**УДК 621.9.01**

***В.Д. ДМИТРИЕНКО***, д.т.н., проф. НТУ "ХПИ", г. Харьков,
***А.Ю. ЗАКОВОРОТНЫЙ***, к.т.н., доц. НТУ "ХПИ", г. Харьков,
***А.О. НЕСТЕРЕНКО***, магистр НТУ "ХПИ", г. Харьков

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ В ФОРМЕ БРУНОВСКОГО ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ И ОПТИМИЗАЦИИ ЭЛЕКТРОПРИВОДА С УЧЕТОМ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ДВИГАТЕЛЕЙ

Выполнен с помощью геометрической теории управления синтез линейной математической модели тягового асинхронного электропривода в пространстве “вход-состояние”. Полученная модель в канонической форме Бруновского позволяет исследовать и оптимизировать процессы не только разгона и движения состава с заданной скоростью, но и процессы буксования. Библиогр.: 10 назв.

**Ключевые слова:** геометрическая теория управления, модель тягового асинхронного электропривода, модель в канонической форме Бруновского.

**Постановка проблемы и анализ литературы**. Вопросы исследования и оптимизации функционирования тягового подвижного состава железных дорог в течении десятилетий привлекают внимание многих специалистов [1 – 8]. Большинство исследований выполняется с помощью математического моделирования на сложных моделях, описываемых системами обыкновенных дифференциальных нелинейных уравнений высокого порядка. Однако поиск оптимальных решений на таких моделях затруднен. Поэтому в большинстве случаев при решении задач оптимального управления используются математические модели 2 – 5 порядка. При оптимизации функционирования подвижного состава с тяговым асинхронным приводом использование моделей такого низкого порядка во многих случаях невозможно в силу того, что даже упрощенная модель тягового асинхронного привода с одним эквивалентным двигателем имеет пятый порядок системы обыкновенных дифференциальных нелинейных уравнений. В тоже время исследования параллельной работы двигателей, буксования, юза требует в математической модели не менее двух двигателей. Использование известных методов оптимального управления для решения задач оптимизации функционирования подобных объектов вызывает серьезные трудности [9, 10]. В связи с этим в работах [8, 11] была предпринята попытка привлечь для решения задач оптимального управления рассматриваемыми объектами методы геометрической теории управления [12], использующие динамическую линеаризацию исходной нелинейной модели. При этом удалось получить законы оптимального управления для объектов, которые описывались системами нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений 5 – 6 порядка. Для поиска оптимальных законов управления реальным приводом с учетом параллельной работы электродвигателей необходимо уточнение используемых моделей (получение систем обыкновенных дифференциальных уравнений десятого и более высоких порядков) и разработка метода динамической линеаризации уточненных моделей (получение линейных моделей объекта управления в форме Бруновского), и поиск оптимальных законов управления с помощью этих моделей.

**Целью статьи** является синтез с помощью средств геометрической теории управления математической модели тягового электропривода в форме Бруновского для последующего решения задач оптимального управления с учетом параллельной работы тяговых двигателей.

Движение дизель-поезда в режиме тяги и в режиме перехода от тяги к буксованию в первом приближении может быть описано следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$
\begin{gathered}
\frac{dS}{dt} = k_1 V; \\
\frac{dV}{dt} = k_2(\Psi_1^1\Psi_4^1 - \Psi_2^1\Psi_3^1 + \Psi_1^2\Psi_4^2 - \Psi_2^2\Psi_3^2 - a_{20} - a_{21}V - a_{22}V^2); \\
\frac{d\Psi_1^q}{dt} = a_{31}^q\Psi_1^q + a_{33}^q\Psi_3^q + U_1^q,\ q = 1, 2; \\
\frac{d\Psi_2^q}{dt} = a_{42}^q\Psi_2^q + a_{44}^q\Psi_4^q + U_2^q,\ q = 1, 2; \\
\frac{d\Psi_3^q}{dt} = a_{51}^q\Psi_1^q + a_{53}^q\Psi_3^q + a_{542}^q\Psi_4^q\Omega_q,\ q = 1, 2; \\
\frac{d\Psi_4^q}{dt} = a_{62}^q\Psi_2^q + a_{64}^q\Psi_4^q + a_{632}^q\Psi_3^q\Omega_q,\ q = 1, 2,
\end{gathered}
\tag{1}
$$

где $S$ – расстояние, отсчитываемое от начала перегона; $t$ – время; $k_1,\ k_2,\ a_{20},\ a_{21},\ a_{22},\ a_{31},\ a_{33},\ldots,a_{64},\ a_{632}$ – постоянные коэффициенты определяемые параметрами привода; $V$ – скорость движения состава; $\Psi_1^q, \Psi_3^q$ $(q = 1, 2)$ – потокосцепления по оси $u$ первого и второго двигателей; $\Psi_2^q, \Psi_4^q$ $(q = 1, 2)$ – потокосцепления по оси $v$ первого и второго двигателей; $\Omega_1$, $\Omega_2$ – угловые скорости вращения роторов соответственно первого и второго асинхронных двигателей; $\Omega_q = V/(\pi D_q)$; $D_q$ $(q=1,2)$ – диаметр $q$-й колесной пары; $U_1^q$, $U_2^q$ $(q=1,2)$ – питающие напряжения, при гармоническом напряжении имеем:

$$U_1^q = A_q \cos(\Omega_q t);\ U_2^q = A_q \sin(\Omega_q t),$$

где $A_q$, $\Omega_q$ $(q=1,2)$ – соответственно амплитуды и частоты питающих напряжений первого и второго тяговых двигателей.

Обозначив $x_1 = S$; $x_2 = V$; $x_3 = \Psi_1^1$; $x_4 = \Psi_3^1$; $x_5 = \Psi_4^1$; $x_6 = \Psi_2^1$; $x_7 = \Psi_3^2$; $x_8 = \Psi_1^2$; $x_9 = \Psi_4^2$; $x_{10} = \Psi_2^2$, из системы уравнений (1) получим следующую модель, описывающую движение дизель-поезда:

$$\begin{aligned}
&\frac{dx_1}{dt} = a_{12}x_2;\\
&\frac{dx_2}{dt} = a_{235}x_3x_5 - a_{246}x_4x_6 + a_{289}x_8x_9 - a_{2,7,10}x_7x_{10} - a_{200} - a_{220}x_2 - a_{222}x_2^2;\\
&\frac{dx_3}{dt} = a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + U_1^1;\\
&\frac{dx_4}{dt} = a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + a_{425}x_2x_5;\\
&\frac{dx_5}{dt} = a_{55}x_5 + a_{56}x_6 + a_{524}x_2x_4;\\
&\frac{dx_6}{dt} = a_{65}x_5 + a_{66}x_6 + U_2^1;\\
&\frac{dx_7}{dt} = a_{77}x_7 + a_{78}x_8 + a_{729}x_2x_9;\\
&\frac{dx_8}{dt} = a_{87}x_7 + a_{88}x_8 + U_1^2;\\
&\frac{dx_9}{dt} = a_{99}x_9 + a_{9,10}x_{10} + a_{927}x_2x_7;\\
&\frac{dx_{10}}{dt} = a_{10,9}x_9 + a_{10,10}x_{10} + U_2^2,
\end{aligned} \tag{2}$$

где $a_{12}=k_1$; $a_{235}=a_{246}=a_{289}=a_{2,7,10}=k_2$; $a_{200}=k_2 a_{20}$; $a_{220}=k_2 a_{21}$; $a_{222}=k_2 a_{22}$; $a_{33}=a_{31}^1$; $a_{34}=a_{33}^1$; $a_{43}=a_{51}^1$; $a_{44}=a_{53}^1$; $a_{425}=a_{541}^1$; $a_{55}=a_{64}^1$; $a_{56}=a_{62}^1$; $a_{524}=a_{631}^1\big/(\pi D_1)$; $a_{65}=a_{44}^1$; $a_{66}=a_{42}^1$; $a_{77}=a_{53}^2$; $a_{78}=a_{51}^2$; $a_{729}=a_{542}^2\big/(\pi D_2)$; $a_{87}=a_{33}^2$; $a_{88}=a_{31}^2$; $a_{99}=a_{6,4}^2$; $a_{9,10}=a_{6,2}^2$; $a_{927}=a_{632}^2\big/(\pi D_2)$; $a_{10,9}=a_{44}^2$; $a_{10,10}=a_{42}^2$.

С системой дифференциальных уравнений (2) связаны следующие векторные поля:

$$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})=\begin{vmatrix} f_1=a_{12}x_2 \\ f_2=a_{235}x_3x_5-a_{246}x_4x_6+a_{289}x_8x_9-a_{2,7,10}x_7x_{10}-a_{200}-a_{220}x_2-a_{222}x_2^2 \\ f_3=a_{33}x_3+a_{34}x_4 \\ f_4=a_{43}x_3+a_{44}x_4+a_{425}x_2x_5 \\ f_5=a_{55}x_5+a_{56}x_6+a_{524}x_2x_4 \\ f_6=a_{65}x_5+a_{66}x_6 \\ f_7=a_{77}x_7+a_{78}x_8+a_{729}x_2x_9 \\ f_8=a_{87}x_7+a_{88}x_8 \\ f_9=a_{99}x_9+a_{9,10}x_{10}+a_{927}x_2x_7 \\ f_{10}=a_{10,9}x_9+a_{10,10}x_{10} \end{vmatrix};$$

$$\boldsymbol{Y}_1=\left|0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\right|^{\mathrm{T}};\ \boldsymbol{Y}_2=\left|0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\right|^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{Y}_3=\left|0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0\right|^{\mathrm{T}};\ \boldsymbol{Y}_4=\left|0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1\right|^{\mathrm{T}}.$$

Система уравнений (2) может быть преобразована к форме Бруновского только в случае, если инволютивны распределения $\boldsymbol{M}^0$, $\boldsymbol{M}^1$, $\boldsymbol{M}^2$ для этой системы [12]. Поскольку векторные поля $\boldsymbol{Y}_i$ $(i=\overline{1,4})$ постоянны, то распределение $\boldsymbol{M}^0=\operatorname{span}\{\boldsymbol{Y}_1,\boldsymbol{Y}_2,\boldsymbol{Y}_3,\boldsymbol{Y}_4\}$ – инволютивно и размерность распределения $\dim\boldsymbol{M}^0=4$ (Здесь $\operatorname{span}\{\boldsymbol{Y}_1,\boldsymbol{Y}_2,\boldsymbol{Y}_3,\boldsymbol{Y}_4\}$ – линейная оболочка векторов $\boldsymbol{Y}_1,\boldsymbol{Y}_2,\boldsymbol{Y}_3,\boldsymbol{Y}_4$).

Проанализируем распределение $\boldsymbol{M}^1=\operatorname{span}\{\boldsymbol{Y}_1,\boldsymbol{Y}_2,\boldsymbol{Y}_3,\boldsymbol{Y}_4,\boldsymbol{L_X Y}_1,\boldsymbol{L_X Y}_2,\boldsymbol{L_X Y}_3,\boldsymbol{L_X Y}_4\}$, где $\boldsymbol{L_X Y}_k$ $(k=\overline{1,4})$ – производные Ли вдоль векторного поля $\boldsymbol{X}$ векторных полей $\boldsymbol{Y}_k$ $(k=\overline{1,4})$. Производные Ли вычисляются следующим образом:

$$\boldsymbol{L_X Y_k} = [\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}_k] = \frac{\partial \boldsymbol{Y}_k}{\partial \boldsymbol{x}} \boldsymbol{X} - \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \boldsymbol{x}} \boldsymbol{Y}_k = -\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \boldsymbol{x}} \boldsymbol{Y}_k =$$

$$= -\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{10}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_{10}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_{10}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{10}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_{10}}{\partial x_{10}} \end{vmatrix} \cdot \boldsymbol{Y}_k, \ k = \overline{1,4}.$$

Непосредственная проверка скобок Ли $[\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{X}_j]$, где $\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{X}_j$ – векторные поля из множества $\{\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{Y}_3, \boldsymbol{Y}_4, \boldsymbol{L_X Y}_1, \boldsymbol{L_X Y}_2, \boldsymbol{L_X Y}_3, \boldsymbol{L_X Y}_4\}$, и ранга матриц $\boldsymbol{B}_l = \left\| \boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{Y}_3, \boldsymbol{Y}_4, \boldsymbol{L_X Y}_1, \boldsymbol{L_X Y}_2, \boldsymbol{L_X Y}_3, \boldsymbol{L_X Y}_4, [\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{X}_j] \right\|$ показывает, что распределение $\boldsymbol{M}^1$ не является инволютивным, однако все его подраспределения $\boldsymbol{M}_k^1 = \mathrm{span}\{\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{Y}_3, \boldsymbol{Y}_4, \boldsymbol{L_X Y}_k\}$, $k = \overline{1,4}$, являются инволютивными. Поэтому дополнительные переменные или интеграторы можно вводить в любой канал управления. Однако введение одного, двух или трех интеграторов в любые каналы не позволяет решить проблему получения инволютивного распределения $\boldsymbol{M}^1$ для расширенной системы. Распределение $\boldsymbol{M}^1$ становится инволютивным только при введении одного интегратора в каждый канал объекта управления.

Для расширенной модели объекта управления введем следующие обозначения:

$$y_i = x_i, \ i = \overline{1,3}; \ y_4 = U_1^1; \ U_1 = \frac{dy_4}{dt}; \ y_5 = x_4; \ y_6 = x_5;$$

$$y_7 = x_6; \ y_8 = U_2^1; \ U_2 = \frac{dy_8}{dt}; \ y_9 = x_7; \ y_{10} = x_8;$$

$$y_{11} = U_1^2; \ U_3 = \frac{dy_{11}}{dt}; \ y_{12} = x_9; \ y_{13} = x_{10}; \ y_{14} = U_2^2; \ U_4 = \frac{dy_{14}}{dt}.$$

В этих обозначениях расширенная модель объекта записывается следующим образом:

$$\frac{dy_1}{dt}=\varphi_1=a_{12}y_2;$$

$$\frac{dy_2}{dt}=\varphi_2=a_{235}y_3y_6-a_{246}y_5y_7+a_{289}y_{10}y_{12}-a_{2,7,10}y_9y_{13}-a_{200}-a_{220}y_2-a_{222}y_2^2;$$

$$\frac{dy_3}{dt}=\varphi_3=a_{33}y_3+a_{34}y_5+y_4; \qquad \frac{dy_9}{dt}=\varphi_9=a_{77}y_9+a_{78}y_{10}+a_{729}y_2y_{12};$$

$$\frac{dy_4}{dt}=U_1;\quad \varphi_4=0; \qquad \frac{dy_{10}}{dt}=\varphi_{10}=a_{87}y_9+a_{88}y_{10}+y_{11};$$

$$\frac{dy_5}{dt}=\varphi_5=a_{43}y_3+a_{44}y_5+a_{425}y_2y_6; \qquad \frac{dy_{11}}{dt}=U_3;\quad \varphi_{11}=0;$$

$$\frac{dy_6}{dt}=\varphi_6=a_{55}y_6+a_{56}y_7+a_{524}y_2y_5; \qquad \frac{dy_{12}}{dt}=\varphi_{12}=a_{99}y_{12}+a_{9,10}y_{13}+a_{927}y_2y_9;$$

$$\frac{dy_7}{dt}=\varphi_7=a_{65}y_6+a_{66}y_7+y_8; \qquad \frac{dy_{13}}{dt}=\varphi_{13}=a_{10,9}y_{12}+a_{10,10}y_{13}+y_{14};$$

$$\frac{dy_8}{dt}=U_2;\quad \varphi_8=0; \qquad \frac{dy_{14}}{dt}=U_4;\quad \varphi_{14}=0.$$

С этой моделью объекта управления связаны следующие векторные поля:

$$\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{y})=\left|\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3,\ \varphi_4,\ \varphi_5,\ \varphi_6,\ \varphi_7,\ \varphi_8,\ \varphi_9,\ \varphi_{10},\ \varphi_{11},\ \varphi_{12},\ \varphi_{13},\ \varphi_{14}\right|^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{Y}_1^*=\left|0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\right|^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{Y}_2^*=\left|0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\right|^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{Y}_3^*=\left|0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0\right|^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{Y}_4^*=\left|0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1\right|^{\mathrm{T}}.$$

Поскольку вектора $\boldsymbol{Y}_1^*$, $\boldsymbol{Y}_2^*$, $\boldsymbol{Y}_3^*$, $\boldsymbol{Y}_4^*$ постоянны, то распределение $\boldsymbol{M}^{0*}=\mathrm{span}\{\boldsymbol{Y}_1^*,\boldsymbol{Y}_2^*,\boldsymbol{Y}_3^*,\boldsymbol{Y}_4^*\}$ инволютивно.

Так как производные Ли вдоль векторного поля $\boldsymbol{Y}$ векторных полей $\boldsymbol{Y}_k^*$ ($k=\overline{1,4}$) являются постоянными векторами:

$$\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{Y}_1^*=[\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Y}_1^*]=\frac{\partial \boldsymbol{Y}_1^*}{\partial \boldsymbol{y}}\boldsymbol{Y}-\frac{\partial \boldsymbol{Y}}{\partial \boldsymbol{y}}\boldsymbol{Y}_1^*=\left|0,0,-1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0\right|^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{L_Y Y}_2^* = [\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Y}_2^*] = -\frac{\partial \boldsymbol{Y}}{\partial \boldsymbol{y}} \boldsymbol{Y}_2^* = \left| 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right|^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{L_Y Y}_3^* = [\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Y}_3^*] = -\frac{\partial \boldsymbol{Y}}{\partial \boldsymbol{y}} \boldsymbol{Y}_3^* = \left| 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0 \right|^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{L_Y Y}_4^* = [\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Y}_4^*] = -\frac{\partial \boldsymbol{Y}}{\partial \boldsymbol{y}} \boldsymbol{Y}_4^* = \left| 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0 \right|^{\mathrm{T}},$$

то распределение $\boldsymbol{M}^{1*}$ для расширенной системы является инволютивным.

Проверка инволютивности распределения $\boldsymbol{M}^{2*} = \mathrm{span}\{\boldsymbol{Y}_1^*, \boldsymbol{Y}_2^*, \boldsymbol{Y}_3^*, \boldsymbol{Y}_4^*,$ $\boldsymbol{L_Y Y}_1^*, \boldsymbol{L_Y Y}_2^*, \boldsymbol{L_Y Y}_3^*, \boldsymbol{L_Y Y}_4^*, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}}^2 \boldsymbol{Y}_1^*, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}}^2 \boldsymbol{Y}_2^*, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}}^2 \boldsymbol{Y}_3^*, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}}^2 \boldsymbol{Y}_4^*\}$, где $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}}^2 \boldsymbol{Y}_k$ $(k = \overline{1, 4})$ – производные Ли второго порядка, показывает, что оно не является инволютивным. Однако инволютивными являются подраспределения распределения $\boldsymbol{M}^{2*}$:

$$\boldsymbol{M}_1^{2*} = \mathrm{span}\{\boldsymbol{Y}_1^*, \boldsymbol{Y}_2^*, \boldsymbol{Y}_3^*, \boldsymbol{Y}_4^*, \boldsymbol{L_Y Y}_1^*, \boldsymbol{L_Y Y}_2^*, \boldsymbol{L_Y Y}_3^*, \boldsymbol{L_Y Y}_4^*, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}}^2 \boldsymbol{Y}_1^*\};$$

$$\boldsymbol{M}_2^{2*} = \mathrm{span}\{\boldsymbol{Y}_1^*, \boldsymbol{Y}_2^*, \boldsymbol{Y}_3^*, \boldsymbol{Y}_4^*, \boldsymbol{L_Y Y}_1^*, \boldsymbol{L_Y Y}_2^*, \boldsymbol{L_Y Y}_3^*, \boldsymbol{L_Y Y}_4^*, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}}^2 \boldsymbol{Y}_2^*\};$$

$$\boldsymbol{M}_3^{2*} = \mathrm{span}\{\boldsymbol{Y}_1^*, \boldsymbol{Y}_2^*, \boldsymbol{Y}_3^*, \boldsymbol{Y}_4^*, \boldsymbol{L_Y Y}_1^*, \boldsymbol{L_Y Y}_2^*, \boldsymbol{L_Y Y}_3^*, \boldsymbol{L_Y Y}_4^*, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}}^2 \boldsymbol{Y}_3^*\};$$

$$\boldsymbol{M}_4^{2*} = \mathrm{span}\{\boldsymbol{Y}_1^*, \boldsymbol{Y}_2^*, \boldsymbol{Y}_3^*, \boldsymbol{Y}_4^*, \boldsymbol{L_Y Y}_1^*, \boldsymbol{L_Y Y}_2^*, \boldsymbol{L_Y Y}_3^*, \boldsymbol{L_Y Y}_4^*, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}}^2 \boldsymbol{Y}_4^*\}.$$

Это оказывается достаточным для осуществления динамической линеаризации и получения системы линейных дифференциальных уравнений в форме Бруновского. На основании теории о линейных эквивалентах для нелинейных аффинных систем с $m$ уравнениями [12], получим математическую модель объекта управления в форме Бруновского в пространстве "вход – состояние":

$$\begin{gathered} \frac{dz_i}{dt} = z_{i+1}, \; i = \overline{1, 13}, \; i \neq 4, \; 8, \; 11; \\ \frac{dz_4}{dt} = v_1; \; \frac{dz_8}{dt} = v_2; \; \frac{dz_{11}}{dt} = v_3; \; \frac{dz_{14}}{dt} = v_4, \end{gathered} \tag{3}$$

где $v_j$ ( $j = \overline{1, 4}$ ) – управления.

Поскольку модель объекта в форме Бруновского имеет четыре клетки, то необходимо определить четыре функции $T_j(\boldsymbol{y})$ ( $j = \overline{1, 4}$ ), преобразующие переменные расширенной модели объекта управления в переменные модели в форме Бруновского:

$$z_1 = T_1(\boldsymbol{y}); \quad z_5 = T_2(\boldsymbol{y}); \quad z_9 = T_3(\boldsymbol{y}); \quad z_{12} = T_4(\boldsymbol{y}).$$

Методика определения этих функций известна [8, 12]. В данном случае они являются однокомпонентными составляющими вектора $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_{14})$. Из этих функций путем последовательного дифференцирования вдоль векторного поля $\boldsymbol{Y}^* = \boldsymbol{Y} + U_1\boldsymbol{Y}_1^* + U_2\boldsymbol{Y}_2^* + U_3\boldsymbol{Y}_3^* + U_4\boldsymbol{Y}_4^*$ можно получить выражения для определения соответственно $z_2$, $z_3$, $z_4$ (из функции $T_1(\boldsymbol{y})$), $z_6$, $z_7$, $z_8$ (из функции $T_2(\boldsymbol{y})$), $z_{10}$, $z_{11}$ (из функции $T_3(\boldsymbol{y})$) и $z_{13}$, $z_{14}$ (из функции $T_4(\boldsymbol{y})$). В качестве примера рассмотрим получение зависимостей для определения $z_2$, $z_3$, $z_4$ с помощью функции $T_1(\boldsymbol{y})$. Для исследуемого объекта управления имеем: $T_1(\boldsymbol{y}) = y_1$, поэтому $z_1 = y_1$. Дифференцируя функцию $T_1(\boldsymbol{y})$ вдоль векторного поля $\boldsymbol{Y}^*$ и учитывая, что $z_2$, $z_3$ и их производные не зависят от управлений, получим

$$z_2 = \frac{dz_1}{dt} = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}^*} T_1(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}} T_1(\boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{14} \frac{\partial T_1(\boldsymbol{y})}{\partial y_i}\varphi_i = a_{12}y_2;$$

$$z_3 = \frac{dz_2}{dt} = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}^*}(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}} T_1(\boldsymbol{y})) = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}}(a_{12}y_2) = \sum_{i=1}^{14} \frac{\partial(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}} T_1(\boldsymbol{y}))}{\partial y_i}\varphi_i = a_{12}\varphi_2 =$$

$$= a_{12}(a_{235}y_3y_6 - a_{246}y_5y_7 + a_{289}y_{10}y_{12} - a_{2,7,10}y_9y_{13} - a_{200} - a_{220}y_2 - a_{222}y_2^2);$$

$$z_4 = \frac{dz_3}{dt} = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}^*}(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}}^2 T_1(\boldsymbol{y})) = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}}(a_{12}\varphi_2) = \sum_{i=1}^{14} \frac{\partial(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}}(a_{12}\varphi_2))}{\partial y_i}\varphi_i =$$

$$= a_{12}[(-a_{220} - 2a_{222}y_2)\varphi_2 + a_{235}y_6\varphi_3 - a_{246}y_7\varphi_5 + a_{235}y_3\varphi_6 - a_{246}y_5\varphi_7 -$$

$$- a_{2,7,10}y_{13}\varphi_9 + a_{289}y_{12}\varphi_{10} + a_{289}y_{10}\varphi_{12} - a_{2,7,10}y_9\varphi_{13}].$$

Аналогичным образом могут быть получены соотношения для определения остальных переменных модели Бруновского. Параллельное моделирование объекта управления в различных режимах с помощью исходной математической модели и модели в форме Бруновского показали полное совпадение процессов в обеих моделях при разгонах и движении состава по перегонам, в режимах буксования.

**Выводы.** Таким образом, впервые средствами геометрической теории управления получена работоспособная математическая модель в канонической форме Бруновского, которая позволяет исследовать и оптимизировать процессы управления дизель-поездом в режимах разгона и ведения состава по перегонам с известным профилем пути с учетом параллельной работы двигателей и процессов буксования.

**Список литературы: 1.** *Бауэр Х.П.* Оптимальное использование сцепления на электровозе с трехфазным тяговым приводом / *Х.П. Бауэр* // Железные дороги мира. – 1987. – № 8. – С. 10 – 23. **2.** *Ohishi K.* Adhesion control of electric motor coach based on force control using disturbance observer / *K. Ohishi, Y. Ogawa* // IEEE, Advanced Motion Control. – April, 2000. – P. 323 – 328. **3.** Тяговые и токовые характеристики электроподвижного состава с асинхронным тяговым двигателем / *Омельяненко В.И., Калюжный Н.Н., Кулиш Т.А., Кривякин Г.В.* // Проблемы и перспективы развития железнодорожного транспорта: Тезисы LXVI международной конференции. – Днепропетровск: ДИИТ, 2006. – С. 123. **4.** *Шапран Е.Н.* Совершенствование микропроцессорных систем управления с высоким использованием сил сцепления / *Е.Н. Шапран* // Вісник НТУ "ХПІ". – Харків: НТУ "ХПІ". – 2006. – № 23. – С. 145 – 154. **5.** Моделирование и оптимизация систем управления и контроля локомотивов / *Носков В.И., Дмитриенко В.Д., Заполовский Н.И., Леонов С.Ю.* – Х.: ХФИ "Транспорт Украины", 2003. – 248 с. **6.** *Артеменко А.Н.* Система автоматического выравнивания нагрузки тягового электропривода карьерного электровоза / *А.Н. Артеменко* // Вісник Кременчуцького державного університету ім. Михайло Остроградського. – Кременчук: КДН ім. Михайло Остроградського. – 2010. – Вип. 4. – Частина 3. – С. 56 – 58. **7.** *Притула М.Г., Шпакович Р.Р.* Моделювання та розрахунок оптимальних параметрів руху поїздів // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2007. – Вип. 5. – С. 139 – 145. **8.** *Дмитриенко В.Д.* Синтез оптимальных законов управления тяговым электроприводом методами дифференциальной геометрии и принципа максимума / *В.Д. Дмитриенко, А.Ю. Заковоротный* // Системи обробки інформації. – Харків: ХУПС. – 2009. – Вип. 4 (78). – С. 42–51. **9.** Методы классической и современной теории автоматического управления: Учебник в 5-ти томах. Т. 4: Теория оптимизации систем автоматического управления / Под ред. *К.А. Пупкова и И.Д. Егунова*. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 744 с. 10**.** Методы классической и современной теории автоматического управления: Учебник в 5-и томах. Т. 5: Методы современной теории управления / Под ред. *К.А. Пупкова, Н.Д. Егунова*. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 784 с. **11.** *Дмитриенко В.Д.* Линеаризация математической модели привода методами дифференциальной геометрии / *В.Д. Дмитриенко, А.Ю. Заковоротный* // Вісник НТУ "ХПІ". – Харків: НТУ "ХПІ". – 2007. – № 19. – С. 64 – 77. **12.** *Краснощёченко В.И.* Нелинейные системы: геометрический метод анализа и синтеза / *В.И. Краснощёченко, А.П. Грищенко*. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2005. – 520 с.

УДК 621.9.01

**Математична модель у формі Бруновського для дослідження та оптимізації електроприводу з урахуванням паралельної роботи двигунів / Дмитрієнко В.Д., Заковоротний О.Ю., Нестеренко А.О.** // Вісник НТУ "ХПІ". Тематичний випуск: Інформатика і моделювання. – Харків: НТУ "ХПІ". – 2011. – № 36. – С. 61 – 70.

Виконано за допомогою геометричної теорії керування синтез лінійної математичної моделі тягового асинхронного електропривода в просторі "вхід-стан". Отримана модель у канонічній формі Бруновського дозволяє досліджувати й оптимізувати процеси не тільки розгону й руху рухомого складу із заданою швидкістю, а й процеси буксування. Бібліогр.: 12 назв.

**Ключові слова:** геометрична теорія керування, модель тягового асинхронного електроприводу, модель у канонічній формі Бруновського.

UDC 621.9.01

**Mathematical model in form Brunovsky for research and optimize of electrical drive with parallel operation of motors / Dmitrienko V.D., Zakovorotnyi A.Y., Nesterenko A.O.** // Herald of the National Technical University "KhPI". Subject issue: Information Science and Modelling. – Kharkov: NTU "KhPI". – 2011. – № 36. – P. 61 – 70.

Done using the geometric theory control synthesis of linear mathematical model asynchronous electric drive in the space "input-state". The resulting model in canonical form Brunovsky can research and optimize not only the acceleration and movement of rolling stock with a given speed, but also the processes of slipping. Refs.: 12 titles.

**Keywords:** geometric control theory, the model of asynchronous electric drive, the model in canonical form Brunovsky.

*Поступила в редакцию 14.07.2011*