелиорации, г. Ташкент, Республика Узбекистан

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЗАДАЧИ О КОЛЕБАНИЯХ ВЯЗКОУПРУГИХ ЭЛЕМЕНТОВ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Исследуется задача о флаттере вязкоупругих пластин типа параллелограмма, обтекаемых потоком газа. Разработаны методика и алгоритм численного решения интегро-дифференциальных уравнений. Приведены результаты расчетов критичской скорости флаттера. Ил.: 4. Библиогр.: 9 назв.

Ключевые слова: флаттер, вязкоупругий элемент, алгоритм, интегро-дифференциальное уравнение.

Постановка проблемы и анализ литературы. В последние годы большое внимание уделяется задаче о колебаниях пластин и оболочек, обтекаемых в сверхзвуковом потоке газа. Эти задачи представляют интерес в связи с вибрацией обшивки современных летательных аппаратов. Большинство работ было посвящено исследованию флаттера канонических элементов (прямоугольных пластин и панелей) летательного аппарата, обтекаемых в потоке газа. Однако, некоторые элементы обшивки летательных аппаратов имеют форму параллелограмма или трапеции. Теоретических исследований задачи о колебаниях пластин в форме параллелограмма или трапеции в потоке газа очень мало.

Проблемы алгоритмизации задачи механики сплошных сред изучены в работах А.Ф. Верланя [1, 2], Г.Е. Пухова [3], В.К. Кабулова [4], Ф. Бадалова и Х. Эшматова [5] и других. Вопросы разработки и реализации на ЭВМ алгоритмов решения нестационарных задач аэроупругости при дозвуковых скоростях полета рассмотрены в работе [6]. Разработаны экономичные алгоритмы приведения к нормальному виду и решения уравнений аэроупругости при учете большого количества форм собственных колебаний, полученных из уравнений динамики полета и колебаний упругой конструкции летательного аппарата в линейной постановке методом разложения по формам колебаний.

Однако, несмотря на имеющиеся в этой области исследования ряда авторов, до настоящего времени не было научных работ, где были бы разработаны методы и эффективные численные алгоритмы для решения нелинейных интегро-дифференциальных уравнений (ИДУ) динамических задач вязкоупругих элементов тонкостенных конструкций с сингулярными ядрами, а также не разработан комплекс прикладных программ.

Цель данной работы – разработать методы и численные алгоритмы для решения нелинейных задач о флаттере вязкоупругих элементов летательного аппарата. Для вычисления критической скорости флаттера предлагается численный метод и алгоритм решение нелинейных ИДУ с сингулярными ядрами. На основе разработанного вычислительного алгоритма создан комплекс прикладных программ.

Рассмотрим вязкоупругую пластину типа параллелограмма, обтекаемую в потоке газа со скоростью *V*. Аэродинамическое давление учитываем по поршневой теории А.А. Ильюшина [1]. Форма и размеры пластины показаны на рис. 1 *а*. Степень ее отклонения от прямоугольной пластины характеризуется углом γ [2]. С помощью следующего преобразования

$$\xi = x, \quad \eta = y - \theta x, \quad \theta = \mathrm{tg}\gamma$$

параллелограмм с областью G и границей Γ на плоскости $(x,\ y)$ отображается на прямоугольную область G_0 с границей Γ_0 на плоскости (ξ, η) (рис. 1 *б*). В дальнейшем параметр θ примем в качестве параметра, характеризующего отклонение параллелограммной пластины от канонической прямоугольной.

Уравнения движения вязкоупругих пластин типа параллелограмма в потоке газа имеют вид

$$\begin{gathered} D(1-R^*)\left\{\frac{\partial^4 w}{\partial\xi^4} - 4\theta\frac{\partial^4 w}{\partial\xi^3\partial\eta} + 2(1+3\theta^2)\frac{\partial^4 w}{\partial\xi^2\partial\eta^2} - \right. \\ \left. - 4\theta(1+\theta^2)\frac{\partial^4 w}{\partial\xi\partial\eta^3} + (1+\theta^2)^2\frac{\partial^4 w}{\partial\eta^4}\right\} + \rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + B\frac{\partial w}{\partial t} + \\ + BV\left(\frac{\partial w}{\partial\xi} - \theta\frac{\partial w}{\partial\eta}\right) + B_1V^2\left[\left(\frac{\partial w}{\partial\xi}\right)^2 - 2\theta\frac{\partial w\partial w}{\partial\eta\partial\xi} + \theta^2\left(\frac{\partial w}{\partial\eta}\right)^2\right] = 0. \end{gathered} \tag{1}$$

Здесь $D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ – жесткость при изгибе; h – толщина пластинки; E – модуль упругости; μ – коэффициент Пуассона; ρ – плотность материала; $B = \dfrac{\aleph p_\infty}{V_\infty}$, $B_1 = \dfrac{\aleph(\aleph+1)p_\infty}{4V_\infty^2}$, $\aleph$ – показатель политропы газа; p_∞, V_∞ – соответственно давление и скорость звука в невозмущенном потоке газа.

Представим перемещение $w(\xi,\eta,t)$ в виде разложения по функциям $\varphi_{nm}(\xi,\eta)$, удовлетворяющим соответствующим граничным условиям

$$w(\xi,\eta,t)=\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{L} w_{nm}(t)\varphi_{nm}(\xi,\eta)\,, \tag{2}$$

где $w_{nm}=w_{nm}(t)$ – искомые функции времени.

Поставляя (2) в (1) и выполняя процедуру Бубнова-Галеркина для определения $w_{nm}(t)$ получим систему нелинейных интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра в виде

$$\begin{gathered}\ddot w_{kl}+M_{\lambda_1}\dot w_{kl}+\Omega^2\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{L}\Bigg\{\left[n^4+2(1+3\theta^2)\lambda^2n^2m^2+(1+\theta^2)^2\lambda^4m^4\right]\delta_{nkml}+\\ +\frac{64\theta\lambda nm}{\pi^2}\left[n^2+(1+\theta^2)\lambda^2m^2\right]\gamma_{nkml}\Bigg\}(1-R^*)w_{nm}+\\ +4M^*M_{\lambda_1}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{L}\left(n\,\gamma_{nk}\delta_{ml}-m\theta\delta_{nk}\gamma_{ml}\right)w_{nm}+\\ +M_1M^{*2}\sum_{n,i}^{N}\sum_{m,j=1}^{L}\Gamma_{klnmij}w_{nm}w_{ij}=0,\end{gathered} \tag{3}$$

$$w_{nm}(0)=w_{onm},\quad \dot w_{nm}(0)=\dot w_{onm},\quad k=\overline{1,N};\quad l=\overline{1,L}\,.$$

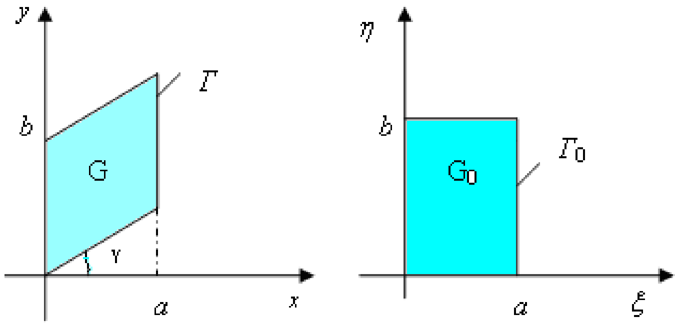

Рис 1. Геометрия пластинки.

Здесь

$$M_{\lambda_1} = \aleph\lambda_1 M_p^2\,; \;\; \lambda_1 = \frac{a}{h}; \quad M_p^2 = \frac{p_\infty}{\rho V_\infty^2}\,; \;\; \Omega^2 = \frac{\pi^4}{12(1-\mu^2)} M_E^2 \left(\frac{h}{a}\right)^2;$$

$$M_E^2 = \frac{E}{\rho V_\infty^2}\,; \quad \lambda = \frac{a}{b}; \quad \delta_{nkml} = \delta_{nk}\delta_{ml}\,; \qquad \gamma_{nkml} = \gamma_{nk}\gamma_{ml}\,;$$

$$\delta_{nk} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad n = k, \\ 0, & \text{если} \quad n \neq k. \end{cases} \qquad \gamma_{nk} = \begin{cases} \dfrac{k}{k^2 - n^2}, & \text{если} \;\; (k+n) \text{ нечетно}, \\ 0\,, & \text{если } (k+n) \text{ четно}. \end{cases}$$

$$\delta_{ml} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad m = l, \\ 0, & \text{если} \quad m \neq l. \end{cases} \qquad \gamma_{ml} = \begin{cases} \dfrac{l}{l^2 - m^2}, & \text{если} \;\; (m+l) \text{ нечетно}, \\ 0\,, & \text{если } (m+l) \text{ четно}. \end{cases}$$

$$M_1 = \frac{\aleph(\aleph+1)}{4} M_p^2; \;\; M^* = \frac{V}{V_\infty};$$

$$\Gamma_{k\ln mij} = 16ni\gamma_{1kni}\gamma_{2lmj} - \frac{\theta}{2} nm\pi\lambda\delta_{1nik}\delta_{2mjl} + 16\theta^2 ml\lambda^2\gamma_{2kni}\gamma_{1lmj}\,;$$

$$\gamma_{1kni} = \gamma_{k-n+i} + \gamma_{k+n-i} + \gamma_{k-n-i} + \gamma_{k+n+i}\,;$$

$$\gamma_{2lmj} = \gamma_{l-m+j} + \gamma_{l+m-j} - \gamma_{l-m-j} - \gamma_{l+m+j}\,;$$

$$\delta_{1nik} = \delta_{n-i-k} - \delta_{n-i+k} + \delta_{n+i-k} - \delta_{n+i+k}\,;$$

$$\delta_{2mjl} = \delta_{m-j+l} + \delta_{m+j-l} - \delta_{m-j-l} - \delta_{m+j+l}\,;$$

$$\gamma_{2kni} = \gamma_{k-n+i} + \gamma_{k+n-i} - \gamma_{k-n-i} - \gamma_{k+n+i}\,;$$

$$\gamma_{1lmj} = \gamma_{l-m+j} + \gamma_{l+m-j} + \gamma_{l-m-j} + \gamma_{l+m+j}\,;$$

$$\delta_i = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad i = 0, \\ 0, & \text{при} \quad i \neq 0. \end{cases} \qquad \gamma_k = \begin{cases} \dfrac{1}{k}, & \text{если} \quad k - \text{нечетное}, \\ 0, & \text{если} \quad k = 0 \text{ или четное}. \end{cases}$$

Интегрируя систему (3) два раза по t, запишем ее в интегральной форме. Полагая затем $t = t_p,\, t_p = p\Delta t,\; p = 1, 2, \ldots$ ($\Delta t = const$ – шаг интерполяции) и заменяя интегралы некоторыми квадратурными формулами, для вычисления $w_{pnm} = w_{nm}(t_p)$, получим рекуррентную формулу

$$w_{pkl}=\frac{1}{1+A_pM_{\lambda_1}}\left\langle\ w_{okl}+(\dot{w}_{okl}+M_{\lambda_1}w_{okl})t_p-\sum_{r=0}^{p-1}A_r\left\{\ M_{\lambda_1}w_{rkl}+(t_p-t_r)\right[\ \Omega^2\times\right.$$

$$\times\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{L}\left\{\ \left[n^4+2(1+3\theta^2)\lambda^2m^2n^2+(1+\theta^2)^2\lambda^4m^4\right]\delta_{nkml}+\frac{64\,\theta\,\lambda\,n\,m}{\pi^2}\left[n^2+(1+\theta^2)\lambda^2m^2\right]\times\right.$$

$$\times\gamma_{nkml}\ \left.\right\}\left(w_{rnm}-\frac{A}{\alpha}\sum_{s=0}^{r}B_s\ell^{-\beta t_s}w_{r-s,nm}\right)+4M^*M_{\lambda_1}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{L}\left(\gamma_{nk}\delta_{ml}n-\theta\,m\,\delta_{nk}\gamma_{ml}\right)w_{rnm}+ \tag{4}$$

$$\left.\left.\left.+M_1M^{*2}\sum_{n,i=1}^{N}\sum_{m,j=1}^{L}\Gamma_{klnmij}w_{rnm}w_{rij}\right]\right\}\right\rangle,\quad p=1,2,\ldots,\quad k=\overline{1,N};\quad l=\overline{1,L},$$

где A_p, B_s – коэффициенты квадратурной формулы трапеции; A – параметр вязкости; α – параметр сингулярности, определяемый экспериментом; β – параметр затухания.

Благодаря предложенному подходу в алгоритме для численного решения задачи в формуле (4) множитель t_p-t_j при $j=p$ принимает нулевое значение, т.е. последнее слагаемое суммы равно нулю. Поэтому суммирование осуществляется от нуля до $p-1$ ($j=\overline{0,\ p-1}$).

Таким образом, согласно численного метода [3] относительно неизвестных получим систему линейных алгебраических уравнений. Для решения системы используется метод Гаусса.

В качестве критерия, определяющего критическую скорость флаттера, принимаем условие, что при этой скорости амплитуда колебаний изменяется по гармоническому закону (рис. 2).

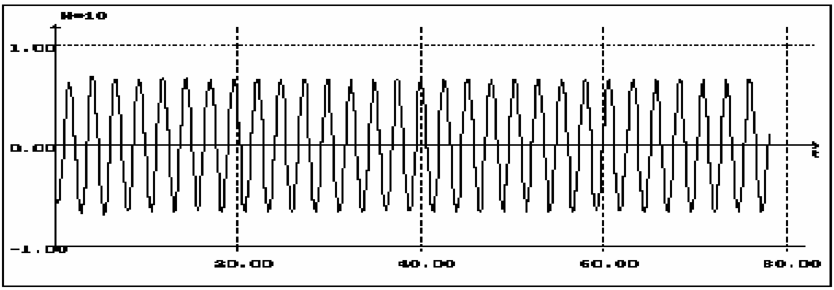

Рис. 2. Зависимость прогиба пластины от времени t при $V=V_{кр}$

При скорости $V > V_{кр}$ происходит колебательное движение с интенсивно нарастающими амплитудами, которое может привести к разрушению конструкции (рис. 3). В случае, когда скорость потока меньше критической $V < V_{кр}$, амплитуда колебаний пластинки затухает (рис. 4) [4].

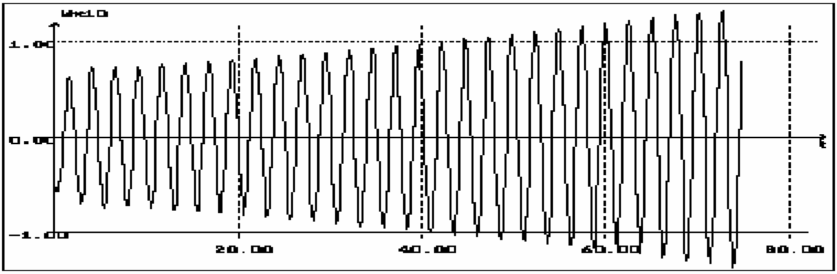

Рис. 3. Зависимость прогиба пластины от времени t при $V>V_{кр}$

Исследовалось влияние вязкоупругих свойств материала пластинки на критические значения скорости флаттера. Результаты вычислений, показывают, что решения упругих ($A = 0$) и вязкоупругих ($A > 0$) задач существенно различаются между собой. Например, при увеличении параметра A от нуля до значения 0,1 критическая скорость флаттера уменьшается на 45%.

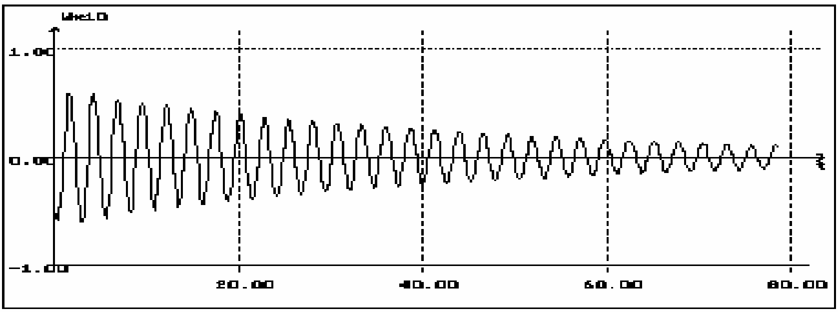

Рис. 4. Зависимость прогиба пластины от времени t при $V<V_{кр}$

Далее исследовано влияние параметра сингулярности α на критическую скорость флаттера. С увеличением параметра α эта скорость возрастает. Далее изучено влияние параметра затухания β на критические скорости флаттера пластинки. Влияние параметра β ядра наследственности на скорость флаттера пластинки по сравнению с влиянием параметра вязкости A и сингулярности α незначительно.

Выводы. На основании полученных результатов можно заключить, что учет вязкоупругих свойств материала пластинки приводит к уменьшению критической скорости флаттера V_{kp}, с которой начинается явление флаттера.

Отметим также, что при скорости потока меньшей, чем V_{kp}, влияние вязкоупругого свойства материала уменьшает амплитуду и частоту колебаний. Если же скорость потока превышает V_{kp}, то вязкоупругое свойство материала оказывает уже дестабилизирующее влияние.

Список литературы: **1.** *Верлань А.Ф.* Интегральные уравнения: Методы, алгоритмы, программы / *А.Ф. Верлань, В.С. Сизиков.* – К.: Наукова думка, 1986. – 543 с. **2.** *Верлань А.Ф.* Численное решение нелинейных задач динамики вязкоупругих систем / *А.Ф. Верлань, Х. Эшматов, Б. Худаяров, Ш.П. Бобоназаров* // Электронное моделирование. – 2004. – Т. 26. – № 3. – С. 3–14. **3.** *Пухов Г.Е.* Приближенные методы математического моделирования, основанные на применение дифференциальных Т-преобразований / *Г.Е. Пухов.* – К.: Наукова думка, 1988. – 216 с. **4.** *Кабулов В.К.* Проблемы алгоритмизации в теории вязкоупругости / *В.К. Кабулов* // Вопр. вычисл. и прикл. математики. – Ташкент. – 1996. – Вып. 102. – С. 4 – 18. **5.** *Бадалов Ф.Б.* О некоторых методах решения систем интегродифференциальных уравнений, встречающихся в задачах вязкоупругости / *Ф.Б. Бадалов, Х. Эшматов, М. Юсупов* // Прикладная математика и механика. – 1987. – Т. 51. – № 5. – С. 867 – 871. **6.** *Буриев Т.* О некоторых экономичных алгоритмах решения задач нестационарной аэроупругости / *Т. Буриев* // Вопр. вычисл. и прикл. математики. – 1990. – № 88. – С. 32–48. **7.** *Ильюшин А.А.* Закон плоских сечений в аэродинамике больших сверхзвуковых скоростей / *А.А. Ильюшин* // Прикладная математика и механика. – 1956. – Т. 20. – Вып. 6. – С. 733 – 753. **8.** *Григолюк Э.И.* Проблемы нелинейного деформирования: Метод продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики твердого тела / *Э.И. Григолюк, В.И. Шалашилин.* – М.: Наука, 1988. – 232 с. **9.** *Худаяров Б.А.* Математичне моделювання нелінійного флатера в'язкопружних елементів літального апарату в надзвуковому потоці газу: автореф. дис. на здобуття наук. степеня д-ра техн.наук: 01.05.02 "Математичне моделювання та обчислювальні методи" / *Б.А. Худаяров.* – Київ, 2008. – 36 с.

УДК 539.3

Про один алгоритм рішення інтегро-дифференційних рівнянь завдання про коливання в'язкопружних елементів тонкостінних конструкцій // Б.А. Худаяров, З.У. Юлдашев // Вісник НТУ "ХПІ". Тематичний випуск: Інформатика і моделювання. – Харків: НТУ "ХПІ". – 2011. – № 36. – С. 189 – 196.

Досліджується завдання про флаттер в'язкопружних пластин типа паралелограма, обтічних потоком газу. Розроблені методика і алгоритм чисельного рішення інтегро-дифференційних рівнянь. Приведені результати розрахунків критичної швидкості флаттеру. Іл.: 4. Бібліогр. 9 назв.

Ключові слова: флаттер, в'язкопружний елемент, алгоритм, інтегро-дифференційне рівняння.

UDC 539.3

About one algorithm of solution integro-differential equations tasks about vibrations of viscoelastic elements thin-walled constructions / B.A. Khudayarov, Z.U. Yuldashev

// Herald of the National Technical University "KhPI". Subject issue: Information Science and Modelling. – Kharkov: NTU "KhPI". – 2011. – №. 36. – P. 189 – 196.

The flutter of viscoelastic plates streamlined by a gas current are investigated. The method and algorithm for the numerical solution of integro-differential equations. The results of the flutter critical speed calculation have been given. Figs: 4. Refs.: 9 titles.

Keyworts: flutter, visco-elastic elements, algorithm, integro-differential equations.

Поступила в редакцию 15.06.2011